(φ, Γ)-module 入門
(レジュメ)

山下　剛

2001年11月17日

目 次

0 Introduction

本稿は,Workshop「p-進表現と p-進微分方程式」(２００１年１２月３日〜７日, 名古屋大学)における講演「(φ, Γ)-module 入門」のレジュメ(実際の発表は２〜３章まで)である.

ここでは, なぜ (φ, Γ)-module を考えるのか, (φ, Γ)-module を使うとどういう面白い事があるのかを紹介する. 証明は参考文献を参考されたい.

K を混標数 $(0, p)$ の完備離散付値体, 剰余体 k は完全, $\mathcal{G}_K$ を K の絶対 Galois 群とする. $\overline{K}$ を K の代数閉包, $\mathbb{C}_p$ をその付値による完備化, $F := \mathrm{Frac}\, W(k)$, $K_n := K(\mu_{p^n})$, $K_\infty := K(\mu_{p^\infty})$, $F_\infty := F(\mu_{p^\infty})$, χ を円分指標, $\mathcal{H}_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K) = \mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K$

とおく．$\mathcal{G}_K$ の有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間 (resp. finite type $\mathbb{Z}_p$-module) への連続な作用を $\mathcal{G}_K$ の p 進表現 (resp. $\mathbb{Z}_p$ 進表現) という．

Definition 0.1 A を noether 環で, その自己準同型 $\sigma : A \to A$ と Γ_K の作用が与えられていて, σ と Γ_K の作用は可換とする．A 上 finite type な加群 M に, σ-semi-linear な自己準同型 $\varphi : M \to M$ と Γ_K の semi-linear な作用で, φ と Γ_K の作用が可換なものが与えられている時, M を A 上の (φ, Γ_K)-module という．ここで semi-linear とは、$\varphi(ax) = \sigma(a)\varphi(x), \gamma(ax) = \gamma(a)\gamma(x)$ $(a \in A, x \in M, \gamma \in \Gamma_K)$ の事をいう．A 上の (φ, Γ_K)-module が étale とは $\varphi(M)$ が A-module として M を生成する時にいう．

[Fo1] において Fontaine さんは, 体 $\mathbf{B}_K$, 環 $\mathbf{A}_K$ を定義して, $\mathcal{G}_K$ の p 進表現 (resp. $\mathbb{Z}_p$ 進表現) の圏と, $\mathbf{B}_K$ 上の slope=0($\mathbf{A}_K$-lattice でétale なものがとれる時, slope=0 という) の (φ, Γ_K)-module(resp. $\mathbf{A}_K$ 上の étale(φ, Γ_K)-module) の圏との圏同値を構成した．($\mathbf{B}_K$ と $\mathbf{A}_K$ は [Fo1] においては, $\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ という記号を使っている．$\mathbf{B}_K$ と $\mathbf{A}_K$ の定義は後で．)

p 進表現の方は, 難しくってよく分からないものだけれど, (φ, Γ_K)-module の方は, Γ_K はほとんど $\mathbb{Z}_p$ だから, その位相的生成元と φ の作用だけ見ればよいものになって, 分かりやすいものだと考えられる．(より次元の高い局所体上で考えることになるが．)

p 進表現の圏の方には, de Rham 表現や crystalline 表現の部分 (淡中) 圏があったり, あるいは, Galois cohomology を考えたり, Bloch-Kato の exp map([BK]) を考えたりする．それらの p 進表現の方の言葉を (φ, Γ_K)-module の言葉で書こうというのが基本的な思想である．また, ここで (φ, Γ_K)-module で使われる体 $\mathbf{B}$ と p 進 Hodge で使われる体 $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ を結びつけるものとして, overconvergence な元のなす体 $\mathbf{B}^{\dagger}$ が現れ, 自然と overconvergent な表現という概念がでてくる．

１章では, (φ, Γ_K)-module で使われる $\mathbf{B}$ さんたちを定義し, [Fo1] の圏同値を構成する．２章では, Galois cohomology が (φ, Γ_K)-module でどう書かれるかを見る．３章では (φ, Γ_K)-module で使われる体 $\mathbf{B}$ と p 進 Hodge で使われる体 $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ を結びつける体 $\mathbf{B}^{\dagger}$ と overconvergent な表現を定義し, [CC1] の主定理を述べる．４章では Bloch-Kato exponential map を (φ, Γ_K)-module から見てみる．第５章では p 進 Hodge と (φ, Γ_K)-module の関係を見てみる．６章は記号を整理した．

