

カラビ-ヤウ多様体のある族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて—

原 隆 (HARA Takashi)[†]

2009 年 5 月 11 日

概要

[HSBT] に従って, GSp_n ガロワ表現に対する潜在的モジュラー性定理とその証明に用いられるカラビ-ヤウ超曲面族を用いた (ℓ, ℓ') トリックについて概観する. また, その応用として楕円曲線の佐藤-テイト予想が弱い仮定の下で証明されることを解説する.

† † †

この文章は 2008 年 3 月に行われた『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』での安田正大氏の講演 “Proof of Sato-Tate conjecture after Taylor et al.” に基づき, マイケル・ハリス (Michael HARRIS), ニック・シェパード-バロン (Nick SHEPHERD-BARRON) 及び リチャード・テイラー (Richard TAYLOR) による共著のブレ・プリント

“A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy” ([HSBT] と表す)

の解説を試みたものである.

1994 年, アンドリュー・ワイルズ (Andrew WILES) に依る フェルマー予想 (FERMAT’s conjecture) の解決が全世界に衝撃を与え, 数論の新時代の到来を高らかに告げたことは未だ記憶に新しいが, その興奮も醒め已らぬ中, 佐藤-テイト予想 (SATO-TATE conjecture) というこれまた非常に有名かつ困難極まりない予想が (弱い仮定の下で) 解決されたという衝撃的なアナウンスがテイラー達の研究チームによってもたらされたのは, つい 3 年前 (2006 年) のことであった^{*1}. フェルマー予想の解決のためにワイルズに依って齎された「 $R = \mathbb{T}$ 」なる手法が, ほんの十数年の後に 佐藤-テイト予想 や セール予想 (SERRE’s conjecture) と言った大予想達を次から次にばっさばっさと薙ぎ倒してゆく様を遠目に眺めているだけでも, この「 $R = \mathbb{T}$ 」という手法が数論幾何学の世界に “革命” をもたらしたことはもはや疑いようが無い

[†] 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)
日本学術振興会特別研究員 (DC2) E-mail: thara@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*1} 本稿執筆当時.

と実感させられよう.

[HSBT] 及びテイラーの論文 [Taylor4] は, そんな数論幾何学の動乱期を象徴する事件の筆頭である「佐藤-テイト予想の (弱い仮定の下での) 証明」がなされた記念碑的な論文である*². この歴史的にも数学的にも非常に重要な論文の解説記事を, 漸く修士論文を書き上げたばかりでしかも「 $R = \mathbb{T}$ 」については全くの門外漢であるといつて良い様な若造に任せようという事自体あまりにも無謀極まりない“冒険”に違いないと思うのだが, 一方でそんな門外漢が苦勞して論文を読み, 自分なりに解説した上で著した解説記事の方が親しみやすいと思われる方々も少しはいらっしゃるかもしれないと前向きに捉え直すこととし, 気を引き締めて本報告書の執筆に臨むこととした.

本論に入る前に一般的な注意をしておこう. [HSBT] の最終目標は, 先にも述べた通り佐藤-テイト予想の (弱い仮定の下での) “解決”である (定理 4.3) が, その証明の全てをカバーしているわけではない. 特に, 今回の勉強会のテーマでもある「 $R = \mathbb{T}$ 」の手法及びその副産物として得られる モジュラー性持ち上げ定理 (*Modularity Lifting Theorem, MLT*) は, 当然のことながら佐藤-テイト予想の証明に於いてもその威力を如何なく発揮しているが, この「 $R = \mathbb{T}$ 」絡みの議論は ローラン・クロゼル (Laurent CLOZEL), ハリス 並びに テイラーに依って別の論文で展開されている ([CHT], [Taylor4] 参照). したがって, [HSBT] の解説を目的とする本稿の性格上佐藤-テイト予想の証明の (「 $R = \mathbb{T}$ 」の議論を含む) 全てを扱うことは出来ないので, 佐藤-テイト予想の証明についての完全網羅的な解説記事をご所望の方々の期待には残念ながら答えられないことを予めお断りしておく. 本稿では扱うことの出来ない「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の議論 ([CHT], [Taylor4] 参照) に関しては本報告集で安田正大氏と千田雅隆氏が非常に優れた解説記事 [安田・千田] を書いて下さっているので, 佐藤-テイト予想の証明を余すところなくじっくり味わいたい方は本稿と併せて是非ご覧頂きたい.

本稿で取り扱うのは, 佐藤-テイト予想の証明に於けるもう一つの主要な定理である 潜在的モジュラー性定理 (*Potential Modularity Theorem, PMT*) 及びその証明のために用いられる (ℓ, ℓ') トリックの議論である. (ℓ, ℓ') トリックとは, 非常に大雑把な言い方をすれば

モジュラー性が既知である (非常に限られた) 法 ℓ' 表現から, モジュラー性持ち上げ定理に依って得られる ℓ' 進ガロワ表現のモジュラー性を 他のガロワ表現に “感染” させることで, 最終的に考えている ℓ 進表現の (潜在的) モジュラー性を示そう

という類の議論であり, ワイルズがフェルマー予想の証明 (谷山-志村予想の部分的解決) の際に用いた $(3, 5)$ トリック の変奏である (山下剛氏の稿 [山下 1] 参照. なお, § 1.1 の後半部も参照されたい). テイラーは先ず [Taylor2], [Taylor3] で GL_2 表現の場合に, この種の議論

*² 数学誌の最高峰たる アナルズ・オブ・マスマティクス (*Annals of Mathematics*) への掲載が決定しているようであるが, 本稿執筆段階では未だプレ・プリントの段階であった.

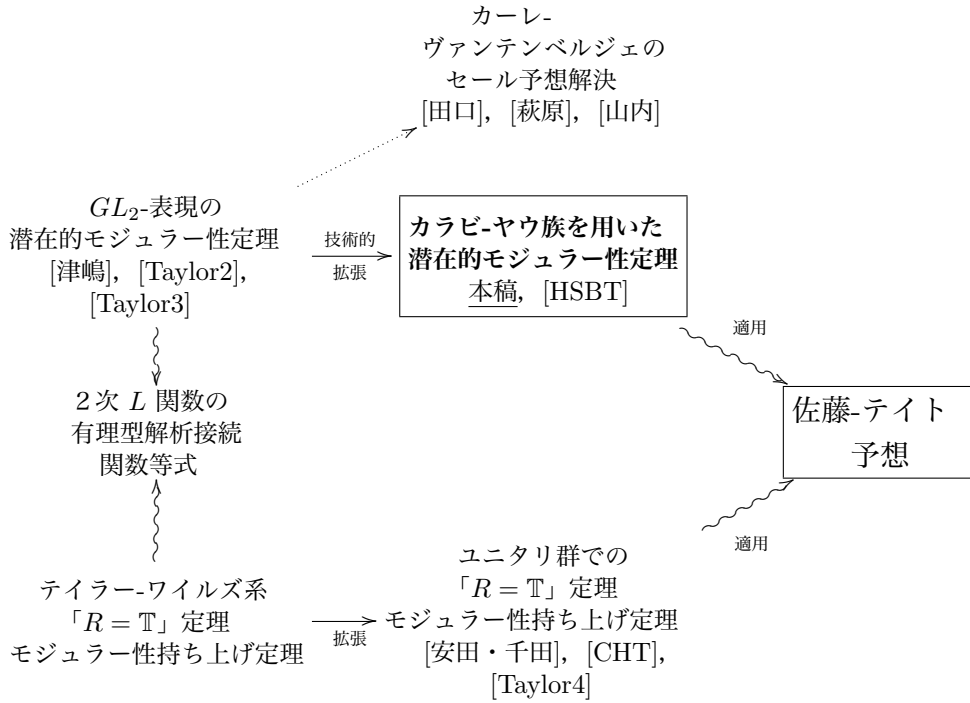


図1 佐藤-テイト予想の解決に至るまでの「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の研究の位置づけ

を展開することによって潜在的モジュラー性定理を証明し、その直接の応用として次数 2 の L 関数の有理型解析接続性などを示した。佐藤-テイト予想の証明に於いても或る種の L 関数に対する解析接続性や零点の分布を調べることが必要となってくるため (詳細は §0.3 参照), 2 次 L 関数の解析的性質を調べる際に強力な武器となった潜在的モジュラー性定理が今回もその威力を如何なく発揮してくれるに違いないと期待してしまうのは無理からぬ話である。しかしながら 佐藤-テイト 予想で登場する L 関数はより高次のものであるため, [Taylor2], [Taylor3] で得られた潜在的モジュラー性定理を より高次の表現に拡張する 必要があった。

[HSBT] は上記のような要請に答える形で, GSp_n 表現という高次のガロワ表現に対する潜在的モジュラー性定理を証明したプレ・プリントであり, その系として佐藤-テイト予想を (弱い仮定のもとに) 導いている。[Taylor2], [Taylor3] で扱われた GL_2 表現の場合の潜在的モジュラー性定理及びその証明法については, 津嶋貴弘氏が本報告集に於いて丁寧に解説して下さっている [津嶋] ので, 適宜参照していただきたい。なお, 本稿でも GL_2 表現の場合との論法の違いについては簡単に触れるつもりである (§2.1 参照)。

ここ 10 数年の「 $R = \mathbb{T}$ 」にまつわる研究の発展は非常に目覚ましいものがある。そんな最

先端の数論幾何学の奔流の中で [HSBT] というプレ・プリントがどのような立場に位置づけらるべきかを明確にするために、図 1 に「 $R = \mathbb{T}$ 」の発展の流れ及び本報告集の記事との関係を図示した。この図からもお分かりいただけると思うが、本稿は技術的な側面 (即ち (ℓ, ℓ') トリックの改良の歴史) から見れば、津嶋氏の稿 [津嶋] の直接的な続編として考えていただいて差し支えないであろう。一方で、佐藤-テイト予想の解決を一つの〈歴史的変遷〉として捉えるならば、本稿で語られる内容は安田氏・千田氏の稿 [安田・千田] で語られる内容と互いに補完し合って一つの壮大な物語を紡ぎ出しているとも言える。

それでは以下、本稿の内容について簡単に説明しておこう。§0 ではイントロダクションとして、佐藤-テイト予想のステイトメント及びテイト、セールのオプザベーションについて纏めた。§1 から §4 が [HSBT] の解説に当たる部分である。読者の便宜を考慮し、各節のタイトル及び定理番号等はなるべく原論文と揃えるように努めた。原論文 [HSBT] はテイラー教授のホームページ^{*3} から入手できるので、原論文と照らし合わせながら読んでいただくと感覚が掴みやすいのではないかと期待している。詳しい内容は本文に譲るが、各節の内容は概ね以下の通りである。§1 ではカラビ-ヤウ多様体 (CALABI-YAU varieties) のある特別な族に関する代数幾何学を展開する。特に特異点でのモノドロミーの様子を詳しく観察する。§2 では所謂 (ℓ, ℓ') トリック (ℓ, ℓ') -trick を実行するために用いられるモレ-バイイーの定理 (MORET-BAILLY's theorem) を拡張したものを導入し、これを如何にして (ℓ, ℓ') トリックに応用するかを概観する。§3 が [HSBT] のハイライトであり、§1 で考察したカラビ-ヤウ多様体の族の、局所系 $\{V[N]_t\}_t$ に於けるレベル構造を指定した底空間の点の“モジュライ空間”に §2 で導入したモレ-バイイーの定理の変形版を適用することに依って、 (ℓ, ℓ') トリックを実行し、潜在的モジュラー性定理を証明する。§4 では、潜在的モジュラー性定理を楕円曲線の対称積 L 関数に適用することに依って、その有理型解析接続性及び零点の分布を考察する。この結果とテイト-セールのオプザベーションを組み合わせることで、佐藤-テイト予想は自然に導かれる。付録として、カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ から得られるモチーフ V_ℓ に付随する L 関数の解析接続性及び関数等式に関する結果及び、[HSBT] の初期の稿に掲載されていた潜在的モジュラー性定理の証明について簡単に纏めた。

潜在的モジュラー性定理 (及び (ℓ, ℓ') トリック) 自体は、大雑把なイメージだけなら誰でも容易に掴むことの出来る、非常に楽しい議論である (と個人的には思うのだが)。一方で、これを精密に証明しようとするとは複雑な条件達や技術的な困難が幾層にも折り重なり、幾分難解になる (それでも [HSBT] の最新版では大分簡略化された)。この解説記事ではそういった技術的な面についてもある程度コメントすることが求められてはいるのだろうが、そうは言っても細々とした技術的注意を全てカバーしようとなると、著者の能力の範疇では本稿を単なる原論文の和訳 (或いはそれ以下のもの) へと貶めてしまう危険性が非常に高いと判断した。そこで

^{*3} <http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/>

本稿では、各節の前半でその節で議論されている内容をあまり数学的厳密性に拘らずに“直観的”かつ“大雑把”に纏め、後半で定理の正確なステイトメント及び技術的注意点、証明の概略についてコメントすることにした。議論の概観のみに興味のある方は、各節の最初の小節だけを拾い読みしていただくだけでも、おおよその雰囲気くらいは感じ取っていただけるのではないかと期待する。

また、主要テーマたる潜在的モジュラー性定理及び (ℓ, ℓ') トリックには直接関係しないが興味深いと思われる（或いは単に著者が個人的に面白いと思った）事柄については「雑談」として纏めることとした。書き直しを進めていくうちに「雑談」の部分が大幅に膨れ上がってしまったので、潜在的モジュラー性定理及びその証明に一刻も早く辿り着きたい方は「雑談」の部分は読み飛ばしていただいて全く差し支えない（寧ろその方が良いかもしれない）。

幸いにして、2007年の年始に東京工業大学に於いて開催された『佐藤-テイト予想研究集会』の講演内容を纏めたものとして、雑誌「数学のたのしみ」シリーズから『佐藤-テイト予想の解決と展望』が出版された^{*4}（[たのしみ]^{*5} 参照）。その中で潜在的モジュラー性に関しても、吉田輝義氏が非常に卓越した解説記事を執筆されている。本稿では、[たのしみ]のように直観的イメージを大事にしつつ、[たのしみ]よりも細かい部分（証明の細部など）に関してもなるべく丁寧に記述するように試みた。初学者は細かい点に気を取られることなく数論幾何学最先端の研究の雰囲気を存分に味わうことが出来、一方でこの分野に関心のある方は証明の際の技術的なテクニックなど細かい点までじっくり堪能できるような、言うなれば「痒いところに手が届く」解説記事を目指して書いたつもりである。そうは言っても筆者の理解もまだまだ未熟故、本稿がその目論見をどの程度実現できているか甚だ心許ないが、その点についてはこの記事を読んだ皆様の反応を待つ以外にあるまい。

当初この報告書の執筆依頼を受けた際は、[HSBT]のあまりに緻密かつ複雑な論理展開に正直なところ何度も根を上げそうになった。しかしながらそれでいて (ℓ, ℓ') トリックの何とも言えぬ奥深い味わいには不思議と惹き付けられ続けていたのもまた疑いようの無い事実である。難解な言葉達で常に読者を幻惑しつつ、その不思議な魅力で惹き付けて已まぬその世界観はまるでルイス・キャロルの『不思議の国のアリス』[Carol]のようですらある。さながら『佐藤-テイト予想』という〈白ウサギ〉を追いかけて行ったら、『潜在的モジュラー性定理』という〈不思議の国〉の魅力に迷い込んでしまった、と言ったところであろうか。

本稿の唯一にして最大の目的はこの (ℓ, ℓ') トリックの織り成す〈不思議の国〉の魅力を一人でも多くの方と共有することであり、筆者としてはその目的のみを原動力として執筆作業を乗り越えたと言っても過言ではない。本稿を通じて、少しでも多くの方が潜在的モジュラー性

^{*4} 日本数学会 2009 年度年会で、伊藤哲史氏に依り佐藤-テイト予想の解決に関する非常に卓越した企画特別講演がなされたことも付記しておこう。

^{*5} 良質な数学的話題を長年に渡って提供し続けて下さった「数学のたのしみ」シリーズが本号を持ってその歴史に一旦幕を下ろされたことは、一読者として非常に残念である。長い間ありがとうございました。

の紡ぎ出す〈不思議の国〉の前でふと足を止め、多少なりとも「“迷い込んで” みても良いかな？」と提供していただけただけならば、この拙い記事もその役目を全うしたこととなろう (本当に路頭に迷われてしまっても困るが)。

大分前口上が長くなってしまった。さあ、そろそろ潜在的モジュラー性の〈不思議の国〉へ旅立とう。

目次

0	イントロダクション —— 佐藤-テイト予想について	7
0.1	佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想	7
0.2	楕円曲線の L 関数 と テイト-セールのオブザベーション	9
0.3	証明の方針	17
1	超曲面のある族 —— <i>A family of hypersurfaces</i>	18
1.1	カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ と (ℓ, ℓ') トリック	19
1.2	カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ のモノドロミー解析	23
1.3	ガロワ表現 $V_{\ell, t}$ の諸性質	30
2	代数的整数論を少々 —— <i>Some algebraic number theory</i>	31
2.1	モレ-バイイー の定理と潜在的モジュラー性	31
2.2	モレ-バイイーの定理の変形版 と モジュライ空間の幾何学的連結性	40
3	潜在的モジュラー性 —— <i>Potential modularity</i>	43
3.1	RAESDC 表現と付随するガロワ整合系	43
3.2	$GS p_n$ 表現の潜在的モジュラー性定理	46
3.3	対称積表現の潜在的モジュラー性	54
4	種々の応用 —— <i>Applications</i>	59
4.1	総実体上のアーベル多様体の対称積 L 関数	60
4.2	佐藤-テイト 予想の証明	61
	結びにかえて	68
	参考文献	70
	付録 A V_t の L 関数の関数等式について	73
	付録 B 潜在的モジュラー性定理の証明 (初期型)	74

0 イン트로ダクション — 佐藤-テイト予想について

佐藤-テイト予想とは、非常に大雑把な言い方をすれば L 関数の零点の虚部の分布 について述べた極めて神秘的な予想である。この予想はテイト及びセールのオブザベーションに依り、無限個の高次 L 関数の解析接続性及び零点の配置の問題に帰着される。本節では、[HSBT] の難解な (それでいて魅力的な) 世界に “迷い込む前” のウォーミング・アップとして、この辺りの “佐藤-テイト予想の誕生と変遷の物語” を紐解いていくこととしよう。

佐藤-テイト予想を巡る物語はいくら掘り下げても飽くことがないが、本稿の目標はあくまでも「佐藤-テイト予想の証明の方針を概観すること」であるので、断腸の思いではあるがこの節は簡潔に纏めざるを得ない。佐藤-テイト予想の歴史的背景などより深いことを知りたい方は、例えば [たのしみ] の黒川信重先生の記事などをご覧になって下さい。

0.1 佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想

それでは早速楕円曲線の 佐藤-テイト 予想を定式化しよう。細かい条件設定の仕方には色々なヴァリエーションがあり得るが、ここでは本勉強会に於ける安田正大氏の講演でなされた定式化に従うこととする。

F を代数体とし、 E/F を F 上定義された楕円曲線とする。 F の有限素点 v に対して、その剰余体 $\kappa(v)$ の位数を q_v とする。さらに、良い還元を持つ有限素点 v に対し、楕円曲線 E の v での還元を E_v と書く。

さて、良い還元を持つ有限素点 v に対して、ハッセ (HASSE) の定理から E_v の $\kappa(v)$ -有理点の集合 $E_v(\kappa(v))$ の位数と $1 + q_v$ との “誤差項” $a_v = 1 + q_v - \#(E_v(\kappa(v)))$ は不等式 $|a_v| < 2\sqrt{q_v}$ を満たす。したがって、ある実数 θ_v に依って誤差項 a_v は

$$a_v = 2\sqrt{q_v} \cos \theta_v$$

と書き表される。楕円曲線 E の L 関数を $L(s, E)$ とするとき、良い還元を持つ素点 v での局所因子は

$$\begin{aligned} L_v(s, E) &= (1 - a_v q_v^{-s} + q_v^{1-2s})^{-1} \\ &= \{(1 - e^{\sqrt{-1}\theta_v} q_v^{1/2-s})(1 - e^{-\sqrt{-1}\theta_v} q_v^{1/2-s})\}^{-1} \end{aligned}$$

となる*6。佐藤-テイト予想とは、この実数 $\{\theta_v\}_v$ が如何に分布するかについての予想であり、端的に言えば “誤差項” a_v が如何に分布しているかを予言するものである。

*6 θ_v の範囲を $[0, \pi]$ の間などに指定して θ_v の不定性をなくしてしまうこともよく行われるが、取り敢えずそのような制限は設けないこととする。

予想 0.1 (楕円曲線の佐藤-テイト予想). E/F を代数体 F 上の虚数乗法を持たない楕円曲線とする. また, a, b を $0 < b - a < 2\pi$ なる実数とする. さらに, F の良い還元を持つ有限素点 v に対し, 上記のようにして実数 θ_v を構成しておく. このとき, 以下が成立する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, \theta_v \in [a, b]\} + \#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, -\theta_v \in [a, b]\}}{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n\}} = \int_a^b \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad (0.1)$$

(但し, θ_v は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ で考える).

◇

注意 1. E が虚数乗法を持つ場合は, θ_v の分布はこのようにはならない*7.

◆

雑談 2. 元々佐藤幹夫は, 保型形式の q 展開に於けるフーリエ係数を極形式表示した時の偏角の分布を研究してゆく中で, 膨大な計算結果に基づいてその分布が $\sin^2$ 関数に従うことを数値的に予想したのであった (例えば ラマヌジャン数 (RAMANUJAN number) $\tau(p)$ の偏角の分布についても同様の予想がある. この予想は未だに未解決).

一方でテイトは, 重さ 2 の保型形式の場合には対応する楕円曲線を考えることで幾何学的な考察が可能となることに着目した (例えば E が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合には, E は 谷山-志村予想の解決に依ってモジュラーであることが知られているから, 上記の誤差項 a_p は対応する保型形式 f_E の q 展開 $f_E = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ のフーリエ係数 c_p と対応する). この様な視点からテイトは, 楕円曲線の場合には ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数という幾何学的な ゼータ 関数の解析的性質を調べることに依って佐藤幹夫の予想した $\sin^2$ 型の分布に“理論的な”根拠を与えることが出来ることを見出し, 佐藤幹夫の予想を解決するための指針を示したのである (詳しくは §0.2.1 参照).

以上のような背景から, 楕円曲線に関する予想の場合に限って「佐藤-テイト予想」と呼び, 保型形式のフーリエ級数の分布に関する予想は単に「佐藤予想」と呼ぶことが慣例となっているようである ([たのしみ] の黒川先生の記事も参照のこと). なお, 分布の形が特徴的であるため「佐藤の $\sin^2 \theta$ 予想」「佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想」等と呼ばれることもある*8.

◆

[HSBT] では,

(仮定 1) F は総実代数体である.

(仮定 2) E の j -不変量が整数でない.

*7 この場合は虚数乗法論により分布が決定されている.

*8 伊藤哲史氏の講演活動等に依り, 巷であまりにも有名となってしまった話題なので著者としても一言コメントせざるを得ないが, $\sin^2 \theta$ 関数と銅鐸及び三上山等の形が奇妙なほどに通っていることから, 弥生人と佐藤-テイト予想の関係についても興味深い考察 (想像?) がなされていたりもしている. ただ, この話題に深入りすると人類の根源まで遡る壮大な物語を辿らねばならない危険性が非常に高いので, 残念ながらこの辺りで幕引きとさせていただきます.

という仮定の下で 佐藤-テイト予想が示されている. このうち, (仮定 2) は完全に技術的な仮定であり, 近い将来のうちに除かれるのではないかと期待されている (後に詳しく述べよう). したがって, テイラー達の不断努力の結果, 現時点で既になかなり一般的な状況の下で楕円曲線の佐藤-テイト予想は解決された, と言って差し支えなからう.

0.2 楕円曲線の L 関数 と テイト-セールのオブザベーション

佐藤幹夫は膨大な量の計算データから θ_v の分布が $\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta$ に従うことを数値的に予想した. この予想に対する“理論的な根拠”を考え出したのが ジョン・テイト (John TATE) である (さらに精密化したのがセール). 以下, 彼等が行ったオブザベーションを振り返ってみよう.

0.2.1 ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数 と テイトのオブザベーション

ジョン・テイトは, 彼が提出した ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数 (HASSE-WEIL zeta function) に関する所謂 テイト予想 (TATE conjecture) に基づいて, 佐藤幹夫が既に数値的に提出していた $\sin^2 \theta$ 予想に対する“理論的な”根拠を与えた. 以下, その オブザベーション を [Tat1] に従って概観しよう.

X を代数体 F 上の d 次元非特異射影代数多様体とし, v を良い還元を持つ素点とする (即ち, v での還元 X_v が再び代数多様体であるとする). v の剰余体 $\kappa(v)$ の位数を q_v とおく.

このとき, X_v の 合同ゼータ関数 (congruent zeta function) を

$$Z(X_v, T) = \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\#X_v(\mathbb{F}_{q_v^m})}{m} T^m \right)$$

で定義し, X のハッセ-ヴェイユ ゼータ関数を

$$\zeta_X(s) = \prod_v Z(X_v, T)|_{T=q_v^{-s}}$$

と定義する (但し, $X_v(\mathbb{F}_{q_v^m})$ は代数多様体 X_v の $\mathbb{F}_{q_v^m}$ -有理点全体のなす集合).

このとき エタール・コホモロジー 理論 (étale cohomology theory) に依り, 合同ゼータ関数は

$$Z(X_v, T) = \prod_{i=0}^{2d} P_i(X_v, T)^{(-1)^{i-1}}$$

と表される. 但し, Frob_v を v に対する幾何学的フロベニウス元とする時,

$$P_i(X_v, T) = \det(\text{id} - \text{Frob}_v T \mid H_{\text{ét}}^i(X_v \times_{\text{Spec } \kappa(v)} \text{Spec } \overline{\kappa(v)}, \mathbb{Q}_\ell))$$

である (ヴェイユ 予想 (WEIL conjecture) の一部, レフシェッツ 不動点定理 (LEFSCHETZ fixed point theorem) の直接の帰結). したがって,

$$\Phi_i(X, s) = \prod_v P_i(X_v, T)|_{T=q^{-s}}^{-1}$$

とおくことで ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数を

$$\zeta_X(s) = \prod_{i=0}^{2d} \Phi_i(X, s)^{(-1)^i}$$

と分解することが出来る. ここで, テイト は $\Phi_i(X, s)$ の極について次の予想を提出した.

予想 0.2 (テイト予想). $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } F} \text{Spec } \bar{F}$ の余次元 i の代数的サイクルのなす自由アーベル群 $Z^i(\bar{X})$ を, コホモロジー同値関係に依って割った剰余群を $\mathfrak{A}^i(\bar{X})$ とする. また, F 上定義される代数的サイクルに依って生成される $\mathfrak{A}^i(\bar{X})$ の部分アーベル群を $\mathfrak{A}^i(X)$ とおく. このとき, $\mathfrak{A}^i(X)$ の階数は $\Phi_{2i}(X, s)$ の $s = 1 + i$ に於ける極の位数と等しい. $\diamond$

以上の考察を踏まえて, 楕円曲線 E/F の m 階直積 E^m に付随する ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数の Φ_i 因子を考えよう. 楕円曲線 E に於いては,

$$\begin{aligned} P_0(E_v, T) &= 1 - T \\ P_1(E_v, T) &= (1 - q_v^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1}\theta_v} T)(1 - q_v^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1}\theta_v} T) \quad (0 \leq \theta_v \leq \pi) \\ P_2(E_v, T) &= 1 - q_v T \end{aligned}$$

と計算されることはよく知られているので, キュネット の公式 (KÜNNETH formula) を用いて $P_i(E_v^m, T)$ を計算し, 適当に整理することで各 Φ_i 因子は

$$\Phi_i(E^m, s) = \prod_{0 \leq \nu \leq [i/2]} \left(L_{i-2\nu} \left(s - \frac{i}{2} \right) \right)^{\binom{m}{\nu} \binom{m}{i-\nu}} \quad (0 \leq i \leq 2m) \quad (0.2)$$

と計算できる. 但し, $[x]$ は $x \in \mathbb{R}$ を超えない最大の整数, $\binom{k}{\ell}$ は二項係数 ($\ell < 0, \ell > k$ の時は 0 とする) を表し, $L_\mu(s)$ は

$$L_\mu(s) = \begin{cases} \prod_v (1 - q_v^{-s})^{-1} & \mu = 0 \text{ のとき,} \\ \prod_v \{ (1 - e^{\sqrt{-1}\nu\theta_v} q_v^{-s})(1 - e^{-\sqrt{-1}\nu\theta_v} q_v^{-s}) \}^{-1} & \nu \geq 1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

とする. さて, E が虚数乗法を持たないことから, $\mathfrak{A}^i(E^m)$ の階数は

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}^i(E^m) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}^i(\bar{E}^m) = \binom{m}{i}^2 - \binom{m}{i-1} \binom{m}{i+1}$$

と計算されるので、テイト予想 (予想 0.2) を仮定すると $\Phi_{2i}(E^m, s)$ の $s = 1 + i$ での極の位数は $\binom{m}{i}^2 - \binom{m}{i-1}\binom{m}{i+1}$ 。したがって、各 $L_\mu(s)$ の $s = 1$ での極の位数を c_μ とすると、(0.2) と合わせて

$$c_0 = 1, c_2 = -1, c_{2\mu} = 0 \quad \text{for } \mu \geq 2$$

が導かれる。

ここでテイトは「形式的に」 θ_v の密度関数 $f(\theta)$ 、即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, \theta_v \in [a, b]\} + \#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, -\theta_v \in [a, b]\}}{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n\}} = \int_a^b f(\theta) d\theta$$

を満たす $f(\theta)$ が上記の c_μ 達を用いて

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \cos \mu\theta$$

というフーリエ級数展開で与えられる筈であると考え^{*9}、さらに $f(\theta)$ が対称関係式 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ を満たす (即ち任意の μ に対して $c_{2\mu-1} = 0$) と仮定することで、密度関数 $f(\theta)$ が

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos 2\theta) = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta$$

で与えられることを導いている。

テイトは $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ という (勝手に付け加えた) 仮定について「何ら正当性はない (had no justification)」と述べているが、彼の叙述を逆手に取れば、この一見不可思議な仮定 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ に解析的な正当性を与えさえすれば、佐藤の $\sin^2 \theta$ 予想は解決されることになってしまうのである。 c_μ の定義を思い出すと、仮定 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ は全ての奇数 $2\mu - 1$ に対し、 $\Phi_{2\mu-1}(E^m, s)$ が $s = 1 + i$ で零点も極も持たないことを表しているのに他ならない。斯くして、テイトの考察は $\Phi_{2\mu-1}(E^m, s)$ のような無限個の L 関数達の解析的性質を調べることに依って、 $\sin^2 \theta$ 予想を解決しようという方針を指し示したのである。

0.2.2 素数定理 と セールの条件

テイトのオブザベーションに依って「無限個の L 関数の解析的性質を調べる」という $\sin^2 \theta$ 予想解決へのアプローチが朧げながら見えてきたが、彼のオブザベーションは代数的サイクルと L 関数の極の位数に関するこれまた非常に深い予想 (予想 0.2) の帰結を利用

^{*9} これは発見的な (heuristic) 考察であり、この様にフーリエ級数表示出来ると言う解析的な裏付けは確かめていないとテイトは述べている。詳しくは [Tate1] 参照。

しており、決して容易に扱えるようなものではなかった。これを「楕円曲線の対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^m)$ 」という別の“扱い易い” L 関数で考察し直したのが ジャン-ピエール・セル (Jean-Pierre SERRE) である。しかも彼の考察は、ジャック・サロモン・アダマル (Jacques Salomon HADAMARD) 及び シャルル-ジャン・ド・ラ・ヴァレ-プーサン (Charles-Jean DE LA VALLÉE-POUSSIN) に依る 素数定理の証明 を直接拡張した非常に見通しの良いものであった。ここでは先ず アダマル、ド・ラ・ヴァレ-プーサン等に依る素数定理の証明を振り返った後、セルに依る佐藤-テイト予想へのアプローチを概観してみよう。

さて、彼の有名な 素数定理 (*prime number theorem*)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \#\{p: \text{素数} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

は リーマン ゼータ関数 (RIEMANN zeta function) $\zeta(s)$ の解析的性質、即ち

($\sharp$) $\zeta(s)$ は $\text{Re}(s) \geq 1$ の範囲で唯一の一位の極 $s = 1$ を除いて正則に解析接続され、零点を持たない*10

から導かれるのであった。

証明の概略. リーマン ゼータ関数 $\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$ の対数微分 (*logarithmic differential*)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log \zeta(s) &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p: \text{素数}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_{p: \text{素数}} p^{-s} \log p \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-s})^k \\ &\quad \left(\text{ここで, } \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots \quad \text{for } |x| < 1 \text{ を用いた.} \right) \\ &= - \sum_{p, k \geq 1} \frac{\log p}{p^{ks}} \end{aligned}$$

の主要部 ($k = 1$ の部分) に現れる ディリクレ級数 (DIRICHLET series)

$$G(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

を考える。初等的な解析に依り、残りの部分 $\sum_{p, k \geq 2} \frac{\log p}{p^{ks}}$ は $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ の範囲で絶対収束し、特に $\text{Re}(s) \geq 1$ で正則関数 $\phi(s)$ を定める。つまり

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -G(s) - \phi(s) \tag{0.3}$$

*10 勿論実際には複素平面全体に有理型に解析接続される。

と書ける. しかも $\zeta(s)$ の解析的性質 (ii) 依り, その対数微分 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ も $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除いて正則かつ零点を持たないことが分かる. さらに $\zeta'(s)/\zeta(s)$ は $s = 1$ で一位の極を持ち, その留数は -1 ($s = 1$ での $\zeta(s)$ の位数) である. したがって (0.3) と併せて, $G(s)$ は $s = 1$ で一位の極を持ち, その留数が 1 となることが分かる.

ここで, 所謂 タウバー型定理 (TAUBERIAN theorem) と呼ばれる解析学の定理を用いるのが証明のポイントである. タウバー型定理とは, 大雑把に言えばディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ の $s = 1$ での解析的性質から, その分子の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の漸近的な値を評価するものである. 今回は ノーバート・ウィーナー (Norbert WIENER), 池原 止戈夫 等に依って示された以下の定理を用いる.

定理 0.3 (ウィーナー-池原のタウバー型定理). $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ を複素係数のディリクレ級数とする. $F(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除き正則に解析接続され, $s = 1$ では高々一位の極を持つとする. さらに, 以下の性質を満たす正の実数を係数とするディリクレ級数 $F^+(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^+}{n^s}$ が存在するとしよう:

- i) $|a_n| \leq a_n^+$.
- ii) $F^+(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で (絶対) 収束.
- iii) $F^+(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除き正則に解析接続され, $s = 1$ では丁度一位の極を持つとする. さらに, $s = 1$ での留数が正であるとする.

このとき,

$$\sum_{m \leq n} a_m = (\operatorname{Res}_{s=1} F(s)) n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. 但し, $\operatorname{Res}_{s=1} F(s)$ は $F(s)$ の $s = 1$ での留数を表す ($F(s)$ が $s = 1$ で正則の場合は $\operatorname{Res}_{s=1} F(s) = 0$ とする). ◇

この定理 0.3 を $F = F^+ = G$ にしよう. すると, $\operatorname{Res}_{s=1} G(s) = 1$ 故

$$\sum_{p \leq n: \text{素数}} \log p = n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるから, アーベルの総和トリック (ABEL's summation trick, 後述の 雑談 3 参照) に依り

$$\sum_{p \leq n: \text{素数}} 1 = \#\{p: \text{素数} \mid p \leq n\} = \frac{n}{\log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が導かれる. □

さて, テイトが考察した楕円曲線の直積 E^m に対する ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数の Φ_i -因子 $\Phi_i(E^m, s)$ の代わりにセールが用いたのは, 楕円曲線の 対称積 L 関数

$L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ ($m \geq 2$) と呼ばれる m 次の L 関数達であった. この $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ という L 関数は, 良い還元を持つ有限素点に於いてその局所因子が

$$L_v(s, E, \text{Symm}^{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (1 - e^{\sqrt{-1}k\theta_v} e^{\sqrt{-1}(m-1-k)\theta_v} q_v^{\frac{m-1}{2}-s})^{-1}$$

で与えられ, $\text{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ で絶対収束し, その範囲で正則となる. セールは $m \geq 2$ の範囲で全ての対称積 L 関数がリーマンゼータ関数の性質 (‡) と同様の「良い解析的性質」を満たすならば, 佐藤-テイト予想が導かれるということを示したのであった. 厳密には以下の通りである.

命題 0.4 (セールの条件). E/F を代数体 F 上の虚数乗法を持たない楕円曲線とする. 条件

(*)_m E の m 次対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ が $\text{Re}(s) \geq \frac{m+1}{2}$ の範囲に正則に解析接続され, この範囲で零点を持たない

が全ての 2 以上の自然数 m に対して成立するならば, E に対して佐藤-テイト予想 (予想 0.1) が成立する. ◇

計算の都合上, 以下の L 関数

$$L_{m-1}(s, E) = \prod_{v: \text{良い有限素点}} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{1 - e^{\sqrt{-1}(m-1-2j)\theta_v} q_v^{-s}}$$

を導入しよう. このとき, (悪い還元を持つ素点及び無限素点での局所因子の項を除けば) $L(s + \frac{m-1}{2}, E, \text{Symm}^{m-1}) = L_{m-1}(s, E)$ となるのが容易に分かるので, 条件 (*)_m が全ての $m \geq 2$ で成立することと

(*)'_m L 関数 $L_{m-1}(s, E)$ が $\text{Re}(s) \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され, この範囲で零点を持たない

が全ての $m \geq 2$ に対して成立することは同値である.

証明. $[0, 2\pi]$ に含まれる閉区間 $[a, b]$ の特性関数 $\chi_{[a, b]}$ を用いることに依って, (0.1) の左辺に現れる分数の分子は

$$\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a, b]}(\theta_v) + \chi_{[a, b]}(-\theta_v))$$

と表せる^{*11}. ここで, $\chi_{[a, b]}(x)$ を周期 2π の周期関数と見做して, そのフーリエ級数展開

^{*11} 記号を乱用して, 添字の $q_v \leq n$ は「 v が良い還元を持つ素点であって なおかつ $q_v \leq n$ 」を表すものとする.

(FOURIER expansion) を

$$\chi_{[a,b]}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{\sqrt{-1}mx}$$

とおこう. このとき, フーリエ係数 c_m は良く知られているように $\{e^{\sqrt{-1}mx}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ の正規直交性を用いて

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{(0,2\pi)} e^{-\sqrt{-1}mx} \chi_{[a,b]}(x) dx = \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi} & m=0 \text{ のとき,} \\ \frac{e^{-\sqrt{-1}mb} - e^{-\sqrt{-1}ma}}{-2\pi\sqrt{-1}m} & \text{それ以外,} \end{cases}$$

と計算される. 一方, 直接計算に依り

$$\begin{aligned} \chi_{[a,b]}(x) + \chi_{[a,b]}(-x) &= 2c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + c_{-m})(e^{\sqrt{-1}mx} + e^{-\sqrt{-1}mx}) \\ &= 2c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + c_{-m})(S_m(x) - S_{m-2}(x)) \end{aligned}$$

が導かれる. 但し $S_m(x)$ は

$$S_m(x) = \begin{cases} 0 & m = -1 \text{ のとき,} \\ 1 & m = 0 \text{ のとき,} \\ e^{\sqrt{-1}mx} + e^{\sqrt{-1}(m-2)x} + \dots + e^{-\sqrt{-1}(m-2)x} + e^{-\sqrt{-1}mx} & m \geq 1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

で定められる関数. ここで, 高校数学などで良く扱われる「足し算の順序をずらす」議論に依って

$$\begin{aligned} &\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a,b]}(\theta_v) + \chi_{[a,b]}(-\theta_v)) \\ &= (2c_0 - (c_2 + c_{-2}))\#\{q_v \leq n\} + \sum_{m \geq 1} (c_m + c_{-m} - c_{m+2} - c_{-m-2}) \sum_{q_v \leq n} S_m(\theta_v) \end{aligned}$$

が従う.

さて, 対称積 L 関数 $L_m(s, E)$ ($m \geq 1$) の対数微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log L_m(s, E) &= \frac{L'_m(s, E)}{L_m(s, E)} = - \sum_{q_v} \sum_{j=0}^m \frac{e^{\sqrt{-1}(m-2j)\theta_v} q_v^{-s} \log q_v}{1 - e^{\sqrt{-1}(m-2j)\theta_v} q_v^{-s}} \\ &= - \sum_{q_v} \sum_{j=0}^m e^{\sqrt{-1}(m-2j)\theta_v} q_v^{-s} \log q_v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{-1}k(m-2j)\theta_v}}{q_v^{ks}} \\ &= - \sum_{q_v, k \geq 1} \frac{S_m^{(k)}(\theta_v) \log q_v}{q_v^{ks}} \end{aligned}$$

(但し $S_m^{(k)}(x) = e^{\sqrt{-1}kmx} + e^{\sqrt{-1}k(m-2)x} + \dots + e^{-\sqrt{-1}k(m-2)x} + e^{-\sqrt{-1}kmx}$) の主要部 ($k = 1$ の部分) に現れるディリクレ級数

$$H_m(s) = \sum_{q_v} \frac{S_m(\theta_v) \log q_v}{q_v^s} \quad (m \geq 1)$$

にウィーナー-池原のタウバー型定理 (定理 0.3) を適用して、素数定理と全く同様にして

$$\sum_{q_v \leq n} S_m(\theta_v) = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

が示される (条件 $(*)'_m$ に依り 各 $m \geq 2$ に対して $L_{m-1}(s, E)$ が正則かつ零点を持たないので、特に $s = 1$ でも正則で、 $\text{Res}_{s=1} L_{m-1}(s, E) = 0$ となる ことを用いた).

斯くして

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a,b]}(\theta_v) + \chi_{[a,b]}(-\theta_v))}{\#\{q_v \leq n\}} \\ &= 2c_0 - (c_2 + c_{-2}) + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + c_{-m} - c_{m+2} - c_{-m-2}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n/\log n)}{n/\log n} \\ &= 2c_0 - (c_2 + c_{-2}) \\ &= \frac{2(b-a)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-2\sqrt{-1}b} - e^{-2\sqrt{-1}a}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{2\sqrt{-1}b} - e^{2\sqrt{-1}a}}{-2\sqrt{-1}} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{b - \frac{1}{2} \sin 2b}{2} - \frac{a - \frac{1}{2} \sin 2a}{2} \right) \\ &= \int_a^b \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

が従う (一行目で素数定理 $\#\{q_v \leq n\} = n/\log n + o(n)$ を用いた). □

証明を見れば、セールの条件 (命題 0.4) からの佐藤-テイト予想の導出の仕方が素数定理の証明を直接拡張したものであることは明らかであろう. 以上の議論に依って、佐藤-テイト予想は条件 $(*)_m$ ($m \geq 2$) という L 関数の解析的性質を調べる問題に完全に帰着される. 勿論、既にテイトが示唆していた様に佐藤-テイト予想の証明に当たっては無限個の L 関数について解析的性質 $(*)_m$ を調べなければならないので、素数定理よりもずっと困難でありかつ数学的に深い議論が必要とされることが容易に想像出来よう.

$\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta$ という分布の形や、対称積 L 関数 $L_m(s, E)$ ($m \geq 2$) が登場する背景も、実は $SU(2)$ のハール測度 (HAAR measure) や既約表現という観点から極めて自然に理解出来るのであるが、これ以上野暮な説明を付け加えるは止めることにしよう. セールは測度に関する一様分布性 (equidistribution) と L 関数の解析的性質との関係について感動的なまでに簡潔か

つ明快な説明を与えているので、興味のある方には [SerreA] の記述に直接触れ、その筆致を存分に味わっていただく方が遥かに有意義であると信ずるからである。

雑談 3. 折角なので、素数定理の証明で用いた アーベルの総和トリック とはどのようなものであったか振り返ってみよう。

命題 0.5 (アーベルの総和トリック). 複素数列 $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ が、ある複素数 α に関して

$$\sum_{n=2}^N b_n = \alpha N + o(N) \quad (0.4)$$

を満たすとする。このとき、

$$\sum_{n=2}^N \frac{b_n}{\log n} = \alpha \frac{N}{\log N} + o\left(\frac{N}{\log N}\right)$$

が成立する。 ◇

証明はいたって単純で、総和の取り方を巧妙にずらすだけである。

$S(N) = \sum_{n=2}^N b_n$, $\tilde{S}(N) = \sum_{n=2}^N b_n / \log n$ とおく。計算上の都合で $S(1) = 0$ と約束すると、簡単な計算に依り

$$\begin{aligned} \tilde{S}(N) &= \sum_{n=2}^N \frac{S(n) - S(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^N \frac{S(n)}{\log n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S(n)}{\log(n+1)} \\ &= \frac{S(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} S(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \end{aligned}$$

が得られるので、後は最後の式の総和記号の部分が $o(N/\log N)$ となることを確かめればよい。これは漸近評価 (0.4) を用いれば簡単に計算出来るのである。

詳細は [Lang] VIII 章 §3 の 命題 1 を参照。なお、この本には ウィーナー-池原のタウバー型定理 (定理 0.3) の証明及び密度定理への応用についても書かれているので、適宜参照されるのが良いと思われる。 ◆

0.3 証明の方針

何はともあれ、以上の議論から佐藤-テイト予想の証明は 条件 $(*)_m$ ($m \geq 2$) という無限個の L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ の解析的な性質に帰着されるが、これを直接調べるのは非常に難しい。ならば「 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ を解析的性質を詳しく調べる事が出来る別の L 関数に取り替えることで、この困難を解消出来ないか？」と考えてみよう。そんな都合の良い

L 関数が本当にあるのか疑わしく思われるかもしれないが、実は 保型 L 関数 がその候補として考えられるのである。

$\mathbb{A}_F$ を F のアデール環 (adèle ring) とする。このとき、保型形式及び保型表現の理論から、 $GL_m(\mathbb{A}_F)$ のカスピダル保型表現 Π に対する保型 L 関数は m 次のオイラー積を持ち、 $\text{Re}(s) \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され、しかもこの範囲で零点を持たないことが知られている。したがって、各 $m \geq 2$ に対し

$$L(s + \frac{m-1}{2}, E, \text{Symm}^{m-1}) = L(s, \Pi_m)$$

を満たすカスピダル保型表現 Π_m さえ構成できれば、セールの条件 (命題 0.4) に依って佐藤-テイト予想は証明されてしまう。ところが、このような保型表現 Π_m を構成することは、本質的に大域ラングランズ対応 (*Global LANGLANDS Correspondence, GLC*) に於ける {ガロワ表現} $\rightarrow$ {保型表現} 方向の対応を構成していることに他ならず、大域ラングランズ対応が確立していない現在では一般には非常に困難極まりない。

クローゼル、ハリス、シェパード-バロン、テイラー等による佐藤-テイト予想の証明も、 $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ のガロワ表現 $\text{Symm}^{m-1} T_\ell E$ に対応する保型表現を直接構成する (即ち、 $\text{Symm}^{m-1} T_\ell E$ のモジュラー性を直接示す) ことに依ってなされたわけではなく、 F の適当な有限次拡大 F' に対し、 $\text{Symm}^{m-1} T_\ell E$ を $\text{Gal}(\overline{F}/F')$ に制限した表現に対してモジュラー性を示すことによってなされている^{*12}。したがって、佐藤-テイト予想が解決した現在でも大域ラングランズ対応に基づく保型表現の直接的な構成に依る明快な証明が可能であるか、と言う問題は現在に至っても非常に重要な課題として残っているのである。

1 超曲面のある族 — A family of hypersurfaces

それでは、いよいよ [HSBT] の内容を見てゆくことにしよう。

第 1 節では、 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上の直積空間 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ に於いて方程式

$$Y: X_0^{n+1} + X_1^{n+1} + \dots + X_n^{n+1} = (n+1)tX_0X_1\dots X_n \quad (1.1)$$

で定義される超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の代数幾何学を展開する。但し、 $t \in \mathbb{P}^1$ である^{*13}。

低次元の場合を考えてみると、 $n=2$ の場合は所謂 ヘッセ (HESSE) 型の標準形で表された楕円曲線族 $Y: X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = 3tX_0X_1X_2$ 、 $n=3$ の場合は $K3$ 曲面の族 $Y: X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 4tX_0X_1X_2X_3$ であり、いずれも以前から非常に良く研究されている対象である。

^{*12} 適当に体を拡大することでモジュラー性が生まれることから、潜在的モジュラー性 (*Potential Modularity*) の名称が付けられている。

^{*13} $t = \infty$ の時は、 $Y_\infty: (n+1)X_0X_1\dots X_n = 0$ と考えることとする。

カラビ-ヤウ超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ はこの古典的な対象を自然に高次元化したものである．また，この超曲面は セントラル-チャージ が $3(n-1)$ の $N=2$ ギンツブルク-ランダウ 理論 (GINZBURG-LANDAU theory) と密接に関係する曲面族であり ([LSW] 参照)，数理論理学に於いても極めて重要な対象である．

この曲面族のファイバーの中間次元 ℓ 進エタールコホモロジーをとることで， n 次元 ℓ 進表現 $V_{\ell,t}$ が構成出来，ガロワ整合系 (GALOIS compatible system) $\{V_{\ell,t}\}_\ell$ を形成する．これを用いることで (ℓ, ℓ') トリックが展開出来るようになるのである．本節は，言わば (ℓ, ℓ') トリック を展開するための〈舞台作り〉のための節であると言えよう．

本節の内容について簡単に触れておこう．最初に本節の主役である超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ 及び，付随する $\mathbb{P}^1$ 上の局所系 $\{V_{\ell,t}\}_t$ ， $\{V[N]_t\}_t$ ， $\{V_t\}_t$ を導入する．その後，超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いて如何にして (ℓ, ℓ') トリックを展開するか，その基本的なアイデアを概観する．超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ に関する詳しい解析 (特にモノドロミーの解析) はその後で行うことにする．

本節では主に 複素幾何 や 代数解析 の手法によるカラビ-ヤウ多様体の幾何学が展開される．この部分だけでも独立に興味を惹く内容だと思われるが，かなり長い議論が展開されるので，当面 潜在的モジュラー性定理 や 佐藤-テイト予想の証明 にのみ興味の中心がある方は，取り敢えず局所系 $\{V_t\}_t$ の「モノドロミーが“大きい”」ということ (補題 1.11 参照．この性質は，§2 で登場する モレ-バイイーの定理 を適用する際に必要とされる極めて重要な性質である) 及び ℓ 進表現 $V_{\ell,t}$ の基本性質 (§1.3 参照) を確認した上で，次節に進んでいただくことも十分可能であろう．

1.1 カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ と (ℓ, ℓ') トリック

さて， Y を $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上方程式 (1.1) で定義される $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ 内の超曲面とし， $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を第二成分への射影とする．すると， $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は カラビ-ヤウ多様体 (CALABI-YAU variety) と呼ばれる多様体の族を形成する^{*14}． $t \in \mathbb{P}^1$ 上の Y のファイバーを Y_t で表す．

以下に $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の基本的な幾何学的性質を列挙しておく．

- μ_{n+1} を 1 の $(n+1)$ 乗根のなす群スキームとする．このとき，射影 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $T_0 = \mathbb{P}^1 \setminus (\mu_{n+1} \cup \{\infty\}) / \mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上で滑らかとなる．
- $Y \setminus Y_\infty$ は正則スキーム．

^{*14} カラビ-ヤウ多様体の定義としては，「標準束 (微分加群層の最高階外積) が自明かつコンパクトな複素ケーラー多様体 (KÄHLER manifold)」とするものが一般的と思われるが，数理論理学の文脈等では微妙に異なる定義を採用することもあるので注意を要する．しかし，何れにせよ本稿ではカラビ-ヤウ多様体の性質を表立って用いることはないので，あまり神経質になる必要はない (注意 4 参照)．

- ζ を任意の 1 の $(n+1)$ 乗根 とするとき, Y_ζ は孤立特異点

$$\{[\alpha_0: \alpha_1: \dots: \alpha_n] \mid \alpha_i^{n+1} = 1 (0 \leq i \leq n), \alpha_0 \dots \alpha_n = \zeta^{-1}\}$$

を持つ. これらは全て通常二次孤立特異点.

これらの性質は定義方程式より直ちに従う.

ζ_{n+1} を 1 の原始 $(n+1)$ 乗根とすると, $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}, \zeta_{n+1}]$ 上で群スキーム $H = \mu_{n+1}^{n+1}/\Delta(\mu_{n+1})$ (Δ は対角埋め込み) が Y に

$$(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)[X_0: X_1: \dots: X_n] = [\zeta_0 X_0: \zeta_1 X_1: \dots: \zeta_n X_n]$$

に依って作用する. 特に H_0 を $\zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_n = 1$ を満たす元 $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$ のなす H の部分群とすると, H_0 は各ファイバー Y_t に作用する^{*15}. また, 各特異ファイバー Y_ζ に於いては, H_0 の作用によってその二次孤立特異点達が推移的に移り合うことも分かる.

$n+1$ と互いに素な整数 N に対して, $\mathbb{P}^1$ 上の層 $V_n[N] = V[N] = (R^{n-1}\pi_*(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))^{H_0}$ を定義すると, これは 階数 n の局所自由層となり, しかも $T_0 \times \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N(n+1)}]$ 上滑らかとなる. そこで, $\ell \nmid n+1$ なる素数 ℓ に対し, ℓ 進層 $V_{n,\ell} = V_\ell = \left(\varprojlim_{m \rightarrow \infty} V[\ell^m]\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ を定義する^{*16}. $t \in T_0(F)$ (F は代数体) での ヘンゼリアン・ストーク (HENSELIAN stalk) を考えると, $V[\ell]_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{H_0}$, $V_{\ell,t} = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Q}_\ell)^{H_0}$ となり, 局所系 $\{V[\ell]_t\}_t$ 及び $\{V_{\ell,t}\}_t$ はファイバー Y_t のエタール・コホモロジー (étale cohomology) を用いた 絶対ガロワ群 $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ の法 ℓ 表現 及び ℓ 進表現を与えていることに注意しよう. 同様に $V = (R^{n-1}\pi_*\mathbb{Z})^{H_0}$ も定義しておく.

さて, ここで一旦 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の幾何学から離れて, この舞台上で繰り広げられる (ℓ, ℓ') トリックの大雑把な青写真を描き, (ℓ, ℓ') トリックに対する感覚を養うことにしよう.

最初に, 原型である ワイルズの $(3, 5)$ トリック (WILES' $(3, 5)$ -trick) を思い出すことにする ([Wiles1]. [山下 1] も参照のこと). ワイルズの用いた $(3, 5)$ トリックとは, $\mathbb{Q}$ 上で $E[3]$ が既約でないような準安定楕円曲線 E に対し, $E[5]$ のモジュラー性を示す際に用いられたテクニックであった. このトリックの要となるのは

$E'[3]$ が既約で, $E'[5]$ が $E[5]$ と同型となるような準安定楕円曲線 E' を構成すること

^{*15} 定義方程式を見れば, $t=0$ の場合は H 全体が Y_0 に作用することも分かる.

^{*16} 本節では次元 n を固定して考えるため, 次元を表す下付き添字 n を省略して表記するが, 潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) の証明に於いては色々な次元の表現を扱うため, 次元を表す添字をきちんと把握することが重要となってくる.

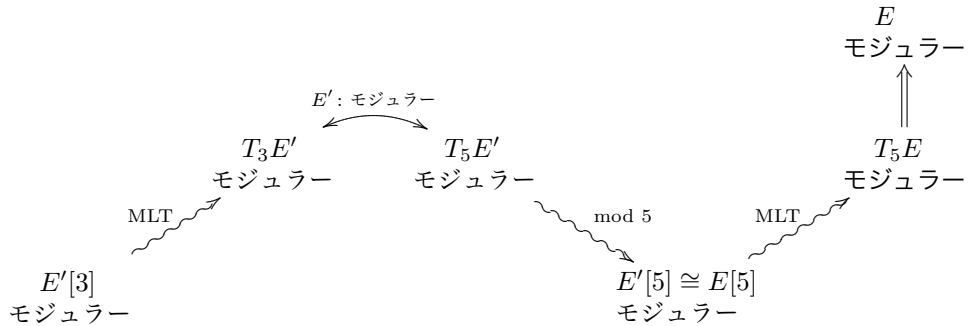


図2 ワイルズの (3,5) トリックの模式図

である^{*17}．そうすれば図式 2 のように、モジュラー性持ち上げ定理 (MLT) 及び還元を続けて用いることによって (「法 3 でのモジュラー性を“持ち上げて”法 5 に“落とす”」), $E'[3]$ のモジュラー性が $E[5]$ に“感染”する (!) さらに $E[5]$ の既約性から^{*18}, 再びワイルズのモジュラー性持ち上げ定理を用いて $E[5]$ のモジュラー性が T_5E に“持ち上がり” E のモジュラー性が導かれる．斯くしてワイルズは $\mathbb{Q}$ 上準安定な楕円曲線に対して 谷山-志村予想 (TANIYAMA-SHIMURA conjecture) を証明し, フェルマー予想の解決に向けて大きな一歩を踏み出したのであった.