発表を僕に任せて頂いた organizer の加藤文元先生, 坂内健一さん, 僕を薦めて下さった斎藤毅先生, いつも僕を助けて下さる安田正大さんに特別の感謝の意を述べる．

1　B さんたち

まず, (φ, Γ)-module に使われる環や体 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を定義し, [Fo1] の圏同値を構成する．記号は Introduction のものを使う．

$\mathbb{C}_p$ の列 $x = (x^{(0)}, \cdots, x^{(n)}, \cdots)$ で $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ を満たすもの全体を $\widetilde{\mathbf{E}}$ と書き, ここに次のように積と和を定める.

$$(x+y)^{(n)} := \lim_{m\to\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

$$(xy)^{(n)} := x^{(n)} y^{(n)}$$

$\widetilde{\mathbf{E}}$ は, 標数 p の付値 $v_{\mathbf{E}} := v_p(x^{(0)})$ に関して完備な代数閉体になる. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ をその付値環とする. $\widetilde{\mathbf{E}}$ の元 $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(n)}, \cdots) \quad (\varepsilon^{(1)} \neq 1)$ をとってくる. $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$ である. $\widetilde{\mathbf{E}}$ の部分体 $k((\varepsilon-1))$ を $\mathbf{E}_F$ と書く. これは ε の取り方によらない. $\mathbf{E}_F$ の $\widetilde{\mathbf{E}}$ における分離閉包を $\mathbf{E}$, その付値環を $\mathbf{E}^+$ と書く. ここで, 実は $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_F)$ は $\mathcal{H}_F$ と同一視できる. (ノルム体の理論 cf. [Wi])

$$\mathbf{E}_K := (\mathbf{E})^{\mathcal{H}_K},\ \widetilde{\mathbf{E}}_K := (\widetilde{\mathbf{E}})^{\mathcal{H}_K},\ \mathbf{E}_K^+ := (\mathbf{E}^+)^{\mathcal{H}_K},\ \widetilde{\mathbf{E}}_K^+ := (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathcal{H}_K}$$

とおく.

$\widetilde{\mathbf{A}} := W(\widetilde{\mathbf{E}}),\ \widetilde{\mathbf{B}} := \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ とする. 環同型 $W(\widetilde{\mathbf{E}}) \to \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}$ が同相になるように $W(\widetilde{\mathbf{E}})$ に位相を入れ, $\widetilde{\mathbf{B}} = \cup_{n\geq 0} \frac{1}{p^n} \widetilde{\mathbf{A}}$ には帰納極限位相を入れる. これらは, $\widetilde{\mathbf{E}}$ の絶対 Frobenius から induce される自己準同型 φ(これも Frobenius という) を持つ. $[\cdot]$ を $\widetilde{\mathbf{E}}$ から $\widetilde{\mathbf{A}}$ への Teichmüller lift とする. $\pi := [\varepsilon] - 1$ とおく. $\mathbf{A}_F$ を $\mathcal{O}_F[\pi, \frac{1}{\pi}]$ の $\widetilde{\mathbf{B}}$ における位相閉包とする. (すなわち, $\mathcal{O}_F[[\pi]][\frac{1}{\pi}]$ の p 進完備化)$\mathbf{A}_F$ の剰余体は $\mathbf{E}_F$ になる. $\mathbf{B}_F := \mathbf{A}_F[\frac{1}{p}]$ とおく. $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1,\ g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1\ (g \in \mathcal{G}_F)$ より $\mathbf{B}_F, \mathbf{A}_F$ は $\varphi, \mathcal{G}_F$ で安定. $\mathbf{B}$ を $\mathbf{B}_F$ の $\widetilde{\mathbf{B}}$ における最大不分岐拡大体の p 進完備化とし, $\mathbf{A} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ とおく.

$$\mathbf{A}_K := \mathbf{A}^{\mathcal{H}_K},\ \mathbf{B}_K := \mathbf{B}^{\mathcal{H}_K},\ \widetilde{\mathbf{A}}_K := (\widetilde{\mathbf{A}})^{\mathcal{H}_K},\ \widetilde{\mathbf{B}}_K := (\widetilde{\mathbf{B}})^{\mathcal{H}_K}$$

とおく. $\mathbf{B}_K, \mathbf{A}_K$ も $\varphi, \mathcal{G}_K$ で安定. $\mathbf{A}_K$ の剰余体は $\mathbf{E}_K$ になる. $[L:K] < \infty$ で Galois なら,

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbf{B}}_L/\widetilde{\mathbf{B}}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}_L/\mathbf{E}_K) = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) = \mathcal{H}_K/\mathcal{H}_L$$

となる.