これから本稿を通じて行う長い議論では, 本質的には

$V[\ell']_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})^{H_0}$ のモジュラー性が分かっており (なおかつモジュラー性持ち上げ定理の条件を満たし), $V[\ell]_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{H_0}$ が考えている法 ℓ 表現 $\bar{\rho}$ と同型であるような $t \in T_0$ を構成すること

を行う. (3,5) トリックで適当な楕円曲線 E' を構成することがキーポイントであったことと比較されたい. このような t が構成出来れば, 図式 3 の様にワイルズの (3,5) トリックを真似して「法 ℓ' でのモジュラー性を“持ち上げて”法 ℓ に“落とす”」という道程を辿ることに依り $V[\ell']_t$ のモジュラー性が $\bar{\rho}$ に“感染”する (!)

図式 2, 3 を見比べていただければ, カラビ-ヤウ 族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた潜在的モジュラー性の証明のテクニック (即ち (ℓ, ℓ') トリック) がワイルズの (3,5) トリックの“変奏”

^{*17} $E'[3]$ の既約性 (及び楕円曲線 E' の準安定性) は, ワイルズの示したモジュラー性持ち上げ定理に必要な仮定であることに注意. なお, $E[3]$ 及び $E'[3]$ は ラングランズ-タンネルの定理 (LANGLANDS-TUNNEL's theorem) に依りモジュラーとなる. 詳しくは [山下 1] 参照.

^{*18} $E[3]$ が既約でないとき $E[5]$ が既約となるのは, バリー・メイザー (Barry MAZUR) の定理に依る. [Mazur1], [Mazur2] 参照.

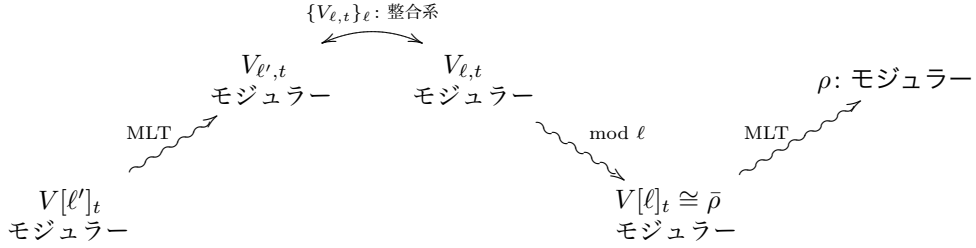


図3 カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた (ℓ, ℓ') トリックの“大雑把な”模式図

(variant) となっていることは一目瞭然であろう．勿論，実際にはその過程に様々な困難が立ち塞がるので， (ℓ, ℓ') トリック は容易には実行されない．その様々な困難については以降の節でもう少し丁寧に議論するが，先ずは図3を全体の俯瞰図として頭に入れておくと，本稿後半の議論も見通しが良くなる (かもしれない)．

注意 4. [HSBT] で扱う GSp_n 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に，カラビ-ヤウ超曲面が登場するのは些か唐突な印象を受ける方も多いと思う (著者もその一人である)．それもその筈で，ここでカラビ-ヤウ多様体が登場しなければならないような必然性は実はないのである．

繰り返しとなるが， (ℓ, ℓ') トリックを実行するに当たって最も重要なことは

法 ℓ' リアライゼーションがモジュラーかつモジュラー性持ち上げ定理の条件を満たし，法 ℓ リアライゼーションが所望の法 ℓ 表現と同型となるようなモチーフ $\mathcal{M}$ を構成すること

であった． GSp_n 表現の潜在的モジュラー性定理に於いては，数理解析学や代数幾何学，トポロジー等様々な分野で良く調べられていた超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ がたまたま (ℓ, ℓ') トリックを実践する際の“巧い”モチーフとして機能しそうだったので「借用してきた」だけという印象が強い^{*19}．

したがって「何故潜在的モジュラー性定理の証明に於いてカラビ-ヤウ多様体が登場しなく

^{*19} 例えば，カラビ-ヤウ多様体でない全く別の“巧い”モチーフ $\mathcal{M}'$ が存在するなら， $\mathcal{M}'$ を用いて全く同様に (ℓ, ℓ') トリックが実行されてしまう．その意味でも， Y のカラビ-ヤウ性が GSp_n 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に於いて本質的であるとは言えないのである．

てはならなかったのだろう」と悩むよりも、「我々が必要だったのはあくまでも (ℓ, ℓ') トリックを行う〈舞台〉であり、そのために利用される“巧い”モチーフがカラビ-ヤウ多様体であったことの方が寧ろ思わぬ副産物であったのだ」と考えた方が(精神安定上も)良いのかもしれない. $\blacklozenge$

1.2 カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ のモノドロミー解析

(ℓ, ℓ') トリックの感覚を掴んだところで、引き続き超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を詳しく解析してゆくことにしよう. ここでは、特に局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーを詳しく解析することにする. その理由は、 (ℓ, ℓ') トリックを実行する際に欠かすことのできないモレ-バイイーの定理(命題 2.1)を適用するための条件として、局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーが“大きい”ことが極めて重要となって来るからである. この節では(本報告集の解説記事全体を見渡してみても珍しいことに)複素代数幾何的かつ代数解析的な議論が多用されており、目新しい点多々あると思われるので少し詳しく解説することにした.

V に於ける $\zeta \in \mu_{n+1}$ の周りのモノドロミーについては、 Y_ζ 上の特異点が全て通常二次特異点であることから、ピカル-レフシェッツ理論 (PICARD-LEFSCHETZ theory) を用いることで比較的簡単にその様子を考察出来る ([SGA7] 参照).

補題 1.4. $V \otimes \mathbb{Q}$ に於ける $\zeta \in \mu_{n+1}$ の周りでのモノドロミー作用素の、固有値 1 に関する固有空間の次元は少なくとも $n-1$ である. $\diamond$

証明. $t \in T_0(\mathbb{C})$ とおく. 特異ファイバー $Y_\zeta(\mathbb{C})$ 上の二次孤立特異点の集合を Δ とおく. すると、各 $y \in \Delta$ に対応して消滅サイクル (vanishing cycle) $\delta_y \in H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が存在して、 $\alpha \in H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対する ζ の周りのモノドロミーの作用は

$$\alpha \mapsto \alpha \pm \sum_{y \in \Delta} (\alpha, \delta_y) \delta_y$$

で表わされる (ピカル-レフシェッツの公式). ただし $(\cdot, \cdot)$ はコホモロジーのカップ積.

ここで、各 $Y_\zeta(\mathbb{C})$ 上の孤立特異点は H_0 の作用で推移的に移り合うから、 α を H_0 -不変部分から取ると、ある $d(\alpha) \in \mathbb{Z}$ に対しモノドロミーの作用は $\alpha \mapsto \alpha \pm d(\alpha) \sum_{y \in \Delta} \delta_y$ で表わされる. $d: H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{H_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ は明らかに準同型写像となる. d の核が固有値 1 に関する固有空間に他ならないが、線形代数の次元定理より ($\mathbb{Q}$ をテンソルした後の) d の核の次元は少なくとも $n-1$ 次元となる. $\square$

したがって、あとは無限遠点 ∞ の周りでのモノドロミーの様子を調べれば良い. [HSBT] では、フィリップ・オーガスタス・グリフィス (Phillip Augustus GRIFFITHS) に依る有理形式に関する周期積分の理論 (theory of period integrals for rational forms) [Griffiths] を用い

て、局所系 $\{V_t\}_t$ に於ける無限遠点 ∞ の周りでの幾何的モノドロミーを ピカル-フックス型微分方程式 (*differential equation of PICARD-FUCHS type*) の解の解析的モノドロミー という代数解析的な問題に帰着させている^{*20}。以下それを概観しよう。

Y_t の定義方程式 (1.1) を書き換えて

$$Q_t = \frac{1}{n+1}(X_0^{n+1} + \dots + X_n^{n+1}) - tX_0 \dots X_n$$

とおき、 $Y_t(\mathbb{C})$ に沿って i 位の極を持つ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の有理 n -形式

$$\omega'_i = (i-1)! \frac{(X_0 X_1 \dots X_n)^{i-1} \Omega}{Q_t^i}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

を考える。但し、 $\Omega = \sum_{j=0}^n (-1)^j X_j dX_0 \wedge \dots \wedge dX_{j-1} \wedge dX_{j+1} \wedge \dots \wedge dX_n$ 。簡単な計算に依り、 ω' は

$$\frac{d\omega'_i}{dt} = \omega'_{i+1} \quad (1.2)$$

を満たすことが分かる。

さて、グリフィスの記法に倣って $\mathcal{A}_r^q(Y_t(\mathbb{C}))$ を $Y_t(\mathbb{C})$ に沿って高々 r 位の極を持つ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の有理 q -形式のなす $\mathbb{C}$ -ベクトル空間とし、 $\mathcal{H}_k(Y_t(\mathbb{C})) = \mathcal{A}_k^n(Y_t(\mathbb{C}))/d\mathcal{A}_{k-1}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))$ とおこう^{*21}。このとき、 $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対して

$$\omega'_i \in \mathcal{H}_i(Y_t(\mathbb{C})) \setminus \mathcal{H}_{i-1}(Y_t(\mathbb{C})) \quad (1.3)$$

となることを背理法に依って示すことが出来る ([HSBT] 補題 1.5 直前のパラグラフを参照)。ここで、 $Y_t(\mathbb{C})$ に沿って高々 k 位の極を持つ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の有理 n -形式 φ に対して 留数写像 (*residue map*) $R(\varphi): H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(R(\varphi))(\gamma) = \int_{\tau(\gamma)} \varphi, \quad \gamma \in H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

で定める。但し、 $\tau: H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ は γ の適当な管状近傍の境界をとる写像 (詳しくは [Griffiths] § 3 を参照)。したがって $R(\varphi)$ は $H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C})$ の元を定める。 $R: \mathcal{H}_k(Y_t(\mathbb{C})) \rightarrow \text{Fil}^{n-k}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C})))_0$ は同型となるので (下付き添字の 0 は原始的な部分を表す。[Griffiths] 定理 8.3 参照), (1.3) と併せて

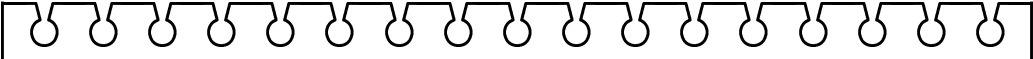
$$R(\omega'_i) \in \text{Fil}^{n-i}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}) \setminus \text{Fil}^{n+1-i}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

^{*20} 要するに、リーマン-ヒルベルト対応 (RIEMANN-HILBERT correspondence) に依って対応するガウス-マニン接続の満たす微分方程式 (系) を、リーマン-ヒルベルト対応をあまり前面に押し出さずに直接構成しているのである。

^{*21} ド・ラームコホモロジー群の類似物であるが、閉形式のなす部分空間の剰余をとっているのではない点に注意しよう。

が導かれる. 但し, Fil^j は ホッジ・フィルトレーション (HODGE filtration). つまり, $R(\omega'_1), R(\omega'_2), \dots, R(\omega'_n)$ は $H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}$ の基底をなす.

以降の計算に於ける基本戦略は次の通りである:



適当な $\gamma_t \in H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{H_0}$ の元に対する 留数ベクトル (residue vector) ^a

$$v'(\gamma_t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_1 \\ \vdots \\ \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_n \end{pmatrix}$$

のパラメータ t に関する微分を, (1.2) 等を用いて変形することで常微分方程式系 $\frac{d}{dt}v'(\gamma_t) = A'v'(\gamma_t)$ を導出し, その解のモノドロミーを調べる.

^a これは, γ_t を $[\omega'_1], \dots, [\omega'_n]$ の双対基底に関して線形結合表示した時の係数を並べたベクトル.

ここで, 計算の都合上新たな有理形式 $\omega_i = t^i \omega'_i$ ($1 \leq i \leq n+1$) を導入する. ω_i 達は H の作用で不変であり, しかも関係式

$$\frac{d\omega_i}{dt} = i\omega_i + \omega_{i+1} \quad (1.4)$$

を満たす. もし, $t \notin \{0, \infty\} \cup \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ であれば, 当然のことながら, $R(\omega_1), \dots, R(\omega_n)$ もまた $H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{C})^{H_0}$ の基底をなしている. 初等的な計算に依って, $t \notin \{0, \infty\} \cup \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ のとき

$$[\omega_{n+1}] = \frac{1}{-t^{-(n+1)} - 1} (A_{1,n+1}[\omega_n] + \dots + A_{n,n+1}[\omega_1]) \quad (1.5)$$

が成り立つ ($[\cdot]$ は ド・ラーム (DE RHAM) コホモロジー類). 但し, $A_{i,j}$ ($j > i \geq 0$) は漸化式

- $A_{0,j} = 1$ ($j > 0$ のとき)
- $A_{i+1,j} = A_{i,i+1} + 2A_{i,i+2} + \dots + (j-i-1)A_{i,j-1}$

で定まる数であり,

$$(i+1)^n = \sum_{j=0}^{\min(n,i)} A_{n-j,n+1} \frac{i!}{(i-j)!} \quad (1.6)$$

を満たす.

さて、ファイバー Y_t の H_0 -不変 $(n-1)$ -サイクル γ_t を巧くとることに依り、 γ_t が t に関して局所定値かつ $\tau(\gamma_t) \in H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ も t に関して局所定値となるように出来る。したがって、留数ベクトル $v(\gamma_t) = {}^t(\int_{\tau(\gamma_t)} \omega_1, \dots, \int_{\tau(\gamma_t)} \omega_n)$ の微分に於いて

$$t \frac{d}{dt} v(\gamma_t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau(\gamma_t)} t \frac{d\omega_1}{dt} \\ \vdots \\ \int_{\tau(\gamma_t)} t \frac{d\omega_n}{dt} \end{pmatrix}$$

のように t に関する微分と $\tau(\gamma_t)$ に関する積分が順序交換可能であると仮定して良い。右辺のベクトルを (1.4) 及び (1.5) を用いて計算することで、一階のピカル-フックス型常微分方程式

$$t \frac{d}{dt} v(\gamma_t) = A(t^{-(n+1)}) v(\gamma_t) \quad (1.7)$$

を得る。但し、 $A(z)$ は

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n,n+1}}{z-1} \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n-1,n+1}}{z-1} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n-2,n+1}}{z-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-2 & 0 & \frac{A_{3,n+1}}{z-1} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 & \frac{A_{2,n+1}}{z-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & n + \frac{A_{1,n+1}}{z-1} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

なる行列。ここで、 $\mathbb{P}^1$ の被覆 $\pi_{\mathbb{P}^1}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1; t \mapsto z = t^{-(n+1)}$ に依り変数を z に変換すると、方程式 (1.7) は

$$z \frac{d}{dz} f(z) = -\frac{1}{n+1} A(z) f(z)$$

に変換される。但し、 $v(\gamma_t)$ を z 変数の関数と見做したものを $f(z)$ と書いた。この形のピカル-フックス型微分方程式の $z=0$ の周りでの局所解は

$$f(z) = S(z) \exp\left(-\frac{1}{n+1} A(0) \log z\right) v_0 \quad (S(z) \text{ は一価の行列値関数, } v_0 \text{ は定ベクトル})$$

で与えられることが知られており ([CL] 参照), $z=0$ の周りを一周した時の解の局所モノドロミーは $\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n+1} A(0)\right)$ で与えられる。このモノドロミーを $\pi_{\mathbb{P}^1}$ で持ち上げることで、常微分方程式 (1.7) の解の無限遠点 ∞ の周りでのモノドロミーが $\exp(2\pi\sqrt{-1}A(0))$ で与えられることが分かる。

$A(0)$ の特性多項式は、 $\det(TI_n - A(0))$ を第 n 列に関して展開して計算することで

$$\sum_{j=0}^n A_{n-j,n+1} (T-1)(T-2)\dots(T+j-n)$$

と求まる. これは (1.6) で i を $T-1$ に置き換えたものの右边と一致するので, 結局 $A(0)$ の特性多項式は T^n . $A(0)$ の階数が $n-1$ であることは簡単に分かるから, $A(0)$ の最小多項式も T^n . 斯くして, モノドロミー作用素 $\exp(2\pi\sqrt{-1}A(0))$ の最小多項式は $(T-1)^n$ となる.

さて, ガロワ-エタール被覆

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}; t \mapsto t^{n+1}$$

に依って, V を $(T_0(\mathbb{C}) \setminus \{0\})/\mu_{n+1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の局所定数層 $\tilde{V}$ に降下 (descent) したものを考える.

補題 1.6. $\tilde{V}$ のモノドロミーに関して, 以下が成立.

- (1) ∞ の周りのモノドロミー作用素は冪単で, 最小多項式は $(T-1)^n$.
- (2) 1 の周りのモノドロミー作用素は冪単で, 固有値 1 に関する固有空間の次元はちょうど $n-1$ となる.
- (3) 0 の周りのモノドロミー作用素は 1 の自明でない $(n+1)$ 乗根をそれぞれ重複度 1 で固有値として持つ. ◇

証明. (1) は上記の議論より従う. (2) は 補題 1.4 (+ エタール 降下理論) 及び, 1 の周りのモノドロミーが恒等写像となり得ないことから従う. (3) に関しては, 0 の周りのモノドロミーは被覆写像 $t \mapsto t^{n+1}$ に由来するので, 被覆変換群 $\mu_{n+1} \cong H/H_0$ の作用と同一視されるが, この作用が 1 の自明でない $(n+1)$ 乗根全体を固有値として持つことはよく知られている ([DMOS] 参照). □

系として局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーの様子が直ちに従う.

系 1.7. 局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーに関して, 以下が成立.

- (1) ∞ の周りのモノドロミー作用素は冪単で, 最小多項式は $(T-1)^n$.
- (2) $\zeta \in \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ の周りのモノドロミー作用素は冪単で, 固有値 1 に関する固有空間の次元はちょうど $n-1$ となる. ◇

雑談 5. 有理形式を ω_i に取り替えず, ω'_i のまま上記の方針で $v'(\gamma_t) = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $x_i = \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_i$ について常微分方程式 $\frac{d}{dt} v'(\gamma_t) = A' v'(\gamma_t)$ を立式し, x_1 に関する文字消去及び変数変換 $z = t^{-(n+1)}$, $F = z^{-\frac{1}{n+1}} x_1$ を施すと, 特異点を $z = 0, 1, \infty$ に持つ一般化超幾何微分方程式 (generalized hypergeometric differential equation)

$$\left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^n - z \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{n+1} \right) \left(z \frac{d}{dz} + \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(z \frac{d}{dz} + \frac{n}{n+1} \right) \right] F = 0$$

が得られる*²². 超幾何微分方程式のモノドロミーは代数解析の分野で良く研究されている. 補題 1.6 も, 本質的にはこの超幾何微分方程式のモノドロミーの代数解析を行っていることに他ならない. $\blacklozenge$

さて, $V, \tilde{V}, V[N]$ 等には ポワンカレ 双対性 (POINCARÉ duality) から誘導される非退化交代形式が存在する. モノドロミー変換がこの交代形式を不変に保つことは良く知られているので, モノドロミー表現

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, z) \rightarrow Sp(\tilde{V}_z \otimes \mathbb{C}), \quad \pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow Sp(V[N]_t)$$

等が得られる.

次の補題は §2.2 に於いて極めて重要な役割を演じる:

補題 1.11. ある定数 $C(n)$ で, $C(n)$ より大きい素数しか因数に持たない任意の整数 N 及び任意の $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対して

$$\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow Sp(V[N]_t)$$

が全射となるようなものが存在する. $\blacklozenge$

証明の概略. 先ず以下の補題を示す.

補題 1.9. 任意の $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に対し, モノドロミー表現に依る $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, z)$ の $Sp(\tilde{V}_z \otimes \mathbb{C})$ に於ける像 $\mathcal{H}$ は ザリスキー位相に関して稠密である. $\blacklozenge$

これが分かれば, $\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t)$ の $Sp(V_t \otimes \mathbb{C})$ に於ける像もザリスキー位相に関して稠密であることが分かる ([HSBT] 系 1.10).

さて, 補題 1.9 の証明は $\mathcal{H}$ がパラメーター $a_1 = 1, \dots, a_n = 1; b_1 = \zeta_{n+1}, \dots, b_n = \zeta_{n+1}^n$ (ζ_{n+1} は 1 の原始 $(n+1)$ 乗根) の 超幾何群 (hypergeometric group) と呼ばれる群となることを用いて, ボイカース-ヘックマン (BEUKERS-HECKMAN) に依る超幾何群の分類理論を適用することに依って示される.

その大筋の流れを追ってみよう. $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群 $\mathfrak{h}$ がパラメーター $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$

*²² これは一般化超幾何関数 (generalized hypergeometric function)
 ${}_nF_{n-1}[1/(n+1), 2/(n+2), \dots, n/(n+1); 1, 1, \dots, 1; z]$
 を解に持つ常微分方程式.

の 超幾何群 であるとは、 $\mathfrak{h}$ が

$$\begin{aligned}\det(tI_n - h_\infty) &= \prod_{j=1}^n (t - a_j), \\ I_n - h_1 &\text{ の階数が } 1, \\ \det(tI_n - h_0^{-1}) &= \prod_{j=1}^n (t - b_j)\end{aligned}$$

を満たす 3 つの元 $h_0, h_1, h_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に依って生成されることとする (但し I_n は n 次単位行列). 因みに h_1 のことを 反射写像 (reflection) と呼び、 h_1 で生成される $\mathfrak{h}$ の部分群 $\mathfrak{h}_r$ を 反射部分群 (reflection subgroup) と呼ぶ. 我々の状況では 特異点 $0, 1, \infty$ の周りでの モノドロミー 作用素をそれぞれ h_0, h_1, h_∞ とすれば、 $\mathcal{H}$ が パラメーター $1, \dots, 1; \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n$ の超幾何群となる (これは 補題 1.6 の言い換えに他ならない).

超幾何群の一般論に依り、任意の超幾何群は既約であるから ([BH] 命題 3.3) $\mathcal{H}$ は既約. しかも パラメーター $1, \dots, 1; \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n$ は 如何なる 1 の冪根 ζ の作用でも保たれないので、反射部分群 $\mathcal{H}_r$ も既約 ([BH] 定理 5.3). この様な場合は パラメーターの情報により $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ が原始的 (primitive) であるかどうか判定出来る ([BH] 定理 5.8 及び 定理 5.14). 今回の場合は $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ は原始的となる. さらに $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ は明らかに無限群である.

以上の様な状況下では $\mathcal{H}$ のザリスキー閉包 $\overline{\mathcal{H}}$ の特徴付けがなされている. 特にパラメーターの集合 $\{1, \dots, 1\}$ 及び $\{\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n\}$ が逆元をとる操作で不変であること及び h_1 の固有値が全て 1 であることから, [BH] の定理 6.5 により, $\overline{\mathcal{H}} \cong Sp_n(\mathbb{C})$ であることが従う.

あとは適当な十分大きい N に対して $Sp(V[N]_t)$ を考えることで、モノドロミー表現を全射にすることが出来ることが知られている ([MVW] 定理 7.4, 補題 8.4)^{*23}ので、補題 1.11 が従う. $\square$

雑談 6. 上記の証明で扱われている ボイカース-ヘックマン に依る超幾何群の分類理論は、所謂 微分 ガロワ 理論 (defferential GALOIS theory) なる 理論 の一端を表している. $\blacklozenge$

補題 1.11 は、端的に言えば曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーが “十分に大きい” と言うことを表している. 繰り返しになるが、モノドロミーが大きいことはモレーバ イーの定理を用いる際に極めて重要な条件である. 詳しくは次節 (§ 2.2) にて説明しよう.

雑談 7. 本節では [HSBT] の記述に従って代数解析的な手法でモノドロミー解析を行ったが、シェパード-バロンが構成した ∞ で準安定 (semi-stable) な Y の H_0 -同変ブロー・アップに、

^{*23} [MVW] の定理 7.4 では、代数群 $\mathcal{H}$ の ℓ 進完備化が $Sp(V_{\ell,t})$ を含むことを証明しているが、この証明には 単純有限群の分類理論 を用いる方法が使われている. 最近までは単純有限群の分類を用いない証明は (不完全なものを除いて) 知られていなかったが、[HSBT] の最新版に於いて ニック・カツツ (Nick KATZ) に依る単純有限群の分類理論を経由しない証明方法が掲載された.

ラポポルト-ジンク スペクトル系列 (RAPOPORT-ZINK *spectral sequence*) を適用することで、純代数的にモノドロミーを解析することが出来るのではないかと (寧ろより詳細な情報を得ることが出来るのではないかと) という趣旨のことが [HSBT] に於いて示唆されている. $\blacklozenge$

1.3 ガロワ表現 $V_{\ell,t}$ の諸性質

§ 1.3 ではカラビ-ヤウ 族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ から得られる表現 $V_{\ell,t}$ 及び $V[\ell]_t$ の性質について述べる. 但し, 前節で扱ったモノドロミー解析と異なっておりあまり独特な証明テクニック等は見受けられないので, 証明には深入りせず, 寧ろ得られる結果を纏めることを重視することにした.

補題 1.13. $K/\mathbb{Q}_\ell$ を有限次拡大とし, $t \in T_0(K)$ をとるとき, $V_{\ell,t}$ は $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ の ド・ラーム 表現であり, ホッジ-テイト 数は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ である. さらに t が整数環 $\mathcal{O}_K$ の元で, なおかつ $1/(t^{n+1}-1)$ も $\mathcal{O}_K$ に含まれるとき, $V_{\ell,t}$ は クリスタリン 表現となる. $\diamond$

証明. $V_{\ell,t}$ がド・ラーム表現になることは良く知られている. $V_{\ell,t} = H^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)^{H_0}$ であることから, p 進 ホッジ 理論に於ける ド・ラーム 比較定理により, $H_{DR}^{n-1}(Y_t/K)^{H_0}$ を調べれば良い. これは § 1.2 で調べてある通りである. さらに $t \in \mathcal{O}_K$ かつ $1/(t^{n+1}-1) \in \mathcal{O}_K$ であるならば, $Y_t/\mathcal{O}_K$ が滑らかかつ射影的となるので, $V_{\ell,t}$ は クリスタリン 表現となる. $\square$

補題 1.14. $\ell \equiv 1 \pmod{n+1}$ なる素数 ℓ に対し, $I_{\mathbb{Q}_\ell}$ -加群 としての同型

$$V[\ell]_t \cong 1 \oplus \omega_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \omega_\ell^{1-n}$$

が存在する. 但し, $I_{\mathbb{Q}_\ell}$ は $\mathbb{Q}_\ell$ の絶対ガロワ群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ の惰性群であり, $\omega_\ell: I_{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ は或る ℓ 進指標. $\diamond$

証明. 円分 ℓ 進指標 ϵ_ℓ に対し,

$$V_{\ell,0} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n}$$

を示せば良いが, $V_{\ell,0}$ が n 個の指標の和になることは [DMOS] 等を参照. あとは, これらの指標がクリスタリン表現でホッジ-テイト数が $0, 1, \dots, n-1$ であることを鑑みれば上記のようになる. $\square$

補題 1.15. $q \neq \ell$ かつ $q \neq n+1$ なる素数 q をとり, $K/\mathbb{Q}_q$ を有限次拡大とする. v_K を K の正規化された付値とし, $t \in K$ を $v_K(t) < 0$ なる元とする. このとき

(1) $V_{\ell,t}$ と $V[\ell]_t$ の半単純化は不分岐で, その幾何学的 フロベニウス元 Frob_K の作用の固有値は, ある $\alpha \in \{\pm 1\}$ に対して $\alpha, \alpha \# \kappa(K), \dots, \alpha(\# \kappa(K))^{n-1}$ となる. 但し, $\kappa(K)$ は K

の剰余体.