Theorem 1.1 (Fontaine [Fo1]) V を p 進表現 (resp. $\mathbb{Z}_p$ 進表現) として, $\mathbf{D}(V) := (\mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ とおく. これは自然に $\mathbf{B}_K$(resp. $\mathbf{A}_K$) 上の (φ, Γ_K)-module の構造が入る. ここで, $\mathbf{D}$ は次の圏同値を与える.

($\mathcal{G}_K$ の p 進表現の圏)$\simeq$($\mathbf{B}_K$ 上 slope$=0$ の (φ, Γ_K)-module の圏)

($\mathcal{G}_K$ の $\mathbb{Z}_p$ 進表現の圏)$\simeq$($\mathbf{A}_K$ 上 étale な (φ, Γ_K)-module の圏)

ここで, $\mathbf{D}$ の quasi-inverse は $\mathbf{V}(\cdot) := (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} \cdot\,)^{\varphi=1}$ で与えられる.

remark V が p 進表現の時, 上は, $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{\mathbf{B}_K} \mathbf{D}(V)$

$$\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} \mathbf{D}(V) \cong \mathbf{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

すなわち, $\mathbf{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ の基底として, $\mathcal{H}_K$ 不変なものがとれる事を意味している. 上の $\mathcal{H}_K$ 不変部分をとると, $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ が, $\varphi = 1$ 部分をとると, $V = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} \mathbf{D}(V))^{\varphi=1}$ が出る.

V の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底を固定し, $\mathbf{D}(V)$ の $\mathbf{B}_K$ 上の基底を固定したときの上の同型を行列で書いたものを period matrix という. period matrix の成分が $\mathbf{B}$ より小さい体 (で $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ と結びつくもの) に入る事を考える事が重要になってくる. (3 章「overconvergent な表現」参照)

2 Galois cohomology と (φ, Γ)-module

ここでは, Galois cohomology が, (φ, Γ)-module でどう書けるかを見てみる. この section 中は, $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, $\Gamma_K \cong \mathbb{Z}_p$ とする. (すなわち、$p \neq 2$ の場合は 1 の原始 p 乗根を含む時で, $p = 2$ の場合は分岐する 2 次拡大を 3 つ含む時.)

Definition 2.1 $\mathbf{A}_K$ 上のétale (φ, Γ_K)-module M に対して, $\gamma \in \Gamma_K$ 位相的生成元を固定して, complex $C^\bullet_{\varphi,\gamma}(M)$ を次で定義する.

$$0 \to M \xrightarrow{a} M \oplus M \xrightarrow{b} M \to 0$$

$a(x) = ((\varphi - 1)x, (\gamma - 1)x)$, $b(y, z) = (\gamma - 1)y - (\varphi - 1)z$ ここで $M \oplus M$ は degree=1 のところに置いてある.

Γ_K の位相的生成元 γ と他の (位相的生成元とは限らない) 元 γ' に対して, $\frac{\gamma'-1}{\gamma-1} \in \operatorname{Frac} \mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]]$ は実際は $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]]$ の元であり, $\mathcal{G}_K$ は $\mathbf{D}(V)$ に Γ_K を通って作用するので, $\sigma \in \mathcal{G}_K$, $y \in \mathbf{D}(V)$ にたいして, $\frac{\sigma-1}{\gamma-1}y$ と書くことは意味を持つ.

ここで, 次の定理は V から定まる (φ, Γ_K)-module から, V を経由しないで直接 V の Galois cohomology をつくることができる事を言っている.

Theorem 2.1 (Herr [H1]) $\mathbb{Z}_p$ 進表現 V に対して, $M = \mathbf{D}(V)$ と置く. このとき,

$$\mathcal{H}^i(C^\bullet_{\varphi,\gamma}(M)) \cong H^i(K, V)$$

上の同型写像は $i = 1$ の時, 次のようにかける. $(x, y) \in Z^1(C^\bullet_{\varphi,\gamma})$ に対して, $b \in \mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ を $(\varphi - 1)b = x$ を満たすようにとる. $\log \chi(\Gamma_K) = p^{r(K)}\mathbb{Z}_p$ として, $\sigma \mapsto \frac{\log \chi(\gamma)}{p^{r(K)}}(\frac{\sigma-1}{\gamma-1}y - (\sigma - 1)b)$ は $\mathcal{G}_K$ の V に値をとる 1-cocycle になる. この cocycle を対応させる写像 ι_γ が上の $i = 1$ の同型写像になる. ここで, この同型写像は次の意味で γ のとり方に依存しない同型写像になる. γ' を他の位相的生成元として, $C^\bullet_{\varphi,\gamma}(M)$ から $C^\bullet_{\varphi,\gamma'}(M)$ への自然な同型写像 (すなわち, degree=0 では $\frac{\gamma-1}{\gamma'-1}$, degree=1 では $\frac{\gamma-1}{\gamma'-1} \oplus \mathrm{id}$, degree=2 では id) を $\iota_{\gamma,\gamma'}$ とすると, $\iota_\gamma = \iota_{\gamma'} \circ \iota_{\gamma,\gamma'}$