- (2) 惰性群 I_K の $V_{\ell,t}$ への作用は, 最小多項式が T^n であるような $V_{\ell,t}$ 上の冪零変換 N に対して $\exp(Nt_K)$ で与えられる.
- (3) 惰性群 I_K の $V[\ell]_t$ への作用は, $V[\ell]_t$ 上の冪零変換 N に対して $\exp(v_K(t)Nt_K)$ で与えられる. また, ある自然数 $D(n)$ が存在し, $\ell > D(n)$ ならば N の最小多項式が T^n となる. ◇

証明の概略. この補題は, 実は §1.2 で行ったモノドロミー作用の解析から割と直ぐに分かる事実であるが, そのための設定や準備が少し冗長になるので割愛する. 原論文 [HSBT] を参照されたい. □

強調しておかねばならないことは, $V[\ell]_t$, $V_{\ell,t}$ に上記のような制限がつくため, 曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ 上での (ℓ, ℓ') トリックで潜在的モジュラー性を証明できるようなガロワ表現にも上記のような 強い 制限が課されてしまう ということである (定理 3.1 の (性質 4), (性質 5) 参照). [たのしみ] にて吉田輝義氏も述べていることであるが, 佐藤-テイト予想の証明に於いて欠かす事の出来ない楕円曲線の対称積表現 $\mathrm{Sym}^{n-1}T_\ell E$ がこの条件を満たしていたと言うこと (特にホッジ-テイト数の条件など) は, 誠に幸運であったとしか言いようがあるまい.

2 代数的整数論を少々 — *Some algebraic number theory*

「代数的整数論」というと何とも仰々しいことこの上ないが, [HSBT] に於ける第 2 節のテーマは (ℓ, ℓ') トリックを実行する上で欠かすことの出来ない モレ-バイイーの定理 (MORET-BAILLY's theorem) を扱いやすい形に拡張することである.

この節では, 最初にモレ-バイイーが証明したオリジナルの定理を紹介する. この定理は簡単に言えばスキームの有理点の存在定理の一種であり, 純粋に代数幾何・数論幾何的な定理である. これをどのようにして (ℓ, ℓ') トリックに於けるモチーフの構成に応用するかを考察するために, GL_2 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリックの議論 ([Taylor2], [Taylor3], [津嶋]) を概観し, そこでのモレ-バイイーの定理の使われ方を観察する. 最後に, 本稿で用いられるモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を導入しよう.

2.1 モレ-バイイー の定理と潜在的モジュラー性

最初に, ローラン・モレ-バイイー (Laurent MORET-BAILLY) によるオリジナルの定理を紹介しよう (本稿では代数体版しか用いないが, 読者の便宜のために関数体版も同時に扱うこととする).

K を大域体 (代数体 又は 有限体 k 上の一変数関数体) とする. 以下, 環 R は以下の何れ

かの デデキント整域 とする：

- (代数体版)

R は代数体 K の S -整数環 (S -integer ring) $\mathcal{O}_K^S$. 但し, S は K の素点の有限集合で, アルキメデスの素点を全て含むもの*24.

- (関数体版)

関数体 K を持つ k 上滑らかな連結アファイン曲線の座標環.

$B = \text{Spec } R$ とおく.

さて, $\mathfrak{M}_K$ を K の素点全体のなす集合とし, $\mathfrak{M}_R$ を $B = \text{Spec } R$ の閉点全体の集合する. B の閉点を K の非アルキメデスの素点と同一視することに依り, $\mathfrak{M}_R$ を自然に $\mathfrak{M}_K$ の部分集合と見做そう. さらに, $\mathfrak{M}_K$ の有限部分集合 Σ (アルキメデスの素点も含んで良い) を $\mathfrak{M}_R$ と共通部分が無いように選んで固定しておく. この設定の下で, モレ-バイイーは以下の定理を示した：

定理 (モレ-バイイーの定理, [MB2] 定理 1.3). $R, K, \mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_R, \Sigma$ を上記の通りとする. $B = \text{Spec } R$ とおく. $X \rightarrow B$ を分離的有限型な既約 B -スキームで, 構造射が全射であり, X_K が K 上 幾何学的既約 (*geometrically irreducible*) であるようなものとする. さらに, 各 $v \in \Sigma$ に対して 局所体の有限次ガロワ拡大 L_v/K_v が与えられ, X の非特異な L_v -有理点 $X^{\text{sm}}(L_v)$ の 空でない 開集合 Ω_v (位相は v -進位相で考える) で, $\text{Gal}(L_v/K_v)$ の作用に対し 安定なものが与えられているとする.

もし

$$\Sigma \sqcup \mathfrak{M}_R \neq \mathfrak{M}_K \quad (2.1)$$

が成り立つならば, B 上有限かつ構造射が全射となるような X の既約閉部分スキーム $Y \hookrightarrow X$ が存在して, 各 $v \in \Sigma$ に対して $Y \times_B \text{Spec } L_v$ が $\coprod \text{Spec } L_v$ と分解し, $Y \times_B \text{Spec } L_v \rightarrow Y$ から誘導される $Y \times_B \text{Spec } L_v$ の各連結成分から Y への射*25が Ω_v に含まれるようなものが存在する. $\diamond$

雑談 8. 定理の中で登場した組 $\mathcal{S} = \{X \rightarrow B, \Sigma, \{L_v\}_{v \in \Sigma}, \{\Omega_v\}_{v \in \Sigma}\}$ を, モレ-バイイーは スコレム・データ (*donnée de SKOLEM*, *SKOLEM data*) と呼んでいる. その名称の由来はこの小節の最後の 雑談 13 を参照のこと.

さらに 条件式 (2.1) を満たすようなスコレム・データは, 非完備スコレム・データ (*donnée incomplète de SKOLEM*, *incomplete SKOLEM data*) と呼ばれている. $\blacklozenge$

*24 代数体 K の S -整数環 $\mathcal{O}_K^S$ とは, S に 含まれない任意の素点 v に対し, $v(x) \geq 0$ を満たす元 x で生成される K の部分環を指す

*25 これは Y の L_v -有理点 ($Y(L_v)$ の元) を定めることに注意.

注意 9. モレ-バイイーの定理には様々な仮定が必要とされるが、例えば X が代数体 K 上の代数多様体の場合 (以下の議論では専らこのケースが扱われる) は、幾つかの仮定は自動的に満たされる場合が多い; 先ず X の $\mathcal{O}_K$ 上のモデルを取ることで、分離的有限型全射 $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ の条件は満たされる. さらに, Σ を真に含み, かつ K のアルキメデス的素点を全て含む様な K の素点の有限集合 S を取り, $\mathcal{O}_K$ を S -整数環 $\mathcal{O}_K^S$ に取り替えることで, 非完備性の条件 (条件式 (2.1)) も容易に達成される.

したがって, X が K 上の代数多様体の場合には, 特に調べる必要がある条件は

- X_K の幾何学的既約性 (連結性)
- 局所有理点の集合 Ω_v が空でないこと

の二点である.

我々が実際に利用するモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) に於いても, 適用の際にはこの二点を確認することが極めて重要になる. 特に §1 の大半は, 後程モレ-バイイーの定理を適用する対象となる “モジュライ空間” の幾何学的連結性を示すことに割かれていると言っても過言ではなかろう (§2.2 も参照). また, 実際にモジュライ空間にモレ-バイイーの定理を適用する際には, 局所有理点の構成に p 進ホッジ理論などの高度な理論が要求される場合が多く, こちらも調べるのはなかなか骨が折れる条件である ([HSBT] に於ける局所有理点の構成については §3 参照. また, [Taylor2] に於いても, 本田-テイト理論や セール-テイト理論 を用いた局所有理点の構成が行われている. こちらに関しては [津嶋] を参照されたい). ◆

テイラーは GL_2 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に於いて, モレ-バイイーの定理を若干書き直した次の形の系を用いた:

系 ([Taylor2], 定理 G). K を代数体とし, Σ を K の素点の有限集合とする. Σ は無限素点をすべて含むとする. K^Σ/K を全ての $v \in \Sigma$ が完全分解するような最大の代数拡大とする. さらに, X を K 上幾何学的既約かつ滑らかな擬射影スキームで, 各 $v \in \Sigma$ に対して $X(K_v)$ が空集合でないものとする. このとき, $X(K^\Sigma) \subseteq X$ はザリスキー位相に関して稠密である. ◇

証明. Σ の元を全て含む様な K の素点の有限集合 S を一つ固定し, $B = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K^S$ とおく (注意 9 参照). このとき, スコレム・データ $\mathcal{S} = \{X \rightarrow B, \Sigma, \{K_v\}_{v \in \Sigma}, \{X(K_v)\}_{v \in \Sigma}\}$ に対してモレ-バイイーの定理を適用することに依り, 定理の条件を満たす既約閉部分多様体 $Y \hookrightarrow X$ を得る (X が K 上滑らかであることを仮定しているので, 各 $X(K_v)$ は Ω_v の満たすべき非特異性の条件を満たしていることに注意).

ここで, Y の任意のアフィン開部分集合 $W = \operatorname{Spec} A$ 及び 各 $v \in \Sigma$ に対し, Y の条件により $A \otimes_{\mathcal{O}_K^S} K_v \cong \prod K_v$ となることが従うので, 特に各 $v \in \Sigma$ は A (の商体) に於いて完

全分解することが分かる. したがって, A から K^Σ への埋め込みが存在し, 各埋め込みが X の K^Σ -有理点 ($X(K^\Sigma)$ の元) を定める. 稠密性に関しては以下の注意を参照のこと. $\square$

注意 10 (有理点の稠密性に付いて). 実は, 局所体 K' (より一般にはヘンゼル体) 上幾何学的既約なスキーム Z が非特異な K' -有理点を持つとき, $X(K')$ が X に於いてザリスキー位相に関して稠密 となることが知られている (これは, 例えばヘンゼル体上の多様体の有理点集合に対する陰関数定理等を用いて証明される. [GPR] の付録等を参照). この事実を用いると, 上記の系に於ける有理点の稠密性の部分が以下の様にして証明される:

X の任意のザリスキー開集合 U 及び各 $v \in \Sigma$ に対し, (v -進位相に関する) K_v -有理点の開部分集合 $U(K_v) \subseteq X(K_v)$ は X_{K_v} に於いてザリスキー位相に関して稠密となる (特に空集合ではない) ので, 上記の証明と同様にして, $U(K^\Sigma)$ の元が構成される. 即ち, $X(K^\Sigma) \cap U \neq \emptyset$ であるから, $X(K^\Sigma)$ はザリスキー位相に関して稠密となる. $\blacklozenge$

ご覧の通り, モレ-バイイーの定理は純粋に幾何学的な定理であり, 一見すると (ℓ, ℓ') トリックとは全く関係のない定理の様に思える. では, この幾何学的な定理をどのようにして (ℓ, ℓ') トリックに応用するのであろうか? ここでは, 先ず [Taylor2] 及び [Taylor3] で考察された GL_2 表現に対する (ℓ, ℓ') トリックを例にとりて, モレ-バイイーの定理が (ℓ, ℓ') トリックに於いて如何にして活用されるのかを観察することにしよう*26.

適当な法 ℓ GL_2 表現 $\bar{\rho}: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_\ell)$ の (潜在的) モジュラー性を示すことを考える. ここで, モジュラー性が既知の法 ℓ' 表現 $\bar{\rho}': \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_{\ell'})$ が既に構成されているとしよう. 通常このような $\bar{\rho}'$ は, 適当なヘッケ指標の保型誘導表現に対応するガロワ表現をとることが多い*27.

さて, §1.1 での考察を思い出すと

法 ℓ' リアライゼーションがモジュラーかつモジュラー性持ち上げ定理の仮定を満たし, 法 ℓ リアライゼーションが所望の法 ℓ 表現と同型となるようなモチーフ $\mathcal{M}$ を構成する

ことこそが (ℓ, ℓ') トリックの要であった. テイラーは [Taylor2] 及び [Taylor3] で, GL_2 表

*26 [Taylor3] の結果は [Taylor2] で示された通常表現の場合の潜在的モジュラー性定理をクリスタリン表現の場合に拡張したもののだが, 難しくなった部分は寧ろ「 $R = \mathbb{T}$ 」定理及びモジュラー性持ち上げ定理の改良の部分であって, (ℓ, ℓ') トリックの部分は本質的にやっていることは同じである. 詳しくは [津嶋] 参照.

*27 1 次元表現の場合は高木-アルティンの類体論のお陰でガロワ指標とヘッケ指標の間の対応が良く分かっている. したがって, ヘッケ指標の誘導表現に対応するガロワ表現も簡単に構成出来るのである. 本稿でもこのようなヘッケ指標の誘導表現を用いたガロワ表現の構成が後程登場する (§3 参照).

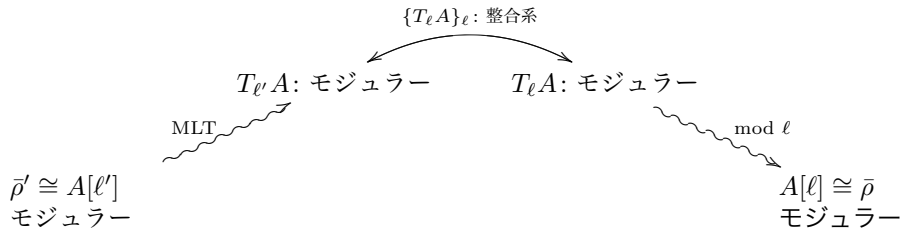


図4 [Taylor2], [Taylor3] で用いられた ヒルベルト-ブルメンタール アーベル 多様体に
依る (ℓ, ℓ') トリック

現の場合には $\mathcal{M}$ として “巧い” ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 (HILBERT-BLUMENTHAL *abelian varieties*, HBAV) を構成し、それを用いて (ℓ, ℓ') トリックを実行している。ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体の具体的な定義や (ℓ, ℓ') トリックのための細かい設定に関しては津嶋氏の解説記事に譲ることにして ([津嶋] §1 参照), そういった “些末な” 部分 (本当は大事だけれども) はこの際大胆に斬り捨てて, 上記のような “巧い” ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体を如何にして見つけ出すか, その際モレ-バイイーの定理がどのような形で活躍するか, という点に焦点を絞って解説することにしよう。

我々が見つけたい ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体は, 非常に大雑把に考えると以下の 2 条件を満たすものである:

(HBAV-1) ℓ' 等分点のなすガロワ表現 $A[\ell']$ に対し, $A[\ell'] \cong \bar{\rho}'$ (+ モジュラー性持ち上げの条件を満たす)。

(HBAV-2) ℓ 当分点のなすガロワ表現 $A[\ell]$ に対し, $A[\ell] \cong \bar{\rho}$ 。

このような (A, i, j) が構成できれば, §1.1 で概観したワイルズの (3, 5) トリックと同様に, 「法 ℓ' でのモジュラー性を “持ち上げて” 法 ℓ に “落とす” という過程を経て (図式 4 参照) $\bar{\rho}'$ のモジュラー性を $\bar{\rho}$ に “感染” させることが出来るのである^{*28}。

条件 (HBAV-1) 及び 条件 (HBAV-2) を満たす ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体を見つけて出すために, (偏極条件を指定した) ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 全体を考えてみよう。これは ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体のモジュライ を考えていることに他ならない。このモジュライ空間 X (ヒルベルト-ブルメンタール モジュラー多様体 HILBERT-BLUMENTHAL *modular variety*) は所謂 志村多様体 (SHIMURA *variety*) とな

^{*28} 一般には素数 ℓ, ℓ' ではなく 素イデアル λ, λ' が用いられるが, ここではあくまでヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体を用いた (ℓ, ℓ') トリック を通じて, (ℓ, ℓ') トリックに於けるモレ-バイイーの定理の使われ方の概観を掴むことが目的なので, 繁雑さを回避するために記法を他と合わせて敢えて ℓ, ℓ' の表記を用いた。

り, その構造は ラポポルト (RAPOPORT) 等に依って良く調べられている. 特に擬射影性 や幾何学的既約性 等, 幾何学的に非常に良い性質を持つ代数多様体となることが証明されている ([Rapoport] 参照). そこで,

ヒルベルト-ブルメンタール モジュラー多様体 X に モレ-バイイーの定理 (の系) を適用することによって, 所望の アーベル多様体 A を見つけれられるだろう

とテイラーは考えた. これが [Taylor2], [Taylor3] に於ける (ℓ, ℓ') トリックの基本的戦略である.

もう少し詳しく見てゆくと, モレ-バイイーの定理に依り, 適当な代数拡大 E/F (具体的には適当な K の素点の有限集合 Σ に対し $E = K^\Sigma$ となる) に関する有理点 $x \in X(E)$ が見つかるが, これは条件 (HBAV-1), (HBAV-2) を満たす E 上の ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 (A, i, j) に対応する (!) こうして得られた (A, i, j) を用いることで (ℓ, ℓ') トリックが実行出来るのである.

但し, モレ-バイイーの定理を用いたアーベル多様体の構成には問題点もある. A が適当な代数拡大 E/F 上定義されてしまっているため, (ℓ, ℓ') トリックを実行した際に $\bar{\rho}'$ のモジュラー性が $\bar{\rho}$ 全体には伝わらず, その制限 $\bar{\rho}|_{\text{Gal}(\bar{F}/E)}$ にしか伝搬されないのである. 潜在的モジュラー性定理の“潜在的”たる由縁 (即ち体の拡大を行わなければ $\bar{\rho}$ のモジュラー性が示されない理由) は, このようにモレ-バイイーの定理 (の系) を適用する際に生じてしまう体の拡大に起因しているのである. 現在のところ, この体の拡大をコントロールすることは出来ておらず, したがって (ℓ, ℓ') トリックに依るモジュラー性伝搬の際に生ずる“潜在性”は未だ回避出来ていない状態である (注意 11 参照).

後ほど, モレ-バイイーの定理を少し変形したものを, 局所系 $\{V[N]_t\}_t$ のレベル構造を指定した T_0 の点のモジュライ空間に適用するが (§3 参照), その際にも体の拡大が生じてしまい, モジュラー性の伝搬に制限が生じてしまう. その詳細及び, 体の拡大に依る不定性を如何にして回避するかと言った話題に関しては追って解説することにしよう.

注意 11. モレ-バイイーの定理の系に関連する話題として, K^Σ を Σ の素点が完全分解する最大の 可解 拡大 $K^{\Sigma, \text{sol}}/K$ に取り替えられないか という問題がある. もしこのように取り替えられたとすると, アーサー-クローゼルの可解底変換定理 (ARTHUR-CLOZEL's *solvable base change theorem*) ([AC] 定理 4.2, [CHT] 補題 4.3.2) に依って,

$$\rho|_{\text{Gal}(\bar{K}/K^{\Sigma, \text{sol}})}: \text{モジュラー} \quad \Leftrightarrow \quad \rho: \text{モジュラー}$$

が従うので, モレ-バイイーの定理に起因する体拡大から発生する“潜在性” (不定性) を取り除

くことが出来る。但し、残念ながらこの問題は現時点に於いて未解決である (故に、未だに “潜在的” モジュラー性定理のままである)。◆

雑談 12 (擬代数的閉性, 擬 Σ -進閉性と可解性). 折角 注意 11 の話題に触れたので, 異なる背景からも同様の問題に関心が持たれていることを紹介しよう*29.

有名な ヒルベルトの零点定理 (HILBERT *Nullstellensatz*) は, 体 K が代数的閉体であることを

K 上の多項式環 $K[X_1, \dots, X_m]$ の任意の元 $f_1, \dots, f_r$ がイデアルとして $K[X_1, \dots, X_m]$ を生成しないとき, $f_1, \dots, f_r$ の共通零点で K の元であるものが必ず存在する

と特徴付けている。この (アフィン代数幾何学的な) 条件を少し緩めた条件

任意の空でない K 上 絶対既約な代数多様体が必ず K -有理点を持つ

を満たすような体 K を 擬代数的閉体 (*Pseudo Algebraically Closed field, PAC field*) と呼ぶ。ヒルベルトの零点定理より, 代数的閉体は自動的に擬代数的閉体となる。このとき, 逆に代数的閉でない擬代数的閉体は存在するか, 存在するならばどのようなものか, という問題が自然に発生する。また, 我々の知っている体で擬代数的閉であるものはあるかも関連する重要な問題であると言えよう。これらの問題に関しては, 例えば ゲルハルト・フライ (Gerhard FREY) に依って

有理数体の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\text{ab}}$ 及び最大冪零拡大 $\mathbb{Q}^{\text{nil}}$ は擬代数的閉でない

という結果が得られている ([Frey] 及び [FJ] 系 11.5.7 参照)。ところが意外なことに, 有理数体の 最大可解拡大 $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ が擬代数的閉であるか, 即ち

$\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 上定義された空でない絶対既約な代数多様体は (必ず $\overline{\mathbb{Q}}$ 有理点を持つことは分かっているが) 必ず $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 有理点を持つかどうか

という問題は未解決なのである (!) 「擬代数的閉かどうか」と言う非常に素朴な問題が, 最大可解拡大というこれまた非常に素朴な代数拡大に対してさえ解決されていないということは, 誠に驚くべきことであると言えよう。

さて, 以上の観点からモレーバイイーの定理を改めて振り返ってみよう。代数体 K の素点の有限集合 (アルキメデスの素点を全て含む) Σ に対し, Σ の素点が完全分解する K の最大代数拡大を K^Σ とする時, モレーバイイーの定理の系は K^Σ を

*29 この話題は安田正大氏に教えていただきました。

空でない K^Σ 上の絶対既約な多様体が、各 $v \in \Sigma$ に対し非特異な K_v -有理点を持つとき、必ず K^Σ -有理点を持つ

と特徴づけている。擬代数的閉体との違いは、各 $v \in \Sigma$ に対する K_v -有理点の存在条件が付されていることである。このように、非特異な局所有理点の存在条件を付すことに依って大域有理点の存在が導かれる様な体は擬 Σ -進閉体 (*Pseudo Σ -adically Closed field, $P\Sigma C$ field*) と呼ばれる。注意 11 で指摘された「 K^Σ を $K^{\Sigma, \text{sol}}$ に取り替えられるか？」という問題は、まさに「 $K^{\Sigma, \text{sol}}$ は擬 Σ -進閉体か？」という問題に他ならない。

このように、どうも体の擬閉性と最大可解性は相性が悪く、現時点ではその関係性がなかなか見出せない状況が続いているようである。尤も、最近ではこの方面の研究も徐々に進んでおり、例えば シペリアーニ-ワイルズ (ÇIPERIANI-WILES) に依って、

Q 上定義された種数 1 の滑らかかつ幾何学的既約な射影曲線 C で、各素数 p に対し $\mathbb{Q}_p$ 有理点が存在し、かつそのヤコビ多様体 (Jacobian variety) が準安定であるようなものに関しては、 $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 有理点が存在する

という $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ の擬閉性の問題に対する部分的な結果が得られていることも付け加えておこう ([CW] 参照). ◆

雑談 13 (歴史的背景). モレバイイーの定理を巡る歴史的な背景について少し補足しておこう.

整数係数方程式の整数解が存在するか否かを問うディオファントス問題 (DIOPHANTINE problem) には、「 $R = \mathbb{T}$ 」の発展に貢献したフェルマー問題 (FERMAT problem) 等様々な興味深い問題が存在するが、これ等の問題の解法に付いて、ダフィッド・ヒルベルト (David HILBERT) は以下の様な問題を提起した：

n 個の未知数を含む整数係数の多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し、方程式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ が整数解を持つか否かを有限的に判定する方法を見つけよ.

この問題はヒルベルトの第 10 問題 (HILBERT's tenth problem) と呼ばれる (「有限的に判定する方法」を正確に定式化するためにはモデル理論に於ける決定可能性等の概念を用いる必要がある). この第 10 問題が肯定的に解決されるならば、フェルマー予想も第 10 問題の系として解決される筈であるが、フェルマー予想の解決に非常に長い時と労力が費やされたのは周知の通りであり、どう考えても第 10 問題が肯定的解を持つ様には思われない. 実際、この第 10 問題は、ロシアの数学者 ユーリ・マチャセヴィッチ (Yuri MATIYASEVICH) によって否定的に解決された.

一方、トラルフ・スコレム (Thoralf SKOLEM) は、ディオファントス方程式の整数解ではな

く代数的整数解に着目し,

整数係数の m 変数多項式系 $\{f_i(X_1, \dots, X_m)\}_{1 \leq i \leq r}$ が, 代数的整数を共通根に持つための (適当な) 条件を求めよ

という問題を考察した (スコレム問題 (SKOLEM's problem)). この問題もこのままでは純粹に方程式論・代数的整数論の問題でしかないが, 現代の代数幾何学の枠組みでとらえなおすと

スキーム $S = \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]/(f_1, \dots, f_r)$ が $\overline{\mathbb{Z}}$ -有理点をもつための適当な条件を求めよ ($\overline{\mathbb{Z}}$ は, $\mathbb{Z}$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ に於ける整閉包)

という有理点の存在問題に帰着される.

この問題に対し, 最初に大きな進展をもたらした人物が ロバート・ルメリー (Robert RUMELY) である. 彼は, 以下の定理を示した:

定理 (ルメリーの局所・大域原理, [Rumely1]). $R, K, \mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_R$ を §2.1 の冒頭で定義した通りとする. $B = \text{Spec } R$ とおく. $X \rightarrow B$ を分離的有限型な既約 B -スキームで, 構造射が全射であり, X_K が K 上幾何学的既約であるようなものとする. このとき, 有理点の集合 $X(\overline{R})$ が空でないための必要十分条件は, 各 $v \in \mathfrak{M}_R$ に対して $\overline{R}_v$ -有理点の集合 $X(\overline{R}_v)$ が空でないことである ($\overline{R}_v$ は, K_v の代数的閉包 $\overline{K}_v$ に於ける R_v の整閉包). $\diamond$

大域的な有理点の存在と局所有理点の存在とが等価であることを主張することから, ルメリーのこの定理は **局所・大域原理** (*local-global principle*) 等とも呼ばれる. 証明は長くなるのでここでは触れられないが, 超平面切断の議論を繰り返してアファイン曲線の場合に帰着した後, ルメリーのキャパシティ理論 (RUMELY's capacity theory) を用いて証明するものである (キャパシティ理論に付いては [Rumely2] を参照). なお, デイオファントス方程式に於いて $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -値の解を持つか否かに関しては有限的に判定する方法が存在することがモデル理論により知られているので, 局所・大域原理と合わせることで, $\overline{\mathbb{Z}}$ に於いてはヒルベルトの第10問題が肯定的に解決されるのである.

モレーバイーは [MB1] 及び [MB2] で, ルメリーの局所大域原理を, 上記の様に局所有理点の条件を強めた上で (任意の非完備なスコレム・データに対して拡張した), さらにキャパシティ理論を用いずに代数幾何学的方法で証明した (矢張り超平面切断を繰り返してアファイン曲線の場合に帰着した後, 因子類群の議論を用いる). その意味で, モレーバイーの定理は “精密化” 局所・大域原理 (*refined local-global principle*) と呼ばれたりもしている. その後モレーバイーの定理は, グリーン-ポップ-ロケット (GREEN-POP-ROQUETTE) [GPR] に依り付値論的方法で再証明されている.

これらの結果は、直接的な応用として、多様体の構成問題 (適当な “モジュライ空間” に局所・大域原理を適用する)^{*30}、体の構成問題に應用されたりしていたようである。だが、このような応用が突き詰められて、テイラーにより (ℓ, ℓ') トリックに利用され、更には佐藤-テイト予想を解決する原動力にまで発展するとは、流石のルメリーやモレ-バイイーも想像だにできなかったのではなかろうか。ディオファントス問題、スコレム問題から佐藤-テイト予想の解決に至るまでのダイナミックな歴史の胎動に触れ、近年の数論幾何学の目まぐるしい発展の営みに思いを馳せるのもまた一興であろう。

なお、スコレム問題を巡る歴史及びその応用に関しては、モレ-バイイーが非常に分かりやすく簡潔な要約 [MB3] を書いているので、興味のある方は是非参照されたい (英語で書かれているという点でも気楽に読めるのではないかと思う)。

◆

2.2 モレ-バイイーの定理の変形版 と モジュライ空間の幾何学的連結性

それでは、本稿で実際に用いるモレ-バイイーの定理の変形版を導入しよう。

命題 2.1 (モレ-バイイーの定理の変形版^{*31}). F を代数体とし、 $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$ を F の素点の有限集合で、互いに共通部分を持たず、さらに S_2 はアルキメデスの素点を含まないとする。また、 T/F を F 上滑らかかつ 幾何学的連結 な代数多様体とし、各 $v \in S_1$ に対して $T(F_v)$ の (v -進位相に関する) 空でない開集合 Ω_v が与えられ、各 $v \in S_2$ に対して $T(F_v^{\text{nr}})$ の空でない $\text{Gal}(F_v^{\text{nr}}/F_v)$ -安定な開集合 Ω_v が与えられ、なおかつ各 $v \in S_3$ に対して $T(\bar{F}_v)$ の空でない $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ -安定な開集合 Ω_v が与えられているとする。最後に、 L/F を任意の有限次拡大とする。

このとき、 F の有限次ガロワ拡大 F'/F 及び、 T の F' -有理点 P で、以下の条件を満たすものが存在する：

(MB-1) F'/F は L/F と線形無関連。

(MB-2) 各 $v \in S_1$ は F' で完全分解し、 v 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \subseteq T(F'_w)$ 。

(MB-3) 各 $v \in S_2$ は F' で不分岐で、 v 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \cap T(F'_w)$ 。

(MB-4) 各 $v \in S_3$ 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \cap T(F'_w)$ 。

◇

証明の概略。基本的に S_1, S_2, S_3 を取り替えていって、オリジナルのモレ-バイイーの定理に帰着させる方針である。

Step 1, 各単純部分ガロワ拡大 L_i/F で完全分解しないような素点 v を S_1 に付け加えること

^{*30} 本稿の初稿では、モジュライ空間への応用はあまりなされていなかったような記述をしてしまったが、完全な著者の不見識であった。

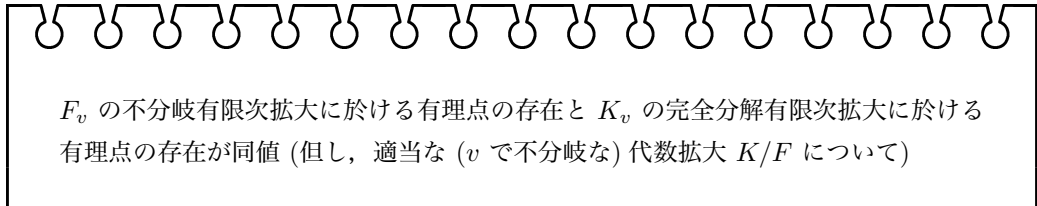
^{*31} [HSBT] の最新版で、 S_3 の部分がさらに拡張された。

で、線型無関連性 (MB-1) は (MB-2) から自動的に成立^{*32}.

- Step 2, 適当な有限次ガロワ拡大 K/F で, S_1 の全ての素点が完全分解し, S_2 の全ての素点が不分岐かつ十分大きい惰性次数を持ち, かつ S_3 の全ての素点における完備化が十分大きい体となるようなものをとることにより, 各 $w \in \Sigma_K$ に対して $\Omega_{v_w} \cap T(K_w)$ が空集合とならないように出来る. 但し, K の素点で S 上にあるもののなす集合を Σ_K とおき, 各 $w \in \Sigma_K$ の下にある S の素点を v_w と書いた.
- Step 3, スコレム・データ $\mathcal{S} = \{T_K \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K^S, \Sigma_K, \{K_w\}_{w \in \Sigma_K}, \{\Omega_{v_w} \cap T(K_w)\}_{w \in \Sigma_K}\}$ に対して モレ-バイイーの定理 ([MB2] 定理 1.3) を適用して, 既約閉部分多様体 $Y \hookrightarrow X$ を得る. 但し, S は Σ_K を真に含む K の素点の有限集合 (注意 9 参照).
- Step 4, このとき, K のある有限次拡大 F' が存在し, Y は F' -有理点を持つ (例えば Y の関数体を考えよ). 構成からこの F' -有理点が, 各 S_1, S_2, S_3 の素点に対し, (MB-2), (MB-3), (MB-4) を満たすことは明らかである.
- Step 5, 必要に応じて F' を F 上のガロワ閉包に取り替えれば良い.

□

纏めると,



であることから, 適当な代数拡大 K に対しては $S_2 = S_3 = \emptyset$ として良い という点に着目しさえすれば, オリジナルのモレ-バイイーの定理に帰着させることが出来るということが証明のポイントである.

我々は, この変形版モレ-バイイーの定理 2.1 を局所系 $\{V[N]_t\}_t$ のレベルを指定した T_0 の点のモジュライ空間に適用することに依って, (ℓ, ℓ') トリックに必要なモチーフを構成しようとしていたのであった. ここで, そろそろ件の “モジュライ空間” T_W を構成することしよう.

F を代数体とし, W を連続な $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用を持つ n 階 自由 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -加群とする. さらに, W は完全交代形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1-n)$ を持つものとする. W を自然

^{*32} ヘンゼルの補題とヴェイユの有界性を用いることで, T は殆ど全ての K の素点 v に対し K_v -有理点を持つことに注意.

に $\mathrm{Spec} F$ 上の滑らかなエタール層と見做そう．以上の設定の下で，反変関手

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ch/(T_0 \times \mathrm{Spec} F) &\rightarrow \mathcal{S}ets \\ X &\mapsto V[N] \text{ 及び } W \text{ の } X \text{ への引き戻しの,} \\ &\text{交代形式を保つ同型射のなす集合} \end{aligned}$$

を考える ($\mathcal{S}ch/(T_0 \times \mathrm{Spec} F)$ は $T_0 \times \mathrm{Spec} F$ -スキームのなす圏)．この関手は $T_0 \times \mathrm{Spec} F$ 上の有限エタール被覆 T_W に依って表現されることが分かる．これが，我々の考えるべきモジュライ空間である．直観的には， T_W は T_0 の点 t 及び同型 $f_t: V[N]_t \xrightarrow{\sim} W$ の組全体のなす空間である．

T_W にモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用するためには，何度も注意しているように T_W の幾何学的連結性を調べるのが肝要であったが (注意 9 参照)，これは $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の幾何的モノドロミーが大きいこと (補題 1.11) から直ちに従う：

系 1.12 (モジュライ空間 T_W の幾何学的連結性)． $W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$ を上記の通りとし，モジュライ空間 T_W を考える． $C(n)$ を補題 1.11 で導入される n のみに依存する定数とし， N を $C(n)$ より大きい素数のみを因数に持つ整数とする．このとき，任意の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して， $T_W(\mathbb{C})$ は連結となる．つまり， T_W は F 上のスキームとして 幾何学的連結である． $\diamond$

証明． 代数体 F の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ を予め固定しておこう． T_W の構成より，任意の $T_0 \times \mathrm{Spec} F$ -スキーム X に対し，

$$\mathrm{Hom}_{T_0 \times \mathrm{Spec} F}(X, T_W) \cong \{V[N] \text{ 及び } W \text{ の } X \text{ への引き戻しの, 交代形式を保つ同型射}\}$$

が成立する．特に， X として $\mathrm{Spec} \mathbb{C}$ をとることで， T_W の複素有理点 $x \in T_W(\mathbb{C})$ は， $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関する引き戻しと， $V[N]_t$ (t は x に対応する T_0 の複素有理点) の間の交代形式を保つ同型射 f_x に対応する ことが分かる．

さて， T_W の複素有理点 x 及び対応する $T_0 \times \mathrm{Spec} F$ の複素有理点 t を考えよう^{*33}．さらに，被覆空間 $\pi_W: T_W(\mathbb{C}) \rightarrow (T_0 \times \mathrm{Spec} F)(\mathbb{C})$ に於ける t のファイバーを $\pi_W^{-1}(t)$ と書くことにする．このとき，ファイバーの 2 点 x, x' に対応する同型射 $f_x, f_{x'}$ のズレが $V[N]_t$ のシンプレクティック自己同型射 $f_{x'} \circ f_x^{-1} \in Sp(V[N]_t)$ で表されることより，モノドロミー表現

$$\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow \mathrm{Aut}(\pi_W^{-1}(t)) \cong Sp(V[N]_t); [\gamma] \mapsto f_{\gamma_*x} \circ f_x^{-1}$$

が得られる (ここで γ_*x は， $T_0(\mathbb{C})$ の閉軌道 γ を $T_W(\mathbb{C})$ に持ち上げることで得られる x を始点とする道の，終点に対応する点)．補題 1.11 はこのモノドロミー表現が全射であることを

^{*33} 複素有理点に対応する埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ が固定されているので，以降 $T_0 \times \mathrm{Spec} F$ の複素有理点とその $T_0(\mathbb{C})$ -成分をしばしば断ることなく同一視する．

表しているのに他ならない. したがって, 任意の $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対し, そのファイバー $\pi_W^{-1}(t)$ 内の任意の 2 点は $T_W(\mathbb{C})$ の道で繋ぐことが出来る. つまり, $T_W(\mathbb{C})$ は (弧状) 連結. $\square$

3 潜在的モジュラー性 — *Potential modularity*

第 3 節では, §1, §2 で準備して来た道具を縦横無尽に駆使して, いよいよ本稿のハイライトである潜在的モジュラー性定理を証明する. ここで扱う潜在的モジュラー性定理は 2 つある; 一般的な GS_{p_n} 表現に対する潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) と GL_2 表現の対称積表現に対する潜在的モジュラー性定理 (定理 3.2) である.

本節ではまず, 「保型表現に対応するガロワ表現」や「ガロワ表現の保型性」の意味合いを明確にするために, RAESDC 表現 及び 付随するガロワ整合系 の概念を導入する. その後, 二つの主定理 (GS_{p_n} 表現の潜在的モジュラー性定理, 対称積表現の潜在的モジュラー性定理) の証明の概略を, 特に証明を複雑たらしめている技術的な困難及びその巧妙な回避法をなるべく分かり易く説明することを目標として述べることにする.

現代数論幾何学の華形の一つである潜在的モジュラー性定理及び (ℓ, ℓ') トリックの議論を存分に堪能されたい.

3.1 RAESDC 表現と付随するガロワ整合系

以下, 代数体 F は総実代数体であるとし, $\mathbb{A}_F$ を F のアデール環とする. また, n を自然数, ℓ を正の素数とし, 同型 $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を固定しておく.

さて, $GL_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π が RAESDC 表現 (*Regular Algebraic, Essentially Self Dual, Cuspidal representation*) であるとは, 以下の条件を満たすことである:

- (正則代数的, regular algebraic)
 π_∞ は, GL_n の F から $\mathbb{Q}$ への係数制限のある既約な代数的表現と同じ無限小指標を持つ.
- (本質的自己双対, essentially self dual)
 ある指標 $\chi: F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で, $\chi_v(-1)$ が無限素点 v の取り方に依らないものが存在して, $\pi^\vee \cong \chi\pi$ ($\pi^\vee$ は π の反傾表現) を満たす.
- (カスピダル, cuspidal)
 π はカスピダル表現.

RAESDC 表現 π が 重さ 0 (*of weight 0*) であるとは,

- π_∞ が $GL_n(F_\infty)$ の自明表現と同じ無限小指標を持つ

こととする (一般の重さの概念については [CHT] § 4.2, 4.3 参照). さらに, F の有限素点の空でない有限集合 S が与えられ, 各 $v \in S$ に対し ρ_v を $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約かつ二乗可積分 (square-integrable) な表現とすると, RAESDC 表現 π が $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型 (of type $\{\rho_v\}_{v \in S}$) であるとは,

- 各 $v \in S$ に対し, π_v が $\rho_v^\vee$ の不分岐捻りと同型

を満たすこととする. 最後に, 全ての ℓ 上の素点 $\mathfrak{l} \mid \ell$ に関して $\pi_{\mathfrak{l}}$ が不分岐であるとき, π はレベルが ℓ と素 (level prime to ℓ) と呼ぶ.

一見ただけではどうしてこのような表現を導入する必要があるか分かりにくい, 最も重要な点は RAESDC 表現からは志村多様体の理論を用いてガロワ整合系を構成出来ることである. 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π に対して (この様な表記をしたとき, 暗黙のうちに $S \neq \emptyset$ が仮定されていることを改めて注意しておく), クローゼル-ハリス-テイラー等に依り, 以下の性質を持つ連続既約 ℓ 進ガロワ表現

$$r_{\ell, \iota}(\pi): \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が構成されている ([CHT] 命題 4.3.1):

(性質-1) (局所ラングランズ対応との整合性) 全ての ℓ を割らない F の素点 v に対して,

$$WD(r_{\ell, \iota}(\pi)|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)})^{\Phi\text{-ss}} = \iota^{-1}(\mathrm{rec}(\pi_v) \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|_K^{(1-n)/2}).$$

ここで, WD は連続な有限次元 ℓ 進ガロワ表現に対応する ヴェイユ-ドリーニュ表現 (WEIL-DELIGNE representation), $\Phi\text{-ss}$ は ヴェイユ-ドリーニュ表現のフロベニウス半単純化, rec は ハリス-テイラー (HARRIS-TAYLOR) に依り与えられた局所ラングランズ対応 [HT], Art_K は アルティンの相互写像 (それぞれの詳しい定義は [TY] 等を参照)*³⁴.

(性質-2) $r_{\ell, \iota}(\pi)^\vee = r_{\ell, \iota}(\pi) \epsilon_\ell^{n-1} r_{\ell, \iota}(\chi)$.

ここで, ϵ_ℓ は 円分 ℓ 進指標, $r_{\ell, \iota}(\chi)$ は指標 $\chi: F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (RAESDC 表現の定義で登場した指標) に対応するガロワ指標 ([CHT] 補題 4.1.3 参照).

(性質-3) ℓ 上の F の素点 v に関して, $r_{\ell, \iota}(\pi)|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ は潜在的準安定表現 (potentially semi-stable representation) で, さらに π_v が不分岐ならばクリスタリン表現となる.

*³⁴ または, 同値な言い換えであるが「代数的正規化」された ℓ 進相互写像 r_ℓ ([HT] VII.1 参照) を用いて, $r_{\ell, \iota}(\pi)|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}^{\mathrm{ss}} = r_\ell(\iota^{-1}\pi_v)^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}$ とも書かれる ([CHT] 命題 4.3.1).

(性質-4) ℓ 上の F の素点 v と, v に対応する埋め込み $\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に対して,

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{gr}^i(r_{\ell,\iota}(\pi) \otimes_{\tau, F_v} B_{DR})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)} = \begin{cases} 1 & 0 \leq i \leq n-1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

但し, B_{DR} は フォンテーヌ (Fontaine) の p 進 ド・ラーム周期環.

また, 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π のレベルが ℓ と素の時は, 適当に $r_{\ell,\iota}(\pi)$ の像の共役をとって $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ に含まれるようにしたのち, ℓ での還元をとって半単純化すると, 連続半単純表現

$$\bar{r}_{\ell,\iota}(\pi): \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

が得られる (これは共役の取り方に依らない).

ℓ 進ガロワ表現

$$r: \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が或る 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π に対し $r_{\ell,\iota}(\pi)$ と同型となると, r は 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的 (*automorphic of weight 0 and type $\{\rho_v\}_{v \in S}$*) と呼ぶ. また, 法 ℓ ガロワ表現

$$\bar{r}: \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

が或る 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の レベルが ℓ と素な RAESDC 表現 π に対し $\bar{r}_{\ell,\iota}(\pi)$ と同型となると, $\bar{r}$ は 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的 (*automorphic of weight 0 and type $\{\rho_v\}_{v \in S}$*) と呼ぶ. 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型 RAESDC 表現に付随するガロワ表現達 $\{r_{\ell,\iota}(\pi)\}_\ell$ はガロワ整合系をなすことに注意しよう.

注意 14. 以下の注意は, テイラー等が証明した佐藤-テイト予想に於ける「弱い仮定」と直接関わる注意であるが, 著者の実力不足のためその深い背景にまでは迫ることが出来ないことをお詫びしておく.

- 志村多様体の理論を用いた保型表現からのガロワ表現の構成は, CM 体及び総実体の場合にしか行われていない^{*35}. この様に自在に保型表現からガロワ表現が構成出来ないという困難が, 「 $R = \mathbb{T}$ 」定理やモジュラー性持ち上げ定理に於いて様々な仮定を必要とする一つの要因となっている.
- $S \neq \emptyset$ に対して π が $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型と言うことは, π は少なくともある素点に於いて二乗可積分であることが要求されることを意味する. これは, 局所ラングランズ対応に於いて生ずるエンドスコピーの跡公式への寄与から生じる困難を回避するための条件であ

^{*35} 虚数乗法論の一般化であると言う観点から考えると納得し易いかもしれない.

る. この「ある素点に於いて二乗可積分」という仮定により大分計算の複雑さが軽減されることもあり, 現時点ではこの仮定を外すことは出来ていない..... という状況も今は昔の話で, 今や保型表現の研究 (及び「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の研究) の発達は日進月歩であり, この人工的な仮定が外される日が来るのもそう遠い将来の話ではない (らしい). なお, この条件が, 佐藤-テイト予想が証明されているケース (定理 4.3) に於いて, j -不変量が整数で無いという制限が課されてしまう源流となっている. $\blacklozenge$

例 (一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\pi)$). K を局所体, $n \mid N$ とする. π を $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ のスーパー・カスピダル 表現とし, Q_n を GL_N の放物型部分群 (parabolic subgroup) で, そのレヴィ因子 (LEVI component) が $\mathrm{GL}_{N/n}^n$ で与えられるものとする. このとき,

$$\pi \times (\pi \otimes |\det|) \times \dots \times (\pi \otimes |\det|^{n-1})$$

の Q_n に依る正規誘導表現の中に現れる唯一の“生成的な”部分商 (generic subquotient) を $\mathrm{Sp}_n(\pi)$ と書き, π に付随する $\mathrm{GL}_N(K)$ の n 次一般化スタインバーグ表現 (generalized STEINBERG representation) と呼ぶ (より厳密な定義及び諸性質については [HT] I.3 参照). $\mathrm{GL}_n(K)$ の全ての二乗可積分表現はある $n \mid N$ 及び $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ のスーパー・カスピダル表現 π から定まる一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\pi)$ と同型となることが知られている. 特に $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ の自明表現 $\mathbb{1}$ から定まる一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1})$ をスタインバーグ 表現 (STEINBERG representation) と呼ぶ. このとき, $\sharp\kappa(K)$ と素な素数 ℓ に対して, $r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}$ は フィルトレーション

$$\mathrm{gr}^j r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}} \cong \epsilon_\ell^j, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

を持つので, K の幾何学的フロベニウス元 Frob_K に対して $r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Frob}_K)$ の固有値 (フロベニウス固有値) は, $1, (\sharp\kappa(K))^{-1}, \dots, (\sharp\kappa(K))^{1-n}$ で与えられる. 逆に, π が二乗可積分 (もっと弱く緩増加 (tempered) でも良い) で, π に対応するガロワ表現 $r_\ell(\pi)^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}$ が不分岐かつそのフロベニウス固有値がある $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ に対して $\alpha, \alpha\sharp(\kappa(K))^{-1}, \dots, \alpha(\sharp\kappa(K))^{1-n}$ となるならば, π は $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1})$ の不分岐捻りであることが従う. $\diamond$

3.2 $GS\mathrm{p}_n$ 表現の潜在的モジュラー性定理

ついに本稿のメイン・キャストである 潜在的モジュラー性定理 (Potential Modularity Theorem) の登場である. 先ずは, そのステイトメントを紹介しよう. 正の偶数 n に対し, 代数群 $GS\mathrm{p}_n$ を

$$GS\mathrm{p}_n = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n \mid \exists \nu: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{G}_m \text{ s.t., } gJ_n {}^t g = \nu(g)J_n, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ -I_{n/2} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

で定義し、倍率 (*multiplier, similitude*) 付きシンプレクティック群 と呼ぶこととする (但し、 $I_{n/2}$ は $n/2$ -次単位行列).

定理 3.1 ($GS p_n$ 表現の潜在的モジュラー性定理). F/F_0 を総実代数体のガロワ拡大とし、 $n_1, n_2, \dots, n_t$ を 正の偶数 とする. ℓ を $\max\{C(n_i), n_i\}$ ($C(n_i)$ は 補題 1.11 にて導入された数) より大きい F で不分岐な素数とし、完全分解条件

$$(\dagger) \quad \ell \equiv 1 \pmod{n_i + 1} \quad (\text{各 } i = 1, 2, \dots, t \text{ に対し})$$

を満たすものとする. さらに素数 q を各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $q \nmid (n_i + 1)$ を満たすものとし、 v_q を q 上の F の素点とする. $\mathcal{L}$ を、 ℓq 上の素点を含まない F の素点の有限集合で、 $\text{Gal}(F/F_0)$ の作用で安定なものとする.

さて、各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して

$$r_i: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow GS p_{n_i}(\mathbb{Z}_\ell)$$

を以下の 5 つの性質を満たす殆ど全ての素点で不分岐な連続表現とする:

- (性質-1) 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対し、 r_i の倍率 (multiplier) は $\epsilon_\ell^{1-n_i}$. 但し、 ϵ_ℓ は ℓ 進円分指標.
- (性質-2) r_i の法 ℓ 還元 $\bar{r}_i$ に対し、 $\bar{r}_i(\text{Gal}(\overline{F}/F(\mu_\ell)))$ は $(\text{GL}_{n_i}(\overline{\mathbb{F}}_\ell))$ の中で) 大きく、さらに $\bar{F}^{\ker \text{ad } \bar{r}_i}$ は $F(\mu_\ell)$ を含まない. 但し、 μ_ℓ は 1 の ℓ 乗根のなす乗法群で、 $\text{ad } \bar{r}_i$ は $\bar{r}_i$ の随伴表現.
- (性質-3) r_i は $\mathcal{L}$ 上の全ての素点で不分岐.
- (性質-4) w を ℓ 上の F の素点とすると、 $r_i|_{\text{Gal}(\overline{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり、埋込み $\tau: F_w \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \text{gr}^j(r_i \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq j \leq n_i - 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

が成立する. さらに、

$$\bar{r}_i|_{I_{F_w}} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n_i}$$

も成立する.

- (性質-5) $r_i|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ は不分岐表現で、その幾何学的フロベニウス元 Frob_{v_q} に於ける固有値はある $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に対して $\alpha, \alpha \# \kappa(v_q), \dots, \alpha (\# \kappa(v_q))^{n_i-1}$ となる. 但し $\kappa(v_q)$ は v_q の剰余体.

このとき、総実代数体 F'/F で F_0 上ガロワ拡大かつ $\bar{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 達の合成体と F 上線形無関係なものが存在し、以下の性質を満たす.

- $\mathcal{L}$ 及び ℓ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐.
- v_q 上の F' の素点 w_q が存在して, 各 $r_i|_{\text{Gal}(\overline{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となるものが存在する. 但し, $\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})$ は n_i 次のスタインバーグ表現. $\diamond$

ここで, 有限次元 $\overline{F}_\ell$ -ベクトル空間 V に対し, $\text{GL}(V/\overline{F}_\ell)$ の部分群 Δ が大きい (*big*) とは, Δ が位数 ℓ -冪の剰余を持たず, さらに

- $H^0(\Delta, \text{ad}^0 V) = H^1(\Delta, \text{ad}^0 V) = 0$ (但し $\text{ad}^0 V$ は $\text{ad} V$ のトレース 0 部分).
- $\text{ad} V$ の全ての既約 $\overline{F}_\ell[\Delta]$ -部分加群 W に対して, 或る $h \in \Delta$ 及び $\alpha \in \overline{F}_\ell$ で以下の条件を満たすものが存在する:
 - h の固有値 α に関する一般化固有空間 $V_{h,\alpha}$ の次元が 1.
 - V から $V_{h,\alpha}$ への射影を $\pi_{h,\alpha}$, $V_{h,\alpha}$ から V への埋め込みを $i_{h,\alpha}$ とするとき, $\pi_{h,\alpha} \circ W \circ i_{h,\alpha} \neq 0$.

を満たすことであり, [CHT] 及び [Taylor4] で扱われるモジュラー性持ち上げの議論に於いて重要な概念であるが, ここではあまり深入りしないことにする. [安田・千田]などを参照されたい. また, 大きい部分群の例については, [CHT] の 2.5 節 及び [SW] を参照.

注意 15. 御覧の通り, 潜在的モジュラー性定理はその仮定や条件が入り組んでいるため, ステイトメントだけでも非常に複雑で難解なものとなってしまう. そこで, いきなり証明にとりかかる前に, まずはこの大量の条件がそれぞれ何のために必要かを概観しておこう.

(性質-1), (性質-4), (性質-5) は, 各 r_i をカラビ-ヤウ族 $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の局所系 $\{V_{n_i,\ell,t}\}_t$ から得られる ℓ 進表現 $V_{n_i,\ell,t}$ と結びつけるために必要な条件である. 特に (性質-4), (性質-5) は § 1.3 で調べた $V_{n_i,\ell,t}$ の性質と見比べていただくと分かりやすいであろう. また, (性質-1) は局所系 $\{V_{n_i,\ell,t}\}_t$ に於いて, ポワンカレ双対性から誘導される交代形式に依るテイト捻りと対応している. これらの性質を仮定しないと, モレーバイイーの定理の変形版 (命題 2.1) で考える局所有理点の集合 Ω_v が空集合になってしまう可能性がある.

(性質-2), (性質-3) は主にセルマー群 (SELMER group) を扱うために必要な条件であり, 潜在的モジュラー性そのものに関係すると言うよりは [CHT], [Taylor4] で考察されるモジュラー性持ち上げ定理 (*Modularity Lifting Theorem*) で必要とされる条件である. $\blacklozenge$

証明の概略. 大胆に言い切ってしまうならば, この定理の証明は本質的に (ℓ, ℓ') トリックを実行しているだけである. ここではモジュラー性が既知の表現を如何に構成するか, 若しくは実際に如何にして (ℓ, ℓ') トリックを実行するかということを丁寧に見るために, 証明の詳細までなるべく詳しく書くこととした.

Step 1, 「モジュラー性が既知な表現」の構成 (ℓ' サイド)

先ずは, ℓ' サイドの表現, 即ち 予め保型的であることが分かっている表現 を構成す

る. これは, 適当なヘッケ指標に対応するガロワ指標の保型誘導表現 として実現するのであった.

さて, E を虚二次体とし, n_i 次巡回ガロワ CM 体 $M_i/\mathbb{Q}$ を以下の条件を満たす様に取る:

- ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下にある $\mathbb{Q}$ の素点は M_i で不分岐.
- 各 M_i 達の合成体は, F のガロワ閉包と E との合成体と $\mathbb{Q}$ 上線型無関連.

ガロワ群 $\text{Gal}(M_i/\mathbb{Q})$ の生成元を τ_i とおき, 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して p_i を M_i に於いて惰性的かつ不分岐で, EF_0 に於いて完全分解する様な素数とする. F のアデール環の有限部分を $\mathbb{A}_F^{\text{fin}}$ とする. このとき, 連続指標

$$\psi_i: (\mathbb{A}_{M_i}^{\text{fin}})^{\times} \rightarrow \overline{M_i}^{\times}$$

で, 以下の性質を満たすものが構成出来る ([HSBT] 補題 2.2 参照):

- $\psi_i|_{M_i^{\times}}(a) = \prod_{j=0}^{n_i/2-1} \tau_i^j(a^j) \tau_i^{j+n_i/2}(a^{n_i-1-j})$.
- $\psi_i|_{(\mathbb{A}_{M_i^+}^{\text{fin}})^{\times}}(a) = \prod_v |a|_v^{1-n_i}$. 但し, CM 体 M に対し, その最大総実部分体を M^+ と書いた.
- ψ_i は ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下の素数に於いて不分岐.
- 各 $j = 1, 2, \dots, n_i - 1$ に対し, $\psi_i|_{\mathcal{O}_{M_i, p_i}^{\times}} \neq \psi_i^{\tau_i^j}|_{\mathcal{O}_{M_i, p_i}^{\times}}$.
- ψ_i は E で完全分解する様な有理素数上でのみ分岐する.

続いて適当な素数 ℓ' に対, ψ_i を “ ℓ' 進化” する; $\widetilde{M_i}$ を ψ_i の像を含む M_i の有限次拡大で, $\mathbb{Q}$ 上ガロワ拡大であるものとする. このとき, ℓ' を以下を満たす様にとる:

- ℓ' は $EF\widetilde{M_1} \dots \widetilde{M_t}(\zeta_{n_1(n_1+1)}, \dots, \zeta_{n_t(n_t+1)})$ で完全分解.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して, $\ell' > 8((n_i + 2)/4)^{n_i/2+1}$.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して, $\ell' > C(n_i)$.
- ℓ' は E の類数を割り切らない.
- 各 $\bar{r}_i$ は ℓ' で不分岐.
- 各 ψ_i は ℓ' で不分岐.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対し, $\ell' \nmid (p_i^{n_i} - 1)$.
- 各 $j = 1, 2, \dots, \max_i \{n_i\} - 1$ に対し, $\ell' \nmid (q^j - 1)$.
- $\ell' \neq \ell, \ell' \neq q$ かつ, ℓ' は $\mathcal{L}$ の下の素数ではない.