remark H^1 は, φ,γ から作った complex で同型を考えたが, φ の左逆元 (すなわち, $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}$) である $\psi := \frac{1}{p}\varphi^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}$ と γ から作った complex で同型を考えることもできる．このとき, ψ で考えた complex の方が「$\gamma-1$ が $\mathbf{D}(V)^{\psi=0}$ 上可逆である」とか「$\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ が compact である」等の良い性質をもっていて, 岩澤 cohomology, $\mathbf{B}^{\dagger}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ と結びつく．([CC2] や４章「Bloch-Kato の exponetial map と (φ,Γ)-module」参照)

これを使って, 次の古典的な結果が**局所類体論を使わないで**証明できる．(Herr [H1][H2])

Theorem 2.2 V を p-torsion 表現 (すなわち, V が p 冪で消える $\mathbb{Z}_p$ 進表現)(resp. $\mathbb{Z}_p$ 進表現) とする．

1. $H^i(K,V)=0$ for $\forall i\geq 3$
2. $\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{card}(H^i(K,V))^{(-1)^i}=p^{-[K:\mathbb{Q}_p]\mathrm{length}V}$
   (resp. $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}H^i(K,V)=-[K:\mathbb{Q}_p]\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}V$)
3. V が $\mathbb{Z}_p$ 進表現なら, p-torsion free とする．
   $V^*(1)$ を $\mathrm{Hom}(V,\mu_{p^\infty})$(resp. $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Z}_p(1))$) として,
   $H^i(K,V)\times H^{2-i}(K,V^*(1))\to H^2(K,\mu_{p^\infty})\cong\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$
   (resp. $H^i(K,V)\times H^{2-i}(K,V^*(1))\to H^2(K,\mathbb{Z}_p(1))\cong\mathbb{Z}_p$)
   は perfect pairing.

3 overconvergent な表現

ここでは (φ,Γ_K)-module で使われる体 $\mathbf{B}$ と p 進 Hodge で使われる体 $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ を結びつけるために overconvergent な元のなす体 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ と, overconvergent な表現を定義する．

$\widetilde{\mathbf{B}}=\mathrm{Frac}\,W(\widetilde{\mathbf{E}})$ であったが, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ は環 $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{+})$ を使って定義する．ここで, $\mathrm{Frac}\,W(\widetilde{\mathbf{E}})$ の元 $x=\sum_{i\gg-\infty}p^i[x_i]$ において, $x_i\in\widetilde{\mathbf{E}}$ の付値が i が大きくなる時に, そんなに急激に $-\infty$ に向かわなければ, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ と結びつく．

Definition 3.1

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}:=\{x=\sum_{i\gg-\infty}p^i[x_i]\in\widetilde{\mathbf{B}}\mid\exists r>0,\exists N\ \text{s.t.}\ \forall k\geq 0\ v_{\mathbf{E}}(x_k)\geq -rk-N\}$$

$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}:=\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\cap\widetilde{\mathbf{A}}$
$\mathbf{A}^{\dagger}:=\mathbf{A}\cap\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger}:=\mathbf{B}\cap\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, $\mathbf{A}_K^{\dagger}:=(\mathbf{A}^{\dagger})^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{B}_K^{\dagger}:=(\mathbf{B}^{\dagger})^{\mathcal{H}_K}$
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ の元を overconvergent な元という．自明ではないが, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ は体になる．(cf.[CC1])

次の命題は体 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ が (φ,Γ_K)-module で使われる体 $\widetilde{\mathbf{B}}$ と p 進 Hodge で使われる体 $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ を結びつける事を示している．

Proposition 3.1 $x = \sum_{i \gg -\infty} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{B}}$ に対して, 次は同値.

1. $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$
2. $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. 列 $\varphi^{-n}(x) = \sum_{i \gg -\infty} p^i[x_i^{p^{-n}}]$ が $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ で収束.