さて, $\tilde{w}_{\ell', i}$ を ℓ' 上の $\widetilde{M_i}$ の素点とし, $w_{\ell', i} = \tilde{w}_{\ell', i}|_{M_i}$ とする. このとき,

$$\psi_{i, \ell'}: M_i^{\times} \setminus (\mathbb{A}_{M_i}^{\text{fin}})^{\times} \rightarrow \widetilde{M_{i, \tilde{w}_{\ell', i}}}^{\times}$$

を $\psi_{i, \ell'}(a) = \psi_i(a) \prod_{j=0}^{n_i/2-1} a_{\tau_i^{-j} w_{\ell', i}}^{-j} a_{\tau_i^{-j+n_i/2} w_{\ell', i}}^{j+1-n_i}$ として定義し, これをアルティンの相互写像 Art_{M_i} と合成させて $\tilde{w}_{\ell', i}$ で還元を取ることで, 法 ℓ' ガロワ 指標

$$\bar{\theta}_i: \text{Gal}(\overline{M_i}/M_i) \rightarrow \mathbb{F}_{\ell'}^{\times}$$

を得る．構成よりこの $\bar{\theta}_i$ は以下の性質を持つ；

- $\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i^c = \epsilon_{\ell'}^{1-n_i}$ ．但し， c は任意の複素共役．
- 任意の $1 \leq j \leq n_i/2 - 1$ に対して， $\bar{\theta}_i|_{I_{M_i, \tau_i^j w_{\ell'}, i}} = \epsilon_{\ell'}^{-j}$ ．
- $\bar{\theta}_i$ は ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下の素点に於いて不分岐．
- 任意の $1 \leq j \leq n_i - 1$ に対して $\bar{\theta}_i|_{I_{M_i, p_i}} \neq \bar{\theta}_i^{\tau_i^j}|_{I_{M_i, p_i}}$ ．
- $\bar{\theta}_i$ は E で完全分解する様な有理素数でのみ分岐．

$\bar{\theta}_i$ の誘導表現 $\text{Ind}_{\text{Gal}(\bar{M}_i/M_i)}^{\text{Gal}(\bar{M}_i/\mathbb{Q})} \bar{\theta}_i$ 上に

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(\bar{M}_i/M_i) \setminus \text{Gal}(\bar{M}_i/\mathbb{Q})} \epsilon_{\ell'}(\sigma)^{n_i-1} \varphi(\sigma) \varphi'(c\sigma)$$

で交代形式を定義すれば（これは複素共役 c の取り方に依らない．また，交代性は n_i が偶数であることから従う）， $\text{Ind}_{\text{Gal}(\bar{M}_i/M_i)}^{\text{Gal}(\bar{M}_i/\mathbb{Q})} \bar{\theta}_i$ は法 ℓ' 表現

$$I(\bar{\theta}_i): \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GSp_{n_i}(\mathbb{F}_{\ell'})$$

を誘導する． $\bar{\theta}_i$ の構成に依り， $I(\bar{\theta}_i)$ の倍率も $\epsilon_{\ell'}^{1-n_i}$ であることが分かる．

Step 2, (ℓ, ℓ') トリック

K を各 $\bar{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 及び $\bar{\mathbb{Q}}^{\ker I(\bar{\theta}_i)}$ 達の合成体とする．また， W_i を $\bar{r}_i \times I(\bar{\theta}_i)$ に対応する階数 n_i の自由 $\mathbb{Z}/\ell\ell'\mathbb{Z}$ -加群とする．

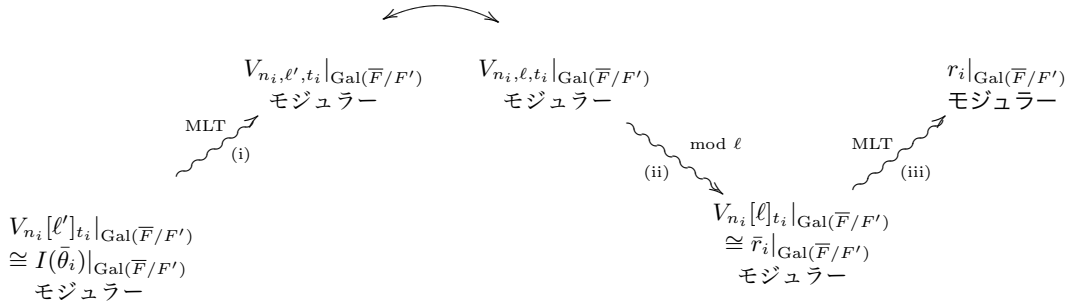
以下，§2.2 で考察した $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の局所系 $\{V_{n_i, \ell\ell', t}\}_t$ のレベル構造 W_i を指定した T_0 の点のモジュライ空間 $T_{W_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ にモレバイイーの定理の変形版（命題 2.1）を適用する．

より具体的には， $S_1 = \{\text{無限素点}\}$ ， $S_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell\ell' \text{ 上の素点}\}$ ， $S_3 = \{v_q\}$ とおき，各素点 $w \in S (= S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ での局所有理点の条件 $\Omega_{i,w} \subseteq T_{W_i}(\bar{F}_w)$ を以下で定める：

$$\begin{aligned} \Omega_{i,w} &= T_{W_i}(F_{v_q}) \quad (w \in S_1 \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体} \\ &\quad (w \in S_2 \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,v_q} &= (\{t \in T_0(\bar{F}_{v_q}) \mid v_q(t) < 0\} \text{ の } T_{W_i}(\bar{F}_{v_q}) \text{ での逆像}) \subseteq T_{W_i}(\bar{F}_{v_q}) \end{aligned}$$

として命題 2.1 を用いる（各 $\Omega_{i,w}$ が空でないことは定義から簡単に分かる）．命題 2.1 を繰り返し用いることで，漸進的に総実代数体 F_i/F 及び F_i -有理点 $\tilde{t}_i \in T_{W_i}(F_i)$ を

- F_i/F は ガロワ 拡大．
- F_i/F は $\mathcal{L}$ 及び $\ell\ell'$ 上の素点で不分岐．
- F_i は $KF_1F_2 \dots F_{i-1}$ と F 上線形無関連．
- 全ての $w \in S$ に対して， $\tilde{t}_i$ は $\Omega_{i,w}$ に含まれる．


 図5 定理 3.1 に於ける (ℓ, ℓ') トリック

を満たすように構成することができる.

$\tilde{F} = F_1 F_2 \dots F_t$ は F の総実ガロワ拡大となり, S_1 の素点は全て $\tilde{F}$ で完全分解し, S_2 の素点は全て $\tilde{F}$ で不分岐となり, しかも $\tilde{F}$ は K と F 上線形無関連になる. また, $t_i \in T_0(\tilde{F})$ を $\tilde{t}_i$ の像とすると, 構成法から $V_{n_i}[\ell]_{t_i} \cong \bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F})}$ 及び $V_{n_i}[\ell']_{t_i} \cong I(\bar{\theta}_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F})}$ が成立する. さらに, Y_{n_i, t_i} は $\ell\ell'$ で良い還元を持つので, V_{n_i, ℓ, t_i} は ℓ に於いてクリスタリン表現かつ ℓ' に於いて不分岐表現. 同様に V_{n_i, ℓ', t_i} は ℓ に於いて不分岐表現かつ ℓ' に於いてクリスタリン表現. w を v_q 上の $\tilde{F}$ の素点とすると, $V_{n_i, \ell', t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$ の半単純化は不分岐で, そのフロベニウス固有値は $\beta, \beta(\#k(w)), \dots, \beta(\kappa k(w))^{n_i-1}$ (但し, $\beta \in \{\pm 1\}$. β は w に依存する) となる.

Step 3, 証明の完成

F' を $\tilde{F}$ の F_0 上のガロワ閉包とする. F' は $\bar{F}^{\ker(\bar{r}_i)}$ 達の合成体と F 上線形無関連である*36.

- (i) $V_{n_i}[\ell']_{t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong I(\bar{\theta}_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ にテイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.6) を適用して, $V_{n_i, \ell', t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的となる.
- (ii) また, レベルは ℓ とも素だから, 法 ℓ で考えて, $V_{n_i}[\ell]_{t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong \bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的.
- (iii) テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.2) に依り, $V_{n_i, \ell, t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的となることが従う.

□

幾分長い証明に見えるかもしれないが, 図5を見れば本質的に行われている議論が (ℓ, ℓ') ト

*36 これもモジュラー性持ち上げに必要な条件.

リックのみであることがご理解いただけるのではないかと思います。但し、定理 3.1 に於いては素数 ℓ の完全分解条件 (†), q が各 $n_i + 1$ を割り切らない条件等といった余計な条件が色々と付随しており、残念ながらこのままではあまり使い勝手が良い定理とは言えない。次節では主に GL_2 表現の対称積表現 という特別な GS_p 表現のときに、この様な余計な条件を外してより使いやすい定理に改良することを目指す。

注意 16. 実は 定理 3.1 の証明は『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』が開催された当時から比べると大分簡略化されてしまった ([HSBT] の初期の版では証明に 5 ページ程割かれていたが、最新版では 3 ページにまで削ぎ落とされている)。これは、主にモジュラー性持ち上げ定理側 (「 $R = \mathbb{T}$ 」側) の改良に依るものである。モジュラー性持ち上げ定理に関しては安田氏、千田氏の解説 [安田・千田] もあるのであまり深入りするつもりはないが、そうは言っても証明が飛躍的に簡略化された理由に興味を持たれる方は多いと思われるので、その点にのみ焦点を絞って解説することにしよう。

総実代数体 F の絶対ガロワ群の ℓ 進表現 $\rho: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対し、その法 ℓ 還元 (の半単純化) を $\bar{\rho}$ とする。モジュラー性の持ち上げの問題 とは「 $\bar{\rho}$ がモジュラー表現である時、そのモジュラー性を ρ に持ち上げられるか？」という問題であった。特別な GL_n 表現については クローゼル、ハリス、テイラーが井原の補題の一般化を仮定した下でモジュラー性の持ち上げ定理を証明し ([CHT] 定理 4.4.2), その後テイラーが マーク・キシン (Mark KISIN) の枠付き変形環の理論を用いることで井原の補題の一般化を仮定することなく証明した ([Taylor4] 定理 5.2, 5.4)。

さて、クローゼル-ハリス-テイラーのモジュラー性持ち上げ定理の条件の中に、以下のものがある^{*37}：

(DS-1) ℓ を割らない F の素点の空でない有限集合 S が存在し、各 $v \in S$ に対し $\text{GL}_n(F_v)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の二乗可積分表現 ρ_v が存在し、

$$r|_{\text{Gal}(\overline{F}/F)}^{\text{ss}} = r_\ell(\rho_v)^\vee (1 - n)^{\text{ss}}$$

が成り立つ。

(DS-2) $\rho_v = \text{Sp}_n(1)$ (スタインバーグ表現) の時、

$j = 1, 2, \dots, n$ に関して $e_\ell^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ 。

F_v のフロベニウス固有値で言い換えると、 $j = 1, 2, \dots, n$ に関して $(\sharp\kappa(v))^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ 。

$\rho_v = \text{Sp}_n(\pi)$ (一般化スタインバーグ表現) の際にも同様の非同位性条件が付される (より複雑となるが)。

^{*37} [CHT] 定理 4.4.2, [Taylor4] 定理 4.4 の ステイトメント中の条件 5. 正確なステイトメントは原論文を参照のこと。

この条件をここでは「DS 条件」と呼ぶことにしよう. (DS-1) はハリス-テイラーの局所ラングランズ対応 [HT] に依って, ガロワ表現 $r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)}^{\mathrm{ss}}$ が離散系列表現 (*Discrete Series representation*) に対応するということを主張している. 「DS 条件」という呼称もこのことに因んだ. この条件は, 現在のところある有限素点に於いて二乗可積分な保型表現でなければそれに伴うガロワ表現が構成されていないことに由来して付されたものである (注意 14 参照). 他方 (DS-2) は, v に於ける局所変形問題をなるべく単純かつ「扱いやすい」ものに制限するために付されている条件であり, その意味では極めて技術的な仮定と言えよう.

(ℓ, ℓ') トリックを実行するに当たり問題となったのは (DS-2) の非合同条件であった. (ℓ, ℓ') トリックを行う際, モジュライ空間に モレ-バイイーの定理を適用することに依って基礎体の拡大が生じてしまうために, この 非合同条件が成立しなくなってしまう 可能性が出てくるからである. この問題を回避するために, [HSBT] の初期の稿では大雑把に言えば 素点や体を次々と取り替える というアイデアを駆使して回り諄い議論を重ねた上で 定理 3.1 を証明していた.

ところが, [Taylor4] (の最新版) に於いて改良されたテイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.4) に於いては, ρ_v がスタインバーグ表現の際に (DS-2) の非合同条件が外された (つまり, スタインバーグ表現に対応する v に於いては, より複雑な局所変形環も扱える様になったということである). 上記の証明を見ると分かる様に, 潜在的モジュラー性定理の証明に於いては ρ_v がスタインバーグ表現の場合しか扱わないため, テイラーのモジュラー性持ち上げ定理が上記のように改良されたことに依り証明が大幅に簡略化されたのである.

なお, 以前この定理の証明が如何に複雑だったかを比較するために, 付録として初期バージョンの 定理 3.1 の証明を載せることとした (付録 B). 興味がある方は読み比べられるのもまた一興かと思う. ◆

注意 17 ([Taylor4] 定理 5.6 について). 補題 1.15 より, カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた (ℓ, ℓ') トリックに於いては, スタインバーグ型の惰性表現のみを考えれば十分であることが分かる. そのために素数 q に対する局所スタインバーグ条件, 特に (性質 5) が r_i 達に付されている. しかし, ヘッケ指標 θ_i の ℓ' 進持ち上げの保型誘導表現 $I(\theta_i)$ 達 (これが保型性が既知の表現である) は決して局所スタインバーグ型にはならない (!) そのかわり, 証明中で導入した素数 p_i に於いて局所スーパー・カスピダル型になる.

そこで, [Taylor4] 定理 5.6 では, $I(\bar{\theta}_i)$ のもう一つの持ち上げ ρ_i で, v_q で局所スタインバーグ的なものを構成し,

$I(\theta_i)$ は重さ 0, $\{\rho_{v_p}\}_{\{v_p\}}$ 型で保型的
 $(v_p \text{ は } p \text{ 上の素点, } \rho_{v_p} \text{ はスーパー・カスピダル表現})$
 $\Rightarrow I(\bar{\theta}_i) \cong \bar{\rho}_i$ は重さ 0, $\{\rho_{v_p}\}_{\{v_p\}}$ 型で保型的
 $\Rightarrow \rho_i$ は重さ 0, $\{\rho_{v_p}\}_{\{v_p\}}$ 型で保型的
 (テイラーの保型性持ち上げ定理 [Taylor4] 定理 5.2)
 $\Rightarrow \rho_i$ は重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型的^{*38}
 $\Rightarrow \bar{\rho}_i \cong I(\bar{\theta}_i) \cong V_{n_i}[\ell']_{t_i}$ は重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型的
 $\Rightarrow V_{n_i, \ell', t_i}$ は重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型
 (テイラーの保型性持ち上げ定理 [Taylor4] 定理 5.2)
 の様にして $I(\bar{\theta}_i)$ の保型性を V_{n_i, ℓ', t_i} に持ち上げている (基礎体の拡大等細かい部分は割愛している. 正確な証明は [Taylor4] 定理 5.6 を参照のこと). $\blacklozenge$

3.3 対称積表現の潜在的モジュラー性

今度は GL_2 ガロワ表現の対称積表現に対して潜在的モジュラー性定理を証明しよう. §0 でも触れた通り, 佐藤-テイト予想への応用には対称積表現に対する潜在的モジュラー性が本質的である.

定理 3.2 (対称積表現の潜在的モジュラー性). F を総実代数体とし, $n_1, n_2, \dots, n_t$ を正の偶数とする. また, ℓ を $\max\{C(n_i), 2n_i + 1\}$ より大きい F で不分岐な素数とし ($C(n_i)$ は補題 1.11 で導入された数), q を ℓ と異なる素数とする.

さて,

$$r: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

を, 以下の 3 つの性質を満たす殆ど全ての素点で不分岐な総奇連続表現^{*39}とする:

(性質-1) r は全射.

(性質-2) w を ℓ 上の F の素点とすると, $r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり, 埋め込み $\tau: F_w \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{gr}^j(r \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & j = 0, 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$$

^{*38} RAESDC 表現がある素点に於いて二乗可積分であれば, その全ての有限素点に於いて緩増加になること ([HT] 系 VII.1.11) より, ρ_i は素点 v_q に於いて緩増加表現 π_{v_q} に対応する. さらに, $r_{\ell'}(\iota^{-1}\pi_{v_q})^\vee(1-n_i)^{\mathrm{ss}}$ が不分岐かつ, そのフロベニウス固有値が $\{\alpha_{i,q}(\#\kappa(v_q))^j\}_{0 \leq j \leq n_i-1}$ の形となる緩増加表現はスタインバーク表現の不分岐捻りのみであることに注意せよ.

^{*39} 連続表現 $\rho: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ が総奇 (totally odd) とは, 任意の複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ について $\det \rho(c) = -1$ が成り立つこととする.

が成立する.

(性質-3) q 上完全分解する F の素点 v_q が存在して, $r|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ は不分岐表現で,

$r|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}(\text{Frob}_{v_q})$ の固有値はある $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を用いて $\alpha, \alpha \sharp \kappa(v_q)$ と表される.

このとき, 素数 ℓ が不分岐であるような総実ガロワ拡大 F''/F 及び v_q 上の F'' の素点 w_q で, 各 $\text{Symm}^{n_i-1} r|_{\text{Gal}(\overline{F}/F'')}^{\text{ss}}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型 で保型的となるようなものが存在する. $\diamond$

注意 18. 実は, r の法 ℓ 還元 $\bar{r}$ が全射であることから (これは (性質-1) に依る), $\overline{\text{Symm}^{n_i-1} r}^{\text{ss}}(\text{Gal}(\overline{F}/F(\mu_\ell)))$ が大きい ことが従う ([CHT] 系 2.5.4). $\blacklozenge$

§ 3.2 でも触れた通り, 定理 3.1 で登場する q 及び ℓ の局所条件 ($\ell \equiv 1 \pmod{n_i+1}$, $q \nmid (n_i+1)$) を外すために, 楕円曲線のモジュライを利用した (ℓ, ℓ') トリック が活躍するのである.

証明の概略. この証明も, 段階を分けて解説してゆこう. 先ず, $F_1 = \overline{F}^{\ker(\epsilon_\ell \det r)}$ とすると, F_1 は総実代数体となり, ℓ は F_1 に於いて不分岐となる.

Step 1, 下準備

以下を満たす素数 q' 及びその上の F の素点 $v_{q'}$ を選ぶ;

- r は q' 上不分岐.
- $\bar{r}(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, \sharp \kappa(v_{q'})$ を持つ.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $q' \nmid (n_i+1)$.
- $q' \neq q$ かつ $q' \neq \ell$.

同様に, 以下の性質を満たす素数 ℓ' を選ぶ;

- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $\ell' \equiv 1 \pmod{n_i+1}$.
- $\ell' \neq \ell, q, q'$.
- $\ell' > \max\{C(n_i), n_i\}$.
- ℓ' は F_1 で不分岐.
- r は ℓ' で不分岐.

なるものをとる.

ℓ' は (ℓ, ℓ') トリックのために使う素数, q' は証明中でのみ用いる “補助的な” 素数. 特に, 下線部の条件が 定理 3.1 で必要とされる条件のうち 定理 3.2 の仮定に含まれていないものであり, この部分を ℓ', q' に押しつけているわけである. ◆

また, 楕円曲線 E_1/F で

- E_1 は ℓ 上の素点に於いて良い還元を持つ.
- E_1 は 素点 v_q 及び $v_{q'}$ に於いて潜在的乗法還元 (potentially multiplicative reduction) を持つ.
- E_1 は ℓ' 上の素点に於いて良い通常還元を持つが, $H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ は ℓ' に於いて馴分岐.
- 自然な射 $\text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}))$ は全射.

を満たすものをとる^{*40}.

Step 2, 楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリック

W を $\bar{r} \times H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ に対応する階数 2 の自由 $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}$ -加群とする. W には $\text{Gal}(\bar{F}/F_1)$ が自然に作用する. さらに, W には自然な完全交代形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}(-1)$$

が定まる ($\bar{r}$ には $GL_2 = GSp_2$ 表現として完全交代形式が定まり, 一方 $H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ にはポワンカレ双対性から完全交代形式が定まる). W を $\text{Spec } F_1$ 上の滑らかな エタール 層と自然に同一視しておこう.

さて, $\text{Spec } F_1$ 上局所ネーター的 (locally noetherian) なスキームのなす圏 $\text{loc-noeth-}\mathcal{S}ch/\text{Spec } F_1$ から集合の圏 $\mathcal{S}ets$ への反変関手

$$\text{loc-noeth-}\mathcal{S}ch/\text{Spec } F_1 \rightarrow \mathcal{S}ets$$

$$S \mapsto \{(E, i) \text{ の同型類 } \}$$

但し, $\pi: E \rightarrow S$ は楕円曲線

$$i: W \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*(\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}) \text{ は交代形式を保つ同型}$$

のモジュライ空間を $X_W/\text{Spec } F$ とする (X_W は精モジュライで, 滑らかかつ幾何学的連結なアフライン曲線となることが分かる). ここで, $S_1 = \{F_1 \text{ の無限素点 } \}$,

^{*40} このような E_1/F が存在することは, 弱近似定理及びヒルベルトの既約性定理 (HILBERT's irreducibility theorem) の帰結である (F_{v_q} , $F_{v_{q'}}$ 及び $\mathbb{Q}_{\ell'}$ 上で局所的に構成しておいて, 大域体 F に延ばす議論をする. [Ekedhal] 参照).

$S_2 = \{\ell\ell' \text{ 上の } F_1 \text{ の素点}\}$, $S_3 = \{v_q, v_{q'} \text{ 上の } F_1 \text{ の素点}\}$ とし, さらに, 各素点 $v \in S = (S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ に対し, 局所有理点の条件 $\Omega_v \subseteq X_W(\overline{F}_{1,v})$ を

$$\begin{aligned}\Omega_v &= X_W(F_{1,v}) \quad v \mid \infty \text{ のとき} \\ \Omega_v &= \{(E, i) \mid E \text{ は良い還元を持つ}\} \subseteq X_W(F_{1,v}^{\text{nr}}) \quad v \mid \ell\ell' \text{ のとき} \\ \Omega_{v_q} &= \{\text{乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する } X_W(\overline{F}_{1,v_q}) \text{ の点}\} \\ \Omega_{v_{q'}} &= \{\text{乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する } X_W(\overline{F}_{1,v_{q'}}) \text{ の点}\}\end{aligned}$$

と定めた上で, モレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用し, (ℓ, ℓ') トリックを実行する.

その際, 各局所有理点の集合 Ω_v が空でないことを確認する必要がある. 無限素点の場合は容易, $v \mid \ell'v_qv_{q'}$ の場合は E_1 の底変換が上記の条件を満たすので, Ω_v は空ではない. 今回興味深いのは $v \mid \ell$ の場合の局所有理点の問題, 即ち

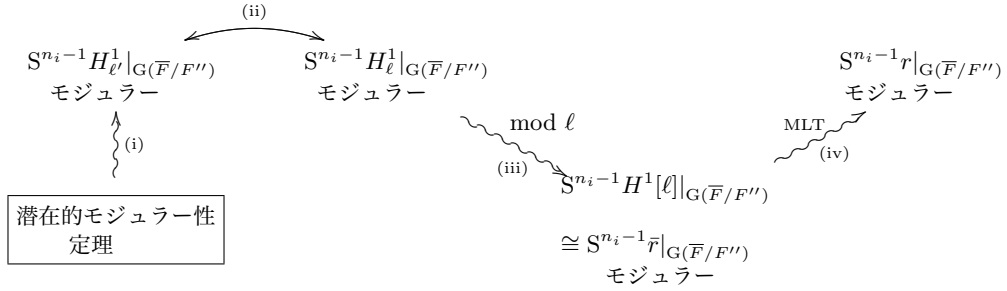
$v \mid \ell$ のとき, $E/F_{1,v}^{\text{nr}}$ が良い還元を持つような (E, i) が構成出来るか

という問題である. r は ℓ 上の素点ではクリスタリン表現であるため, この場合は p 進ホッジ理論 (p -adic HODGE theory) 等の p 進的な理論を用いた考察が必要となってくる. ここでは大筋の流れだけを追うことにしよう; 先ず フォンテーヌ-ラファイユ 理論 (FONTAINE-LAFFAILLE theory) を用いて W の ℓ 振れ部分 $W[\ell]$ の構造を決定する. $W[\ell]|_{I_{F_{1,v}}}$ が $\omega_2^{-1} \oplus \omega_2^{-\ell}$ と直和に分解する場合は, $\overline{\kappa(v)}$ 上の超特異楕円曲線の $(F_{1,v}$ の有限次拡大の整数環への) 持ち上げが求める有理点に対応する. $W[\ell]$ が $I_{F_{1,v}}$ 上分裂しない場合には, $\kappa(v)$ の有限次拡大 κ 上で先ず楕円曲線 $\overline{E}$ を構成した後, κ を剰余体に持つような F_v の有限次拡大 K (正確にはその整数環 $\mathcal{O}_K$) 上に $\overline{E}$ を “巧く持ち上げる” ことで, 求める楕円曲線 E を構成するのが基本戦略となる.

このような “巧い” 楕円曲線の持ち上げが存在するかどうか調べる必要があるが, 楕円曲線 $\overline{E}/\kappa$ の $\mathcal{O}_K$ への持ち上げは p 進理論の古典理論たる アーベル多様体の セール-テイト理論 (SERRE-TATE theory) に依って, 群 $\mu_{\ell^\infty}(\chi^{-1})$ の $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)(\chi)$ に依る $\mathcal{O}_K$ 上の拡大に依りパラメータ付けされ, さらにそれぞれの群拡大はガロワ・コホモロジー群 $H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2))$ の元と対応する. そこで, 持ち上げ $E/\mathcal{O}_K$ に対応するコホモロジー類 $[E] \in H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2))$ が自然な射

$$H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2)) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})(\epsilon_\ell)) \quad (3.1)$$

に依って $W^\vee$ (W の反傾表現) に対応する $H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})(\epsilon_\ell))$ のコホモロジー類 $[W^\vee]$ に移るならば, $H^1(E \times \text{Spec } \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong W[\ell]$ が導かれ, E が求める

図 6 定理 3.2 に於ける楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリック

局所有理点に対応することが分かる。後はガロワ・コホモロジーの計算 (加群の計算) で $[W^\vee]$ が (3.1) の像に入っていることを確かめれば良いだけである (計算の詳細は、原論文を参照されたい)。

以上より各 Ω_v が空集合でないことが示されたので、モレー・バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) に依って、以下のような F_1 を含む有限次ガロワ拡大 F'/F 及び楕円曲線 E/F' が構成される：

- F' は F_1 上 $\overline{F}^{\ker(\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(W))}$ と線型無関連。
- F' は総実代数体。
- $\ell\ell'$ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐。
- E は ℓ 及び ℓ' 上の全ての素点に於いて良い還元を持つ。
- E は v_q 及び $v_{q'}$ 上の素点に於いて、分裂乗法的 (split multiplicative) な還元を持つ。
- $H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \bar{r}|_{\text{Gal}(\overline{F}/F')}$ 。
- $H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ は ℓ' 上馴分岐。

Step 3, 証明の完了

- (i) $\{\text{Sym}^{n_i-1}H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}_{\ell'})\}_i$ に関する潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) に依り、ある総実代数体 F''/F' で、以下の性質を満たすものがとれる：

- F''/F はガロワ拡大。
- ℓ 及び ℓ' は F'' に於いて不分岐。
- F'' は F' 上 $F'\overline{F}^{\ker(\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(W))}$ と線型無関連 (従って F'' は F_1 上 $\overline{F}^{\ker(\bar{r})}$ と線型無関連)。
- $w_{q'}$ を $v_{q'}$ 上の F'' の素点とすると、各 $\text{Sym}^{n_i-1}H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}_{\ell'})$ は F'' に於いて重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_{q'}\}}$ 型で保型的かつレベルが ℓ' と素。

- (ii) v_q 上の F'' の素点を w_q とする時, 各 $\mathrm{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \mathrm{Spec} \bar{F}, \mathbb{Z}_\ell)$ は F'' に於いて 重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的かつレベルが ℓ と素 (注意 17 と同様の議論に依り, $w_{q'}$ を w_q に取り替える).
- (iii) 法 ℓ 還元を考えると, $\mathrm{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \mathrm{Spec} \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Symm}^{n_i-1} \bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は F'' 上重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的.
- (iv) テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.4) に依り, $\mathrm{Symm}^{n_i-1} r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は F'' に於いて 重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的.

□

この証明の流れも図 6 に表した (図 に於いては Symm^{n_i-1} を S^{n_i-1} , Gal を G , ℓ 進コホモロジーを H_ℓ^1 , 法 ℓ コホモロジーを $H^1[\ell]$ などと略した). 巧みに “補助的素数” q' を駆使し, 楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリックに依って, ℓ, q の余計な条件を取り除くそのテクニックを存分に堪能されたい.

雑談 19. §1 及び §2 に於いては 非常に幾何学的な考察が多かったが, ここに来て局所・大域原理に於ける局所有理点の構成に p 進ホッジ理論や セール-テイト理論などの非常に数論的に深い理論が大いに活躍するという点は, (個人的に) 非常に興味深いと思う^{*41}.

なお, テイラーの GL_2 表現に対する潜在的モジュラー性定理 [Taylor2], [Taylor3] に於いても, モレ-バイイーの定理に於ける局所有理点 (局所体上の ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体) の構成に p 進理論を駆使している ([津嶋] 参照). ◆

4 種々の応用 — Applications

[HSBT] の最後を飾る第 4 節では, §3 で得られた対称積表現の潜在的モジュラー性定理 (定理 3.2) を楕円曲線の対称積 L 関数 $L(s, E, \mathrm{Symm}^{m-1})$ ($m \geq 2$) の解析に利用することで, 念願であった (弱い仮定の下での) 佐藤-テイト予想の証明を完結している (定理 4.3). 本稿でも [HSBT] に従い, より一般にアーベル多様体の対称積 L 関数 $L(s, \mathrm{Symm}^{m-1}(A, i))$ に対する解析接続性及び零点の配置について調べ (定理 4.2), その系として佐藤-テイト予想を導くことにしよう.

そうは言っても, 大変な部分は全て §3 (及び [CHT], [Taylor4]) で済ましてしまっているので, ここまで苦労して本稿 (あるいは原論文 [HSBT]) を「解説」されてきた皆様方には, 苦難続きの果てしない旅路を乗り越えた末に漸く獲得した「潜在性モジュラー性定理」と言う非常に強力な “奥儀” に依って, 佐藤-テイト予想という世紀の大予想が如何に鮮やかに攻略され

^{*41} 山下剛氏が本報告集の解説記事で, p 進の理論が「 $R = \mathbb{T}$ 」の発展に大きく寄与している事を指摘している ([山下 1]). 定理 3.2 などまさにその典型例であろう.

てしまうかを存分に堪能出来る“至福のひとつ”が訪れるに違いない.

4.1 総実体上のアーベル多様体の対称積 L 関数

まずは、総実代数体上のアーベル多様体に対する対称積 L 関数の定義を復習しよう. とは言え、佐藤-テイト予想に必要なのは楕円曲線の対称積 L 関数だけであり、その不分岐局所因子の定義は §0.3 で既に与えてしまっているので、一刻も早く佐藤-テイト予想の証明に辿り着きたい、という方は(勿論アーベル多様体の L 関数の一般的な定義を既にご存知の方も)この節は読み飛ばしてしまっても全く差し支えなからう.

F, L を総実代数体とし、 A/F をアーベル多様体としよう. また、埋め込み $i: L \hookrightarrow \text{End}^0(A/F)$ が与えられているとする. このとき、 A は ロサッティ 対合 (ROSATI involution) が iL に自明に作用するような偏極 (polarization) を持つことが知られている ([Rapoport] 参照). つまり、 $\lambda | \ell$ を ℓ 上の L の素点とすると、

$$\det H^1(A \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{L_\ell} L_\lambda = L_\lambda(\epsilon_\ell^{-1})$$

が成立する.

さて、 m を 2 以上の正の整数としよう. 各 F の素点 v に対し、 $\bar{L}$ 上の 2 次元ヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_v(A, i)$ であって、 $\ell (\neq \text{char } \kappa(v))$ 上の L の素点 λ に対して

$$WD(H^1(A \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell)|_{\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)} \otimes_{L_\ell} L_\lambda) \cong WD_v(A, i)$$

なるものが存在する. このヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_v(A, i)$ の対称積に対する L 因子の積を

$$L(\text{Symm}^{m-1}(A, i)/F, s) = \prod_{v \nmid \infty} L(\text{Symm}^{m-1}WD_v(A, i), s)$$

とおき、 (A, i) の対称積 L 関数 と定義する. この対称積 L 関数は $\text{Re}(s) > 1 + \frac{m-1}{2}$ の範囲で絶対かつ広義一様に収束し、この範囲で零点を持たない正則関数を定める.

ここで、§3.1 の定義を拡張して、対称積表現 $\text{Symm}^{m-1}(A, i)$ が重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的とは、 $\text{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π が存在して、 F の素点 w に対して

$$\text{rec}(\pi_w)|\text{Art}_K^{-1}|_K^{-(m-1)/2} = \text{Symm}^{m-1}WD_w(A, i)$$

を満たすこととして定義する.

この条件には幾つか同値な条件が存在するが、詳しくは [HSBT] §4 の冒頭部を参照していただく (§4.1 の内容は殆ど該当箇所を抜粋したものである).

4.2 佐藤-テイト 予想の証明

いよいよ佐藤-テイト予想 (予想 0.1) を (弱い仮定の下で) 証明しよう.

次の定理は, 本質的には定理 3.2 を $\mathrm{Symm}^{m-1}A$ ($m \geq 2$) に適用しただけのものである.

定理 4.1 (アーベル多様体の対称積表現の潜在的モジュラー性). F, L を総実代数体とし, A/F を $[L: \mathbb{Q}]$ 次元アーベル多様体とする. さらに, 埋め込み $i: L \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A/F)$ が与えられていると仮定する. $\mathcal{N}$ を正の偶数の有限集合とし, 埋め込み $L \hookrightarrow \mathbb{R}$ を固定する. さらに, A は F のある素点 v_q で乗法的還元を持つと仮定しよう.

このとき, ある有限次総実ガロワ拡大 F'/F が存在して, 全ての $m \in \mathcal{N}$ 及び, 全ての中間体 $F'/F''/F$ で F'/F'' が可解なものに対して, $\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i)$ は F'' 上保型的である. $\diamond$

証明. 適当に二次指標で捻ること, (A, i) は v_q で分裂乗法還元を持つものとしてよい (要するに, 全ての $\ell (\neq \mathrm{char} \kappa(v_q))$ に対し, $H^1(A \times \mathrm{Spec} \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell)|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\mathrm{ss}}$ への幾何学的フロベニウス元 Frob_{v_q} の作用の固有値が $1, \#\kappa(v_q)$ となる様に出来る). 後は 定理 3.2 が適用できるように十分大きい素数 ℓ をとれば良い. 具体的には,

- ℓ は F で不分岐.
- $\ell > \max\{n, C(n)\}_{n \in \mathcal{N}}$. ($C(n)$ は 補題 1.11 で導入した数)
- A は F の全ての ℓ 上にある素点に於いて良い還元を持つ.
- 自然な射 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^1(A \times \mathrm{Spec} \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})/(\mathcal{O}_L/\ell\mathcal{O}_L))$ が全射.
- ℓ は L で完全分解.

(この様な ℓ の取り方は原論文参照) そうすれば, 定理 3.2 から総実ガロワ拡大 F'/F で ℓ が F'/F に於いて不分岐なもの及び, v_q 上にある F' の素点 w_q が存在して, 任意の $m \in \mathcal{N}$ に対して $\mathrm{Symm}^{m-1}(H^1(A \times \mathrm{Spec} \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{L_\ell} L_\lambda)$ (λ は ℓ 上にある L の素点) が F' 上で重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_m(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的かつ, レベルが ℓ と素であることが得られる. これが $\mathrm{Symm}^{m-1}A$ の保型性と同値であることは [HSBT] §4 の冒頭で論じられている.

適当な可解部分拡大 $F'/F''/F$ に取り替えても保型性が保存されることは, 所謂 アーサー-クローゼルの可解基底変換定理 (ARTHUR-CLOZEL's solvable base change theorem) ([AC] 定理 4.2, [CHT] 補題 4.3.2) に依る. $\square$

さて, §0.3 に依り 佐藤-テイト予想の証明はセールの条件 (命題 0.4) に帰着されるが, セールの条件はその一般化である次の定理の直接の帰結として示される.

定理 4.2 (アーベル多様体の対称積 L 関数の解析的性質). F, L を総実代数体とし, A/F を $[L: \mathbb{Q}]$ 次元の代数多様体とする. さらに埋め込み $i: L \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A/F)$ が与えられていると

する. 埋め込み $L \hookrightarrow \mathbb{R}$ を固定し, A は F のある素点 v_q で乗法的還元を持つとしよう^{*42}. このとき, 全ての $m \geq 2$ に対して対称積 L 関数 $L(\text{Symm}^{m-1}(A, i), s)$ は複素平面全体に有理型に解析接続され, 関数等式を満たし, $\text{Re}(s) \geq \frac{m+1}{2}$ の範囲で正則かつ零点を持たない. ◇

証明の前に, 議論の流れを確認しよう.

定理 4.1 に依って, m が 正の偶数のとき には定理 4.1 にあるような F'' に対して $\text{Symm}^{m-1}(A, i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は保型的, より正確に言えば $\text{GL}_m(\mathbb{A}_{F''})$ のある 重さ 0, $\{\text{Sp}_m(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型の RAESDC 表現 Π_m が存在して

$$L(\text{Symm}^{m-1}(A, i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}, s + \frac{m-1}{2}) = L(\Pi_m, s)$$

を満たす. 右辺のような保型 L 関数に関しては, 所望の性質が全て満たされることは良く知られているので, 考察しなければならないのは以下の二点である:

(問題 1) 如何にして制限 $|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ を取り払うか? ^{*43}

(問題 2) m が奇数の場合はどう乗り切るか?

(問題 1) に関しては, 有限群の表現論に於いて有名な ブラウアーの誘導定理 (BRAUER's induction theorem) ([SerreB] 参照) を用いて巧妙に回避する. この辺りの巧みな変形は以下の証明でたっぷり味わっていただければと思う.

(問題 2) はより根源的な問題とも言える. そもそも m が 3 以上の整数のとき, 現時点では直接 GL_m 表現の潜在的モジュラー性を扱えない理由の一つに, GL_m だと像が“大きすぎる”という問題があった. そこで, ポワンカレ双対性から誘導されるシンプレクティック構造 (交代形式) を含めた表現を考え, 像を GSp_m に“縮小”することに依り, 現在大きい m に対しても辛うじて潜在的モジュラー性を扱えるという状況なのである. しかし, シンプレクティック構造を入れて考えなくてはならないということは, 必然的に m が偶数 であることが要求されるということである. このことは, 翻って現時点では m が奇数の場合に潜在的モジュラー性を用いて直接 L 関数の解析的性質を調べることは 原理的に不可能である ということを示唆しているのである (!) そうなると最早打つ手が無い様にも見えてしまうが, この定理を証明するに当たって我々が必要としているのは L 関数の解析的性質 だけ であるから, そのことを逆手に取って 保型 L 関数の解析的理論に困難な部分を全て押し付けてしまう ことに依って, m が奇数の場合の $\text{Symm}^{m-1}(A, i)$ の潜在的モジュラー性を 一切論じることなく, L 関数の解析的性質を調べることが出来てしまうのである (具体的には, 保型 L 関数の ランキン-セルバーク たたみ込み積 (RANKIN-SELBERG convolution) を用いることで, m が偶数の場

^{*42} ここまでの仮定は, $\mathcal{N}$ を導入していないことを除いて 定理 4.1 と全く一緒である.

^{*43} これは, 潜在的モジュラー性定理の“潜在性” (代数拡大の不定性) に依って失われた情報を如何にして取り戻すか, と言うことを本質的に問うている.

定理 4.1 を $\mathcal{N} = \{2, m\}$ に適用しよう. F'/F を定理 4.1 で得られる有限次総実ガロワ拡大とし, その有限個の可解中間体を $\{F_j \mid F'/F_j/F, F'/F_j \text{ は可解}\}$ とっておく. つまり, $(A, i) \times \text{Spec } \overline{F_j}$ は保型的で $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{F_j})$ の RAESDC 表現 σ_j と対応し, $\text{Sym}^{m-1}(A, j) \times \text{Spec } \overline{F_j}$ も保型的で $\text{GL}_m(\mathbb{A}_{F_j})$ の RAESDC 表現 π_j と対応するものとする. ここで $\text{Gal}(F'/F)$ の自明表現 $\mathbb{1}$ に対してブラウアーの誘導定理を用いることで, 仮想表現 (virtual representation) としての等式

が成立する. 但し, a_j は整数かつ χ_j は $\text{Gal}(F'/F_j)$ の 1 次指標.

$$\begin{aligned}
& L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i), s + \frac{m-1}{2}) \\
&= L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \otimes \mathbb{1}, s + \frac{m-1}{2}) \\
&= \prod_j L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(F'/F_j)}^{\mathrm{Gal}(F'/F)} \chi_j, s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \quad (L \text{ 関数の乗法性}) \\
&= \prod_j L(\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F_j)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')}((\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j) \otimes \chi_j), s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \\
&\quad \quad \quad (\text{フロベニウスの相互法則}) \\
&= \prod_j L((\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j) \otimes \chi_j, s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \quad (L \text{ 関数の誘導不変性}) \\
&= \prod_j L(\pi_j \otimes (\chi_j \circ \mathrm{Art}_{F_j}), s)^{a_j} \quad (\text{対応する保型 } L \text{ 関数})
\end{aligned}$$

さて、例えば不分岐局所因子を見比べることに依って、以下の L 関数の等式が得られる：

$$L(\mathrm{Symm}^m(A, i), s + \frac{m}{2}) L(\mathrm{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2}) = \prod_j L((\pi_j \otimes (\chi_j \circ \mathrm{Art}_{F_j})) \times \sigma_j, s)^{a_j} \quad (4.1)$$

但し、右辺の各因子は ランキン-セルバーグ の たたみ込み積 L 関数 である．たたみ込み積 L 関数の解析的性質は保型表現の様々な手法を用いて精力的に研究されている^{*44}．定理 4.2 を証明する上で我々が直面する問題は、(4.1) の右辺に現れるたたみ込み積 L 関数達が $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され、関数等式を満たすかどうか、或いはその時 $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で零点を持つか、という二点であるが、実はこれらの問題は既に解決されているのである．解析接続性及び関数等式に関しては [CPS] を、また右辺に現れる全ての保型 L 関数達が $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で零点を持たないことに関しては [Shahidi] 定理 5.1 を参照されたい．あとは、帰納法の仮定により、 $L(\operatorname{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2})$ は $s \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され、その範囲で零点を持たないとして良いから、(4.1) の両辺を $L(\operatorname{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2})$ で割り算することで、 $L(\operatorname{Symm}^m(A, i), s)$ も $s \geq 1 + \frac{m}{2}$ の範囲で正則に解析接続され、この範囲で零点を持たないことが従う．したがって $m+1$ の場合も成立．

最後に $m=3$ の場合

$$L(\operatorname{Symm}^2(A, i), s) = \prod_j L((\operatorname{Symm}^2 \sigma_j) \otimes (\chi_j \circ \operatorname{Art}_{F_j}), s)$$

が残るが、これは最初に保型表現の二次対称積 L 関数を導入した ゲルバート-ジャック (GELBERT-JACQUET) に依る対称積持ち上げの議論 [GJ] を用いて証明される．

保型 L 関数を通じた解析的整数論が最先端の数論の研究に如何に強力な手段を提供しているかを改めて感じられたい． □

雑談 20. 運命のいたずらか、はたまた歴史の必然か、この『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』が開催された同年 (2008 年) 夏に举行された歴史ある『整数論サマースクール』のテーマが「保型 L 関数」であり^{*45}、その中で保型 L 関数の研究に於ける“二大メソッド” (ランキン-セルバーグ法、ラングランズ-シャヒディ 法) について非常に詳しい解説がなされた^{*46}．この報告集も完成予定が順調に (?) 遅れてしまい、既にこの整数論サマースクールの報告集も出来上がっている様なので、上記の保型 L 関数の理論に興味をもたれた方は本報告集と併せて是非ご覧になっていたきたい [石井・平野]． ◆

^{*44} 所謂 ランキン-セルバーグ法 (RANKIN-SELBERG method, ゼータ積分を用いて L 関数の解析的性質を調べる方法) や ラングランズ-シャヒディ法 (LANGLANDS-SHAHIDI method, アイゼンシュタイン級数のフーリエ級数に注目して L 関数の解析的性質を調べる方法) といった保型 L 関数研究の“二大メイン・メソッド”を筆頭として、フライドゥーン・シャヒディ (FREYDOON SHAHIDI), ヘンリー・キム (HENRY H. KIM), イリヤ・ピアテツキ-シャピロ (ILYA PIATETSKI-SHAPIRO) 等保型表現の研究家達に依って目覚ましい成果が挙げられ続けている．

^{*45} 少し場違いな気もするが、この場を借りて素晴らしいサマースクールを演出して下さったオーガナイザーの石井卓氏及び平野幹氏に深い感謝の意を表したい．

^{*46} 対称積 L 関数の研究が佐藤-テイト予想に繋がることがこのサマースクール内でも繰り返し指摘されたことは言うまでもなからう．

定理 4.3 (弱い仮定の下での佐藤-テイト予想). F を 総実代数体 とし, E/F を F の素点 v_q で乗法的還元を持つ楕円曲線とする (特に, $j(E) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$). 有限個を除く全ての素点 v について

$$\sharp E(\kappa(v)) = (1 - (\sharp \kappa(v))^{1/2} e^{\sqrt{-1}\theta_v})(1 - (\sharp \kappa(v))^{1/2} e^{-\sqrt{-1}\theta_v})$$

と書くとき, θ_v に関して佐藤-テイト予想 (予想 0.1) が成立する. ◇

証明. セールの条件 (命題 0.4) 及び 定理 4.2 より明らか. □

注意 21. 繰り返しになるが, F が総実体と言う条件は 保型表現からガロワ表現を構成する際に必要な条件であり, $j(E)$ が非整数と言う条件は局所ラングランズ対応に於けるエンドスコピーから生ずる難解さを回避するために付された条件である. 特に $j(E)$ が非整数と言う条件は極めて技術的な仮定であり, 保型表現の研究の進展が目覚ましい昨今に於いては, 近いうちに外されることと期待されていることも改めて強調しておこう. ◆

最後に, 保型表現とガロワ表現の間の対応構成を洗練させることで, n が奇数の場合にも潜在的モジュラー性定理を導くことが出来るようになるのではないかと, 或いはもっと大胆にラングランズ対応の完成により直接 (潜在性を經由しないで) 全ての n についてモジュラー性を示すことが出来るようになるのではないかと, という非常に難しい (それでいて成り立つことが全ての数学者により期待されるような) 問題は いまだ難攻不落の砦として我々の前に立ち塞がっているということを再度強調しておこう. ただ, そう言った根本的な困難を現代数学の持っている限りの技術を総動員して回避し辿り着いた上記の証明も, テイラー氏初め様々な先人達の努力と苦悩の痕跡がまざまざと感じられ, 非常に感慨深いものであると思う.

雑談 22. 今回, $\mathrm{Symm}^{n-1} \rho$ を適当に 誘導表現の仮想的 $\mathbb{Z}$ -線形和

$$\sum_j a_j \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{F}'/F_j)}^{\mathrm{Gal}(\bar{F}'/F')} (\mathrm{Symm}^{n-1} \rho|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_j/F_j)} \otimes \chi_j)$$

で表わすことで, アルティン L 関数を L 関数の積の形に分解する という手法に依って L 関数の解析的性質が調べられた. もともとアルティン-ブラウアーに依る誘導表現の理論自体が, アルティン L 関数の解析接続性等を調べる際にヘッケ L 関数の性質に帰着させるために導入された理論であるため, 誘導定理を用いたアルティン L 関数の解析は非常に有力な手法と言える.

ここでは, 一風変わった分野にも誘導表現の理論が応用されているという一例として, (個人的な趣味で申し訳ないが) 非可換岩澤理論 (*non-commutative IWASAWA theory*) を取り上げたいと思う. その選考理由は, 有り体に言えば筆者が非可換岩澤理論を研究しているから, という事に尽きてしまうのかもしれないが, 直接の動機は「 $R = \mathbb{T}$ 」という非可換岩澤理論とは大分趣向の異なる分野の勉強会で思い掛けず「見た事のある議論」と遭遇したことが非常に

印象的であったことにある。些細なことかもしれないが、それでもこの様な発見は普段非可換岩澤理論という「 $R = \mathbb{T}$ 」とは離れた分野を研究している者の“穿った”視点からしか見えてこないものであると思われるし、勉強会中に得られた新鮮な驚き、感動をそのままお伝えする事も報告集の役割であろう、等と勝手に解釈することにして、以下その議論の類似性を指摘させていただきたい。

なお、非可換岩澤理論についての詳細は [CFKSV], [FK], [Kakde], [H]などを参照のこと。

さて、 F^∞/F を総実代数体の総実な p 進リー拡大で、円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大 F^{cyc}/F を含むものとする。 $G = \text{Gal}(F^\infty/F)$, $H = \text{Gal}(F^\infty/F^{\text{cyc}})$, $\Gamma = \text{Gal}(F^{\text{cyc}}/F) \cong \mathbb{Z}_p$ とおく。

このとき、 F^∞/F の p 進ゼータ関数 (p -adic zeta function) とは、 G の岩澤代数 (の適当なオーレ局所化) $\Lambda(G)_S$ のホワイトヘッド群 $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 ξ で、 G の任意のアルティン表現 ρ 及び円分指標 $\kappa: \text{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ に対して

$$\rho \kappa^r(\xi) = L(1-r, \rho), \quad (p-1) \mid \forall r$$

を満たすものとする (補間性質 interpolation property). ここで、 $L(s, \rho)$ は アルティン L 関数 (の分岐局所因子を除いたもの)。

さて、 $\{U_j, V_j\}_j$ を適当な開部分群の組 $G \supseteq U_j$, $H \supseteq V_j$ の族で、 U_j/V_j がアーベル群かつ任意の G のアルティン表現 ρ を仮想表現としての $\mathbb{Z}$ -線型和 $\sum_j a_j \text{Ind}_{U_j}^G \chi_j$ (χ_j はアーベル群 U_j/V_j の指標) として表せるものとする (例えばブラウアー基本部分群の族を考えてみると良からう)。ここで、 F_{V_j}/F_{U_j} (F_{U_j}, F_{V_j} は U_j, V_j に依る F^∞ の固定体) に対しては、 p 進ゼータ関数 ξ_j (つまり補間性質を満たす元 $\xi_j \in K_1(\Lambda(U_j/V_j)_S) = \Lambda(U_j/V_j)_S^\times$) が一意に存在することが知られている (ドリーニュ-リベ [DR], セール [SerreC])。

ここで、もしノルム写像 $\text{Nr}_j: K_1(\Lambda(G)_S) \rightarrow \Lambda(U_j/V_j)_S^\times$ に対し、 $\text{Nr}_j(\xi) = \xi_j$ となる元 ξ が存在するとしたら、この ξ が F^∞/F に対する p 進ゼータ関数となる。これを確認するためには ξ が補間性質を満たすことを示せば良いが、そこで定理 4.2 の証明と同様に、誘

導表現を用いたアルティン L 関数の解析が用いられる。即ち、

$$\begin{aligned}
 \rho\kappa^r(\xi) &= \left(\sum_j a_j \operatorname{Ind}_{U_j}^G(\chi_j)\kappa^r\right)(\xi) \quad (\text{“誘導定理”}) \\
 &= \left(\sum_j a_j \chi_j \kappa^r\right) \circ (\operatorname{Nr}_j(\xi)) \quad (\text{“フロベニウス相互法則”}) \\
 &= \left(\sum_j a_j \chi_j \kappa^r\right)(\xi_j) \quad (\xi \text{ の特徴付け}) \\
 &= \prod_j L(1-r, \chi_j)^{a_j} \quad (\xi_j \text{ の補間性質}) \\
 &= \prod_j L(1-r, \operatorname{Ind}_{U_j}^G \chi_j)^{a_j} \quad (L \text{ 関数の誘導不変性}) \\
 &= L(1-r, \sum_j a_j \operatorname{Ind}_{U_j}^G \chi_j) \quad (L \text{ 関数の乗法性}) \\
 &= L(1-r, \rho)
 \end{aligned}$$

より、 ξ が補間性質を満たすことが示されるのである。

勿論どちらもガロワ表現の L 関数の解析を行っているのであるから、誘導定理を用いた解析が有用であることはよく考えてみれば当然のことかもしれないが、「 $R = \mathbb{T}$ 」や非可換岩澤理論と言った最先端の数論幾何学の理論で“古典的な”誘導表現の理論が形を変えて縦横無尽に大活躍している様子を観察するだけでも十分味わい深いものと思う。◆

雑談 23 (セール予想との関係). ついでだから、セールの保型性予想に付いても非常に簡単にはあるが触れておこう。 ℓ を正の素数とする。

予想 (セールの保型性予想). $\bar{\rho}: \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \operatorname{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を既約かつ奇な表現とする。このとき、 $\bar{\rho}$ は保型的である。◇

この予想は最終的に チャンドラシェーカー・カーレ (*Chandrashekar KAHRE*) と ジャン-ピエール・ヴァンテンベルジェ (*Jean-Pierre WINTENBERGER*) に依って解決された。

さて、既に (ℓ, ℓ') トリックの世界に魅了された方ならば、今まで散々議論して来たように「 (ℓ, ℓ') トリックを用いて保型性が既知の表現の保型性を“感染”させれば良いのではないか」と容易に考えつくことと思われる。だが、 (ℓ, ℓ') トリックには一つ看過することの出来ない大きな問題があったことを思い出そう。モジュライ空間にモレ-バイイーの定理を適用した際に生ずる基礎体の拡大の不定性である。セール予想は上記の様な GL_2 表現が (“潜在性”を伴わず) 保型的であることを主張しているのであるから、 (ℓ, ℓ') トリックを用いてセール予想を証明しようとするならばこの体拡大の不定性をコントロールしなくてはならないが、現時点で

は制御出来ていないのであった (注意 11 も参照)*47. したがって、 (ℓ, ℓ') トリックのみを用いたセール予想へのアプローチは残念ながらあまり先が見えないと言わざるを得ない.

ところが カーレ-ヴァンテンベルジェ の証明法には、 (ℓ, ℓ') トリックで培われた「保型性の“感染”」の精神は脈々と受け継がれているのである. 彼らは、上記の様なガロワ表現がガロワ強整合系 (GALOIS *strictly compatible system*) に埋め込めることを示し、それを用いて「ガロワ強整合系に“持ち上げて”法 ℓ' 還元“落とす”」と言う過程を経て保型性を“感染”させる道を構成した (本報告集の山内氏の解説記事 [山内] の冒頭にその様子を表した非常に分かりやすい図式が掲載されている). その精神はまさに (ℓ, ℓ') トリックの精神そのものであるが、肝心の強整合系が自由には取れないので、残念ながらこの方法では (ℓ, ℓ') トリックのときのように、一回の「持ち上げて落とす」操作だけで与えられた表現と保型性を知られている表現を直接“繋ぐ”ことは出来ない. この様な事情も相まって、カーレとヴァンテンベルジェの証明では保型性の伝達の際に複雑な帰納法が駆使されている.

それでは、モレーバイイーの定理を用いた (ℓ, ℓ') トリックはセール予想に対しては完全に無力であったのかと問われると、必ずしもそう言うわけでもなく、先に触れた「ガロワ表現を強整合系に埋め込める」という事実の証明に於いてテイラーの潜在的保型性定理が用いられているのである. その意味でも、潜在的モジュラー性定理や (ℓ, ℓ') トリックはセールの保型性予想に関しても重要な役割を担っていると言って良いだろう.