Definition 3.2 $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ の元 x で、$\varphi^{-n}(x)$ が $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ で収束もの全体を $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$([CC1] の記号では $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{((p-1)p^{n-1})^-}$, [Be] の記号では $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}$) と置き, $\mathbf{B}^{\dagger,n} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$, $\mathbf{D}^{\dagger,n}(V) := (\mathbf{B}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ と置く.($\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ は $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n} = \{x = \sum_{i \gg -\infty} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{B}} \mid v_{\mathbf{E}}(x_k) + p^n k \to +\infty\ (k \to +\infty)\}$ とも書ける．)

Definition 3.3 p 進表現 V に対して,

$$\mathbf{D}^\dagger(V) := (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K},\ \mathbf{D}^{\dagger,n}(V) := (\mathbf{B}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$$

とおく．$\dim_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(K) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であるが, ここで等号が成立するとき, V を overconvergent な表現という．これは, $\mathbf{D}(V)$ が $\mathbf{B}_K^\dagger$ 上定義された $\mathbf{D}^\dagger(V)$ からやってくる (すなわち, $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ が成り立つ) 事を意味している．あるいは, 十分大きい n に対して $\mathbf{D}^{\dagger,n}(V)$ が $\mathbf{D}(V)$ の $\mathbf{B}_K$ 上の基底を含むと言ってもよい.

次の定理は任意の p 進表現に対して, そこから作られる (φ, Γ_K)-module が p 進 Hodge と結びつく事を言っている.

Theorem 3.2 (Cherbonnier; Colmez [CC1])
$\mathcal{G}_K$ の任意の p 進表現は overconvergent である.

remark 定義から, $\mathcal{G}_K$ の p 進表現が overconvergent であるか否かは $\mathcal{H}_K$ の作用だけに依存しているが, $\mathcal{H}_K$ の任意の p 進表現が overconvergent であるとは限らない (反例は存在する).

4 Bloch-Kato の exponential map と (φ, Γ)-module

ここでは, 岩澤 cohomology を通じて, Bloch-Kato の exponetial map が (φ, Γ)-module でどう書けるかを見てみる．この section では, $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ とする.

Definition 4.1 $\mathcal{G}_K$ の $\mathbb{Z}_p$ 進表現 T に対して, $H^m_{\mathrm{Iw}}(K, T) := \varprojlim H^m(K_n, T)$(corestriction での射影極限) とおく．また, $\mathcal{G}_K$ の p 進表現 V に対して, V の $\mathcal{G}_K$ で安定な lattice をとって, $H^m_{\mathrm{Iw}}(K, V) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{Iw}}(K, T)$ と定義する．(lattice のとり方には依存しない．)

Theorem 4.1

$$\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$$

写像は次の通り．γ_1 を Γ_{K_1} の位相的生成元，$\gamma_n := \gamma_1^{[K_n:K_1]}$ とする．$y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ をとる．$(\varphi-1)y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=0}$ であり, $\gamma_n - 1$ は $\mathbf{D}(V)^{\psi=0}$ 上可逆だから (cf.[CC2]), $x_n \in \mathbf{D}(V)^{\psi=0}$ が存在して $(\gamma_n-1)x_n = (\varphi-1)y$ を満たす．(すなわち, $(x_n,y) \in Z^1_{\varphi,\gamma_n}(K_n,V)$) 2 章で定義した ι_γ を K を K_n, γ を γ_n に置き換えて定義したものを ι_{γ_n} と書いて, $\iota_{\gamma_n}(x_n,y) \in H^1(K_n,V)$ が定まる．y に対してこの $(\iota_{\gamma_n}(x_n,y))_{n\geq 1}$ を対応させるのが上の写像. この逆写像を $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ で表す．(記号の由来は後で分かる．)

Proposition 4.2 $n \gg 0$ では, $\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{\dagger,n}(V)$ (cf.[CC2])

Proposition 4.3 $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して,
$H^m(K, \mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} V) \xrightarrow{\cong} H^m_{\mathrm{Iw}}(K, V(k))$ $\mu \mapsto (\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu(k))_{n\geq 1}$
ここで, $x \in V$ に対して, $V(k)$ での像を $x(k)$ と書いている．

Definition 4.2 $x \in K_\infty$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n} x \in K_n$ は m が十分大きいと $x \in K_m$ となる m に依らない．これを T_n で表す．$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ の素元 $t := \log[\varepsilon]$ を固定して, $T_n(t) = t$ として, $K_\infty((t)) \to K_n((t))$ に拡張したものも T_n で表す．ここで, 実は, $K_\infty((t))$ は $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ で dense なので (cf.[C]), $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K} \to K_n((t))$ に連続に拡張したものも T_n で表す.

Definition 4.3 $\mathcal{G}_K$ の p 進表現 V に対して,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

(最後の全射は [BK], 他は [Fo2] 参照) に V とテンソルして, 境界準同型をとると, $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \to H^1(K,V)$ がでる．これと $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$ との合成を Bloch-Kato の exponential map といい, $\exp_V$ で表す．V が de Rham で, $k \gg 0$ の時, $\exp_{V(k)}$ は $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ から $H^1(K,V(k))$ への同型写像になる.
また, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ の素元 $t := \log[\varepsilon]$ を固定して, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(1)) = t^{-1}K \cong K$ を固定する.

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-k)) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1+k)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V \otimes V^*(1)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(1)) \cong K \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}_p$$

$$H^1(K, V(-k)) \times H^1(K, V^*(1+k)) \to H^2(K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$$

によって, $\exp_{V^*(1+k)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1+k)) \to H^1(K, V^*(1+k))$ の dual をとった $H^1(K,V(-k)) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-k))$ を $\exp^*_{V^*(1+k)}$ で表す.

remark 例えば, A を K 上の good reduction を持つアーベル多様体, $V := V_p(A)$ を A の Tate module, D を A の Dieudonné module とする．V は crystalline 表現になり, 上の Bloch-Kato exponential map は下の写像の合成になる.

$$\begin{array}{ccccccc} D \otimes_{W(k)} K & \xrightarrow{=} & H^1_{\mathrm{dR}}(A/K)^* & \longrightarrow & H^0(A, \Omega_{A/K})^* & \xrightarrow{=} & \\ \mathrm{Lie}(A) & \xrightarrow{\exp} & A(K) \otimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\mathrm{Kummer}} & H^1(K,V) & & \end{array}$$

これから, Bloch-Kato exponential map は "接空間的なもの"（あるいは "微分形式的なもの"）と "有理点的なもの" を結ぶものだと考えられる.

Definition 4.4 V を $\mathcal{G}_K$ の de Rham 表現とする.

1. $n \gg 0$ として, 合成

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V) & \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}} & \mathbf{D}(V)^{\psi=1} & \xrightarrow{\subset} \\ \mathbf{D}^{\dagger,n}(V) & \xrightarrow{\varphi^{-n}} & (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K} & \xrightarrow{=} \\ {\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}^{\mathcal{H}_K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{T_m} & K_m((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \end{array}$$

を $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}$ とおく.

2. 合成

$$\begin{array}{ccccc} H^1(K_m,V(-k)) & \xrightarrow{\exp^*_{V^*(1+k)}} & K_m \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-k)) & \xrightarrow{=} \\ K_m \otimes_K t^k\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\subset} & K_m((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \end{array}$$

も $\exp^*_{V^*(1+k)}$ と書くことにする.

上の $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}$ の定義で, 体 $\mathbf{B}^\dagger$ が $\mathbf{D}(V)$ と $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ を結びつけている事に注意したい. (２, ３番目の矢印)

次の定理は, Bloch-Kato の exponential map(の dual)$\exp^*_{V^*(1+k)}$ が, (φ,Γ)-module の方の写像 $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}$ で t^k の項を見ると取り出せることを言っている.

Theorem 4.4 (Cherbonnier; Colmez [CC2]) V を $\mathcal{G}_K$ の de Rham 表現とする. $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ として,

$$\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}(\mu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp^*_{V^*(1+k)}\left(\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu\right)$$

ここで, Prop 4.3 の同型で $H^m_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ の元を $H^m(K,\mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]]\otimes_{\mathbb{Z}_p} V)$ の元とみなしている.

5 p 進 Hodge 理論と (φ,Γ)-module

ここでは, p 進 Hodge 理論で使われる関手 $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ や $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}$ を (φ,Γ)-module でどう書けるか, potentially semi-stable 表現である事が (φ,Γ_K)-mudule でどう p 進微分方程式の言葉に翻訳されるかを見てみる. この章はあまり詳しく書かないので [Be] を参照されたい.

"Definition" 5.1 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$

これらは [Be] で導入された. しかし, そこでは $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ は定義されたが, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ は定義されていない. おそらく $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} := \bigcup_r \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ だと思われる. $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ の詳しい定義は [Be] 参照. ここではこれらは non-canonical に

$$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \pi_K^k \mid a_k \in F, \forall\rho \in [p^{-1/[K_\infty:F_\infty]r}, 1) \lim_{k\to\pm\infty} |a_k|\rho^k = 0\}$$

(π_K は mod p すると $\mathbf{E}_K$ の素元になるもの.) と書ける事のみ言い添えておく.
$\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K} := \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\log(\pi)]$ と置く.

Definition 5.2
$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) := \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$, $\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V) := \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$
と置く.

remark $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} := \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_F} \mathbf{B}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log} := \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\log(\pi)]$ と置いて, $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ も言える.(cf.[Be])

次の定理は, V から定まる (φ, Γ_K)-module から, V を経由しないで直接 $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ や $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)$ をつくることができる事を言っている.

Theorem 5.1 (Berger [Be]) V を $\mathcal{G}_K$ の p 進表現とする.

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \cong (\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V) \cong (\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$
2. さらに, V が semi-stable 表現の時は,
$$\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t] \cong \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$$
3. さらに, V が crystalline 表現の時は,
$$\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t] \cong \mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$$

次に, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の module$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ には Γ_K の作用から定まる connection∇_V が入り, crystal を定める.(∇_V と crystal の定義は [Be] 参照) connection が unipotent であるという概念も定義される.([Be] 参照)
次の定理は p 進表現の命題を p 進微分方程式の言葉に言い換える.

Theorem 5.2 (Berger [Be]) V を p 進表現とする. この時, 次は同値.

1. $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathcal{G}_{K_n}$ へ表現を制限すると semi-stable 表現 (resp. crystalline 表現).
2. ∇_V は $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ 上の unipotent(resp. trivial) connection.

Theorem 5.3 (Berger [Be]) V を de Rham 表現, Hodge-Tate weight が負とする. この時, 次の性質を満たす $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ の部分 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-加群 $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ が一意的に存在する.

1. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ は階数 $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ の自由 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-加群.

2. $\nabla_V(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \subset t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

さらに, この $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ は φ, Γ_K で安定.

上の 2 つの定理と [A] の結果をあわせると, 次の Fontaine さんの予想が解決する.

Theorem 5.4 V を p 進表現とする. この時, 次は同値.

1. V は de Rham 表現.

2. V は potentially semi-stable 表現.

remark 上の p 進表現の結果は, l 進表現における Grothendieck の monodromy 定理「“剰余体にちょっとした条件をつけて”(あるいはétale cohomology から来る l 進表現なら剰余体に制限なしで) 任意の $l(\neq p)$ 進表現は quasi-unipotent.」の類似である.

6 記号表

$\widetilde{\mathbf{E}}^+ := \varprojlim(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \overset{x^p \leftarrow x}{\longleftarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \overset{x^p \leftarrow x}{\longleftarrow} \cdots)$, $\widetilde{\mathbf{E}} := \mathrm{Frac}\ \widetilde{\mathbf{E}}^+$
$\mathbf{E}_F := k((\varepsilon))$, $\mathbf{E} := (\mathbf{E}_F)^{\mathrm{sep}}$, $\mathbf{E}^+ := \mathbf{E} \cap \widetilde{\mathbf{E}}^+$
$\mathbf{E}_K := (\mathbf{E})^{\mathcal{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{E}}_K := (\widetilde{\mathbf{E}})^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{E}^+_K := (\mathbf{E}^+)^{\mathcal{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^+_K := (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathcal{H}_K}$
$\widetilde{\mathbf{A}} := W(\widetilde{\mathbf{E}})$, $\widetilde{\mathbf{B}} := \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ := W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ := \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$
$\pi := [\varepsilon] - 1$, $\bar{\pi} := \varepsilon - 1$
$\mathbf{A}_F := (\mathcal{O}_F[[\pi]][\frac{1}{\pi}])^\wedge$, $\mathbf{B}_F := \mathbf{A}_F[\frac{1}{p}]$
$\mathbf{B} := ({\mathbf{B}_F}^{\mathrm{nr}})^\wedge$, $\mathbf{A} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$
$\mathbf{A}_K := \mathbf{A}^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{B}_K := \mathbf{B}^{\mathcal{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K := (\widetilde{\mathbf{A}})^{\mathcal{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_K := (\widetilde{\mathbf{B}})^{\mathcal{H}_K}$
$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_r := \{x = \sum_{i \geq 0} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{A}} \mid \forall k \geq 0\ \ \inf_{i \leq k} v_{\mathbf{E}}(x_i) + \frac{pr}{p-1} \geq 0\}$
$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^-} := \{x = \sum_{i \geq 0} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_r \mid \inf_{i \leq k} v_{\mathbf{E}}(x_i) + \frac{pr}{p-1} \to +\infty\ (k \to +\infty)\}$
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r^{(-)}} := \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^{(-)}}[\frac{1}{p}]$
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} := \cup \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_r$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger} := \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$
$\mathbf{A}^{\dagger} := \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, $\mathbf{A}^{\dagger}_{r^{(-)}} := \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^{(-)}}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{r^{(-)}} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r^{(-)}}$
$\mathbf{A}^{\dagger}_K := (\mathbf{A}^{\dagger})^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_K := (\mathbf{B}^{\dagger})^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{A}^{\dagger}_{r^{(-)},K} := (\mathbf{A}^{\dagger}_{r^{(-)}})^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{r^{(-)},K} := (\mathbf{B}^{\dagger}_{r^{(-)}})^{\mathcal{H}_K}$
$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^-} = \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;+\infty]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r^-} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$,
$\mathbf{A}^{\dagger,r} := \mathbf{A}^{\dagger}_{r^-}$, $\mathbf{B}^{\dagger,r} := \mathbf{B}^{\dagger}_{r^-}$,

$\mathbf{A}_K^{\dagger,r} := \mathbf{A}_{r^-,K}^{\dagger}$, $\mathbf{B}_K^{\dagger,r} := \mathbf{B}_{r^-,K}^{\dagger}$
$\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} := \widetilde{\mathbf{A}}^+\{\frac{p}{[\bar{\pi}]^r}, \frac{[\bar{\pi}]^s}{p}\}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]} := \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}[\frac{1}{p}]$
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;\infty)}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} := \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}[\log([\bar{\pi}])]$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} := \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[\log([\bar{\pi}])]$
$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} := \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ の "ある位相" での完備化, $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} := \bigcup_r \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger} := \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}[\log(\pi)]$
$\mathbf{B}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} := \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_F^{\dagger}} \mathbf{B}^{\dagger}$, $\mathbf{B}_{\log}^{\dagger} := \mathbf{B}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[\log(\pi)]$

$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ := \varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^i$
$\omega := \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)}$
$\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}^+ := \{\sum_{n\geq 0} a_n \frac{\omega^n}{n!} \mid \widetilde{\mathbf{B}}^+ \ni a_n \to 0\}$
$\mathbf{B}_{\max}^+ := \{\sum_{n\geq 0} a_n \frac{\omega^n}{p^n} \mid \widetilde{\mathbf{B}}^+ \ni a_n \to 0\} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;(p-1)/p]}$
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ := \cap_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+) = \cap_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}^+) = \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;+\infty)}$

雰囲気:
A なんとかは離散付値環で p が素元, **B** なんとかはその商体, **E** なんとかは剰余体.
（ただし,「$\dagger, r$」や「$\dagger$, rig」がつくと **A** なんとかは離散付値環にならないし,
B なんとかは体ではなくなる.）
（「$\dagger$」なしの時は **A** なんとか, **B** なんとかはさらに p 進完備になる.）
「~」がつくものは,「~」がつかないものよりだいぶ大きい.
「$\dagger$」がつくものは,「$\dagger$」がつかないものの overconvergent な元.
「$\dagger$, rig」がつくものは,「$\dagger$」よりちょっとだけ大きい.
「K」がつくものは,「K」がつかないものの $\mathcal{H}_K$-fixed part.

参考文献

[A] André, Y. *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique* http://www.math.jussieu.fr/~preprints/

[Be] Berger, L. *Représentations p-adiques et équations différentielles* http://www.math.uiuc.edu/Algebraic-Number-Theory/0300/

[BK] Bloch, S.; Kato, K. *L-functions and Tamagawa numbers of motives* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400

[C] Colmez, P. *Theorie d'Iwasawa des representations de de Rham d'un corps local* Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 485–571

[CC1] Cherbonnier, F.; Colmez, P. *Representations p-adiques surconvergentes* Invent. Math. **133** (1998), no. 3, 581–611

[CC2] Cherbonnier, F; Colmez, P. *Theorie d'Iwasawa des representations p-adiques d'un corps local* (French) J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 1, 241–268

[Fo1] Fontaine, J.-M. *Representations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309

[Fo2] Fontaine, J.-M. *Le corps des periodes p-adiques* Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Asterisque No. **223** (1994), 59–111

[H1] Herr, L. *Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques* Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 4, 563–600

[H2] Herr, L. *Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate* Math. Ann. **320** (2001), 307–337

[H3] Herr, L. Φ-Γ-*modules and Galois cohomology* Invitation to higher local fields (Munster, 1999), 263–272 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000

[Wi] Wintenberger, J.-P. *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 1, 59–89