本稿の後に続く 3 つの解説記事に於いて、田口氏 [田口], 萩原氏 [萩原], 山内氏 [山内] がセールの保型性予想の解決について素晴らしい解説記事を執筆されていることと思うので、引き続き是非ご堪能されたい. ◆

結びにかえて

もう少しコンパクトに纏める予定であったが、予想外に紙面も時間も手間も費やしてしまった. 原稿の締め切りに二度も遅れ、報告集作成の予定を大幅に狂わせる結果となってしまったことを、編集者の斎藤毅先生並びに報告集作成に携わる全ての方々にお詫び申し上げたい.

なるべく原論文の流れに忠実に論じ、数学的な間違いは無いように心掛けて執筆したつもりではあるが、何分この分野に関しては完全な門外漢であるため、酷い勘違いなどが無いとは断言できない. そういった間違いに関しては、テイラー氏等の論文原本、安田氏の講演、吉田氏の講演及び解説記事に囲まれた極めて理想的な執筆環境にありながら、それらを消化しきれなかった筆者の実力不足に全て起因しており、誤った記述の責任は筆者のみあることを明記しておこう.

*47 逆説的に言えば、“潜在的”セール予想は既にテイラーが [Taylor2], [Taylor3] で部分的に解決していることになる. [津嶋] 参照.

最後に、

5日間非常に高密度な講演を聴いているだけでも肉体的にも精神的にも厳しい研究集会であったにも拘らず、たったお二方であれだけの膨大な数の論文を読破し、分かり易く講演し続けて下さった山下剛氏、安田正大氏が如何に大変な苦勞を背負われていたかは想像だに出来ません。二氏のおかげで全国の数論研究者が最先端の数論幾何学の成果に触れる機会を得られたことは誠に喜ばしいことであると思います。

また、本稿の執筆に於いては安田正大氏の講演ノートが非常に参考になりました。勉強会中は話に食らいつうだけで精一杯で、おそらく実際には何も理解していなかったに等しかった状態であったのですが、いざ執筆にあたり講演ノートを読み返してみると、細々として分かりにくい証明に対し確実にポイントを捉え、明快に議論の大筋を示して下さっていたことに改めて気づき、感服するばかりであります。非常にためになりました、ありがとうございます。

東京大学数理科学研究科の宮崎直氏には、保型表現論に疎い著者に対し、保型 L 関数及びその解析的性質の研究が現在どのように展開されているかをコメントしていただきました。主に §4 の執筆の際に参考にさせていただきました。

九州大学数理学研究院の三枝洋一氏には、原稿全体を通じて数学的な言い回しや表現についてアドバイスを頂きました。恐らく著者の性格上の問題にも由来するのですが、このような解説記事の執筆に於いては大雑把なイメージや概観の記述に傾倒しがちで、細かな数学的表現等への配慮が疎かになる傾向がありましたので、氏の細やかな指摘は大変参考になりました。ここに御礼申し上げます。

八ヶ岳原村ペンションビレッジには何かと縁があり、勉強会から半年後の10月中旬には日本数学会主催の八ヶ岳フレッシュマンセミナーのチューターとして再び彼の地に訪れることとなりました。半年前に同じ場所で行われた最先端の数論幾何学の講演に思いを馳せつつ、一方で数学の世界に今まさに飛び込まんとする全国の数学科の学生たちの希望に満ちた目に励まされながら、主に本稿のメインである「潜在的モジュラー性」の節 (§3) を執筆させていただきました。素晴らしい勉強会環境・執筆環境を用意して下さいました原村の皆様及び、原村での数学的活動(研究集会、フレッシュマンセミナーなど)を積極的にサポートして下さいました斎藤秀司先生に深く御礼申し上げます。今後とも原村が日本の数学会に新しい光を与え続ける拠点として機能してゆくならば、非常に素晴らしいことと思います。

山下剛氏と安田正大氏には、非常にお忙しい身分でいらっしゃるにも拘らず、まだまだ誤植や記述の不備が「殆ど至る所に」存在するような酷い初稿を丁寧に読んでいただき、コメント及び重大な間違い(特にDS条件について)の指摘をいただきました。特に安田正大氏には表現上の問題や歴史的背景などといった非常に細やかなところまでコメントしていただきました。自身でもうんざりするほど多くの誤植を孕んだ初稿に目を通された際のお二方の精神的苦痛は推し測るべくありません。お二方の指摘のお陰で、この拙い文章も大分まとまものに

なったことと存じます。本当にありがとうございました。

本講演会を主催なさった山下剛氏、安田正大氏に改めて感謝の意を表しつつ、結びとさせていただきます。

参考文献

- [たのしみ] 上野健爾・砂田利一・新井仁之編集, 『佐藤-テイト予想の解決と展望』, 「数学の楽しみ」, 日本評論社, 2008 年最終号.
- [山下 1] 山下剛, 『Taylor-Wiles 系の復習』, 本報告集 第 1 巻.
- [津嶋] 津嶋貴弘, 『Taylor による潜在型性定理』, 本報告集 第 2 巻.
- [安田・千田] 安田正大, 千田雅隆, 『ユニタリ群の $R = \mathbb{T}$ 』, 本報告集 第 2 巻.
- [田口] 田口雄一郎, 『Serre 予想の証明: 帰納法の第一段階』, 本報告集 第 2 巻.
- [萩原] 萩原啓, 『レベル 1 の Serre 予想』, 本報告集 第 2 巻.
- [山内] 山内卓也, 『セール予想の証明: 一般の場合』, 本報告集 第 2 巻.
- [石井・平野] 石井卓, 平野幹編, 第 16 回整数論サマースクール報告集 保型 L 関数 (2009).
- [AC] Arthur, J., and Clozel, L., *Simple algebra, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Ann. of Math., Studies, **120**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1989).
- [BH] Beukers, F., and Heckman, G., *Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n+1}$* , Invent. Math. **95** (1989), 325-354.
- [Carol] Carol, L., *Alice's Adventure in Wonderland*, Macmillan and Co., London (1865). (邦題 ルイス・キャロル, 『不思議の国のアリス』)
白ウサギを追って穴に飛び込んだ少女アリスが, 不条理やパラドックス, ナンセンスに満ちた不思議の世界に迷い込むお話.
- [CFKSV] Coates, J., Fukaya, T., Kato, K., Sujatha, R., and Venjakob, O., *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **101** (2005), 163-208.
- [CHT] Clozel, L., Harris, M., and Taylor, R., *Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **108** (2008), 1-181.
- [CL] Coddington, E. A., and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London (1955).
- [CPS] Cogdell, J., and Piatetski-Shapiro, I., *Remarks on Rankin-Selberg convolutions*, in “Contributions to automorphic forms, geometry, and number the-

- ory,” Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD (2004).
- [ÇW] Çiperiani, M., and Wiles, A., *Solvable points on genus one curves*, Duke Math. J. **142** (2008), no. 3, 381-464.
- [DMOS] Deligne, P., Milne, S., Ogus, A., and Shih, K.-Y., *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, LMN **900**, Springer (1982).
- [DR] Deligne, P., and Ribet, K. A., *Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980), 227-286.
- [Ekedahl] Ekedahl, T., *An effective version of Hilbert’s irreducibility theorem*, in “Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988-1989,” Progress in Math. **91**, Birkhäuser (1990).
- [FJ] Fried, M. D., and Jarden, M., *Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **11**, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [FK] Fukaya, T., and Kato, K., *A formulation of conjectures on p -adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **219** (2006).
- [Frey] Frey, G., *Pseudo algebraically closed fields with non-archimedean real valuations*, J. of Algebra, **26** (1973), 202-207.
- [GJ] Gelbert, J., and Jacquet, H., *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$* , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **11** (1978), 471-542.
- [GPR] Green, B., Pop, F., and Roquette, P., *On Rumely’s local-global principle*, Jahrensber. Deutsch. Math.-Verein. **97** (1995), 43-74.
- [Griffiths] Griffiths, P. A., *On the periods of certain rational integrals: I*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 460-495.
- [H] Hara, T., *Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p -extensions*, [arXiv:0803.0211v1](#) [math.NT].
- [HSBT] Harris, M., Shepherd-Barron, N., and Taylor, R., *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*, to appear in Annals of Math.
- [HT] Harris, M., and Taylor, H., *The Geometry and Cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies **151**, PUP (2001).
- [Kakde] Kakde, M., *Proof of the main conjecture of noncommutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases*, [arXiv:0802.2272v2](#) [math.NT].
- [Lang] Lang, S., *Algebraic numbers*, Addison-Wesley, New York (1964).
- [LSW] Lerche, W., Smit, D.-J., and Warner, N. P., *Differential equations for periods and flat coordinates in two-dimensional topological matter theories*, Nuclear

- Phys., B **372** (1992), 87-112.
- [Mazur1] Mazur, B., *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **47** (1977), 33-186.
- [Mazur2] Mazur, B., *Rational isogenies of prime degree*, Invent. Math. **44** (1978), 129-162.
- [MB1] Moret-Bailly, L., *Groupes de Picard et Problème de Skolem I*, Ann. Scient. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 161-179.
- [MB2] Moret-Bailly, L., *Groupes de Picard et Problème de Skolem II*, Ann. Scient. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 181-194.
- [MB3] Moret-Bailly, L., *Applications of local-global principles to arithmetic and geometry*, in Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry (Ghent 1999), Contemp. Math. **270**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2000), 169-186.
- [MVW] Matthews, C. R., Vaserstein, L. N., and Weisfeiler, B., *Congruence properties of Zariski dense subgroups I*, Proc. London Math. Soc. **48** (1984), 514-532.
- [Rapoport] Rapoport, M., *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Composito Math. **36** (1978), 255-335.
- [Rumely1] Rumely, R. S., *Arithmetic over the ring of all algebraic integers*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 127-133.
- [Rumely2] Rumely, R. S., *Capacity Theory on Algebraic Curves*, Lecture Notes in Math. **1378**, Springer (1989).
- [SerreA] Serre, J-P., *Abelian ℓ -adic Representations and Elliptic Curves*, W. A. Benjamin (1968).
- [SerreB] Serre, J-P., *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris (1978).
- [SerreC] Serre, J-P., *Sur le résidu de la fonction zêta p -adique d'un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978), série A, 183-188.
- [SGA7] Deligne, P., and Katz, N., *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 7, LMN **340**, Springer (1973).
- [Shahidi] Shahidi, F., *On certain L -functions*, Am. J. Math. **103** (1981), 297-355.
- [SW] Snowden, A., and Wiles, A., *Bigness in compatible systems*, preprint.
- [Tate1] Tate, J., *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry, Proc. Conf. Purdue Univ. (1963).
- [Taylor2] Taylor, R., *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur*, J. Inst. Math.

- Jussieu, **1**(1) (2002), 125-143.
- [Taylor3] Taylor, R., *On the meromorphic continuation of degree two L -functions*, Documenta Math. Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday (2006), 729-779.
- [Taylor4] Taylor, R., Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations II, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **108** (2008), 183-239.
- [TY] Taylor, R., and Yoshida, T., *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. of Amer. Math. Soc. **20** (2007), 467-493.
- [Wiles1] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), 443-551.

※ 本稿だけ見ると引用文献の番号の付け方がおかしい部分があるが、これは配布資料の REFERENCES に於ける引用文献の番号 (本報告集 第1巻 p.p. 11-15 参照) と整合性を持たせているためである。

付録 A V_t の L 関数の関数等式について

本稿では、主に佐藤-テイト予想の証明を目標として [HSBT] の紹介を行ってきた (勉強会での講演の方針と合わせたつもりである) が、[HSBT] の結果はそれに留まらず、 (ℓ, ℓ') トリックで駆使した カラビ-ヤウ モチーフ V_t の L 関数を導入し、その関数等式を証明している。

本論 (佐藤-テイト予想の証明) で思いの外紙面を費やしてしまったので、 V_t の L 関数について詳しく解説することは出来そうもないが、折角なので付録として紹介しておこう。

以下では n を正の偶数とする。 t を有理数とし、 ℓ, p を互いに異なる素数とすると、 ℓ 進表現 $V_{\ell, t}$ に付随する ヴェイユ-ドリーニュ 表現 $WD(V_{\ell, t}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})$ を考える。ここで、 $\ell \neq p$ なる殆ど全ての素数 ℓ に対し、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の ヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_p(V_t)$ で

$$WD_p(V_t) \simeq WD(V_{\ell, t}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})^{\Phi\text{-ss}}$$

が各埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ について成立するものが存在する。これはつまり係数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の剰余標数 ℓ とは無関係に ヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_p(V_t)$ が存在することを表しており、ある種の純性 (purity) を表現している。

このような“純性”を示さない素数の集合を $S(V_t)$ とおく。このとき、[HSBT] では以下のことが示されている：

定理 ([HSBT] 定理 4.4). $t \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}[1/(n+1)]$ とするとき、 $S(V_t) = \emptyset$ である。さらに、

$$L(V_t, s) = 2^{n/2} (2\pi)^{n(n-2)/8} (2\pi)^{-ns/2} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \dots \Gamma(s+1-n/2) \prod_p L(WD_p(V_t), s)$$

とくと、これは複素平面全体に有理型に解析接続される。さらに、整関数 (イプシロン 因子) $\epsilon(V_t, s)$ が存在し ([HSBT] ではその具体的な形も決定している), 関数等式

$$L(V_t, s) = \epsilon(V_t, s)L(V_t, n - s)$$

が成立する.

◇

証明は、潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) を洗練させた形の定理を証明し ([HSBT] 定理 3.3), $V_{\ell, t}$ に適用することで $V_{\ell, t}$ の潜在的 モジュラー 性を示し、定理 4.2 で行った議論と同様に自明表現のブラウアー誘導表現分解を用いて 保型 L 関数の積に帰着して示すのである。なお、保型表現から構成されたガロワ整合系に関しては、付随するヴェイユ-ドリーニュ表現が“純”であることが [TY] 定理 3.2 で示されているので、 $S(V_t) = \emptyset$ も分かるというからくりである。

L 関数の有理型解析接続及び関数等式は、[Taylor2] や [Taylor3] でも扱われているように「潜在的モジュラー性定理」の最初の直接的な応用であり、その意味では $L(V_t, s)$ の解析接続性と関数等式に関するこの結果は 佐藤-テイト予想よりも“基本的な”結果と呼べるかもしれない。しかし、如何せん V_t というモチーフがあまりにも特別なものであるため、その L 関数が応用出来る局面がどの程度存在するかは未知数である^{*48}。

しかし、曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は先にも述べたように、数理論理学、代数幾何学と色々な面で非常に重要な対象であり^{*49}、いつ何時この L 関数 $L(V_t, s)$ が活躍するとも限らない。特に、カラビ-ヤウ多様体と言えバ ミラー対称性 (*mirror symmetry*) などと切っても切り離せない対象であるが、こういった不思議な対称性とゼータ関数の関数等式の対称性に何か神秘的な関係が隠されていたり..... するのかどうかは全くもって分からないが、とにかくこの L 関数 $L(V_t, s)$ も何れ数論の枠を飛び出して色々な場面で活躍する日が到来するのかもしれない。

付録 B 潜在的モジュラー性定理の証明 (初期型)

この付録では、[HSBT] の初期の稿に書かれていた GSp 表現の潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1 に対応する) のステートメント及び、その証明について簡単に解説する。まずは [HSBT] の初期の稿での 定理 3.1 のステイトメントを述べよう；

定理 (GSp_n 表現の潜在的モジュラー性定理 (初期型)). F/F_0 を総実代数体の ガロワ 拡大と

^{*48} テイラーは [Taylor4] のイントロダクションで、審査員に「この特別な族 (カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$) を研究することの重要性を説明するよう求められた」と記述している。それに対する一つの答えとして テイラーは、 ℓ 進コホモロジーへの ガロワ 作用が“大きい”多様体 (この場合は GSp_n) の L 関数の研究 “例”として重要であるという趣旨の事を述べているが、 $L(V_t, s)$ 自身の秘めた可能性については触れていないようである。

^{*49} 先のテイラーの論文 [Taylor4] にも、“It is a family that has been studied quite widely and has some beautiful properties” とある。

し, $n_1, n_2, \dots, n_s$ を正の偶数とする. ℓ を $\max\{C(n_i), n_i\}$ ($C(n_i)$ は 補題 1.11 にて導入された数) より大きい F で不分岐な素数とし,

$$\ell \equiv 1 \pmod{n_i + 1} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s$$

を満たすものとする.

v_q を素数 $q \neq \ell$ 上の F の素点とし,

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (\sharp \kappa(v_q))^j &\not\equiv 1 \pmod{\ell} && \text{for } 1, 2, \dots, \max\{n_i\} && (v_q \text{ の非合同条件}) \\ q \nmid (n_i + 1) &&& \text{for } 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

を満たすものとする. $\mathcal{L}$ を, ℓq 上の素点を含まない F の有限素点の有限集合とする.

さて,

$$r_i: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow GSp_{n_i}(\mathbb{Z}_\ell) \quad \text{for } 1, 2, \dots, s$$

を, 以下の 7 つの性質を満たす連続表現とする:

(性質-1) r_i の倍率 (multiplier) は $\epsilon_\ell^{1-n_i}$. 但し, ϵ_ℓ は円分 ℓ 進指標.

(性質-2) r_i は有限個の有限素点でのみ分岐.

(性質-3) r_i の法 ℓ 還元 $\bar{r}_i$ の半単純化 $\bar{r}_i$ に対し, $\bar{r}_i(\text{Gal}(\overline{F}/F(\mu_\ell)))$ は大きい. 但し, μ_ℓ は 1 の ℓ 乗根のなす乗法群.

(性質-4) $\overline{F}^{\ker \text{ad } \bar{r}_i}$ は $F(\mu_\ell)$ を含まない.

(性質-5) r_i は $\mathcal{L}$ 上の全ての素点で不分岐.

(性質-6) w を ℓ 上の F の素点とすると, $r_i|_{\text{Gal}(\overline{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり, 埋込み $\tau: F_w \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \text{gr}^j(r_i \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq j \leq n-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

が成立する. さらに,

$$\bar{r}_i|_{IF_w} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n_i}$$

も成立する.

(性質-7) $r_i^{\text{ss}}|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}$ 及び $\bar{r}_i^{\text{ss}}|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}$ は不分岐表現で, $r_i^{\text{ss}}|_{\text{Gal}(\overline{F}_{v_q}/F_{v_q})}(\text{Frob}_{v_q})$ は固有値 $1, \sharp \kappa(v_q), \dots, (\sharp \kappa(v_q))^{n_i-1}$ を持つ. 但し $\kappa(v_q)$ は v_q の剰余体.

このとき, 総実代数体 F'/F で F_0 上ガロワ拡大かつ $\overline{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 達の合成体と F 上線形無関係なものが存在し, 以下の性質を満たす.

・ $\mathcal{L}$ 及び ℓ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐.

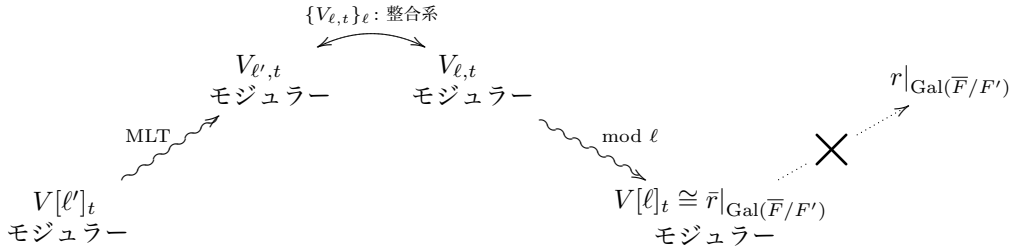


図 7 $\bar{r}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ のモジュラー性が $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に持ち上がらない！

- ・ v_q 上の F' の素点 w_q が存在して、各 $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となるものが存在する．ここで、 $\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})$ はスタインバーグ表現． $\diamond$

定理 3.1 との大きな違いは (b) で与えられる 非合同性条件 の有無であることは既に 注意 16 で述べた通りである (注意 16 中の (DS-2) に対応)^{*50}．この非合同性条件が何故証明を複雑化せしめる要因となったかを振り返ってみよう；モレーバイーの定理で生じる体拡大に依って、非合同性条件 (b) は F' では成立しなくなり得る．したがって、改良前のテイラーのモジュラー性持ち上げ定理で必要とされた DS 条件 (DS-1), (DS-2) が成立しなくなり、折角 $\bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に伝搬したモジュラー性が (そのままでは) $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に持ち上がらなくなってしまうのである (図 7 にその様子を表してみた)．

この困難を乗り切るために、[HSBT] の初期の稿では再び超曲面族 $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いて体及び素数の巧みな取り替え (descent) を行っている．モジュラー性持ち上げ定理が改良された現在となってはこのような議論は一切不要になったが、それでもこの手の超絶的な技巧を概観するのも全く無駄ではないと思われるので、付録として掲載することにした．

証明の概略. (定理 3.1 の証明と重複する部分もあるので、その部分は割愛させていただく)

Step 1, 下準備

(準備 1) 「モジュラー性が既知な表現」の構成 (ℓ' サイド)

この部分は 定理 3.1 の証明の Step1, と全く同様なので省略する．

(準備 2) “補助的な” (auxiliary) 素数 q' の導入

ここで、証明の中でしか用いられない素数 q' を補助的に導入する．

この q' は、 q とともに $\mathcal{L}$ の下の素数とも異なり、任意の $1 \leq i \leq s$ に於いて

$q' \nmid (n_i + 1)$ かつ

^{*50} (性質-7) の固有値の条件も α がついていない等若干異なるが、これは指標で捻れば良いだけなので大した問題はない．

$$\begin{array}{ccc}
 & \longleftrightarrow & \\
 & V_{n_i, \ell', t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} & V_{n_i, \ell, t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\
 & \text{モジュラー} & \text{モジュラー} \\
 \text{MLT} & & \\
 \text{DS at } v_{q'} & \xrightarrow{\text{(i)}} & \xrightarrow{\text{mod } \ell} \text{(ii)} \\
 (I(\bar{\theta}_i) \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} & & V_{n_i}[\ell]_{t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\
 \cong V_{n_i}[\ell']_{t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} & & \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\
 \text{モジュラー} & & \text{モジュラー}
 \end{array}$$

 図 8 定理 3.1 の初期の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリック I

- $EM_1 M_2 \dots M_r$ に於いて q' が完全分解.
- $(q')^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ for $1, 2, \dots, \max\{n_i\}$.
- $(q')^j \not\equiv 1 \pmod{\ell'}$ for $1, 2, \dots, \max\{n_i\}$.
- $\bar{r}_i(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, q', \dots, (q')^{n_i-1}$ を持つ ($v_{q'}$ は q' 上の F の素点).
- $I(\bar{\theta}_i)(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, q', \dots, (q')^{n_i-1}$ を持つ.

を満たすものとして取る. q' が ℓ に対しても ℓ' に対しても非合同条件を満たすのがポイントで, したがって $v_{q'}$ という素数はモジュラー性持ち上げ定理と非常に相性が良いのである. 我々は取り敢えずこの $v_{q'}$ を用いて (ℓ, ℓ') トリックを行い, 最後に $v_{q'}$ を v_q に取り替える議論を行うこととなる (Step 4, 参照).

(準備 3) 二次指標に依る「捻り」

ここはあまり本質的ではない. 要するに $\bar{r}_i$ の v_q でのフロベニウス固有値 $(\sharp \kappa(v_q))^j$ と 補題 1.15 から従う $V_{n_i}[\ell]_{t_q}$ ($t_q \in T_0(F_{v_q})$) でのフロベニウス固有値 $\alpha(\sharp \kappa(v_q))^j$ との間に $\alpha \in \{\pm 1\}$ のズレが生じるので, その部分を補正する二次の指標を準備する, というだけのことである.

Step 2, 「 F' への降下テクニック」のための準備

$W_i = \bar{r}_i \otimes \delta_i$ とする (δ_i は v_q でのフロベニウス固有値の符号のズレを補正する二次指標). モジュライ空間 $T_{W_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ (§2.2 参照) に以下のスコレム・データに対してモレーバイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用する:

$S_1 = \{\text{無限素点}\} \cup \{v_q, v_{q'}\}$, $S_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell\ell' \text{ 上の素点}\}$, $S_3 = \emptyset$ とする. 各素点

$w \in S(= S_1 \sqcup S_2)$ に於ける局所有理点の条件 $\Omega_{i,w}$ を

$$\begin{aligned}\Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w) \mid w(t) < 0\} \text{ の } T_{W_i}(F_w) \text{ での逆像}) \quad (w = v_q, w_{q'} \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,w} &= T_{W_i}(F_w) \quad (w \mid \infty \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体}) \\ &\quad (w \in S_2 \text{ のとき}),\end{aligned}$$

で定める (各 $\Omega_{i,w}$ が空でないことは定義から比較的簡単に分かる).

命題 2.1 を繰り返し用いることで, 漸進的に総実代数体 F_i/F 及び F_i 有理点 $\tilde{t}_i \in T_{W_i}(F_i)$ を,

- F_i/F はガロワ拡大
- F_i/F は $\mathcal{L}$ 及び $\ell\ell'$ 上の素点で不分岐
- v_q と $v_{q'}$ は F_i で 完全分解
- F_i は $KF_1F_2 \dots F_{i-1}$ と F 上線形無関連. 但し, K は $\ker(\bar{r}_i)$, $\ker(I(\bar{\theta}_i))$, $\ker(\delta_i)$, $\ker(\delta'_i)$ による $\bar{F}$ の固定体を合成したもの
- 全ての $w \in S_1 \sqcup S_2$ に対して, $\tilde{t}_i$ は $\Omega_{i,w}$ に含まれる

を満たすように構成出来る. $\tilde{F} = F_1F_2 \dots F_r$ は F の総実ガロワ拡大となり, S_1 の素点は全て $\tilde{F}$ で完全分解し, S_2 の素点は全て $\tilde{F}$ で不分岐となり, $\tilde{F}$ は K と F 上線形無関連となる. また, $t_i \in T_0(\tilde{F})$ を $\tilde{t}_i$ の像とすると, 構成法から $V_{n_i}[\ell]_{t_i} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F})}$ が成立する.

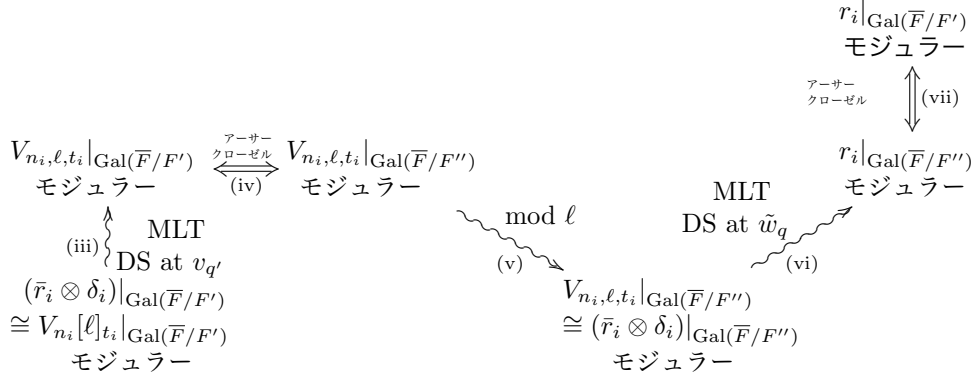
Step 3, (ℓ, ℓ') トリック

Step 2, (及び 定理 3.1 の証明の Step 2,) と全く同様の議論を $W'_i = (\bar{r}_i \times I(\bar{\theta}_i)) \otimes \delta'_i$ (但し, δ'_i も矢張りフロベニウス固有値の符号のズレを補正する二次指標), $S'_1 = \{\text{無限素点}\} \cup \{v_{q'}\}$, $S'_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell\ell' \text{ 上の素点}\}$, $S'_3 = \emptyset$ 及び

$$\begin{aligned}\Omega'_{i,v_{q'}} &= (\{t \in T_0(F_{v_{q'}}) \mid v_{q'}(t) < 0\} \text{ の } T_{W'_i}(F_{v_{q'}}) \text{ での逆像}) \subseteq T_{W'_i}(F_{v_{q'}}) \\ \Omega'_{i,w} &= T_{W'_i}(F_w) \quad (w \mid \infty \text{ のとき}), \\ \Omega'_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W'_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体}) \\ &\quad (w \in S'_2 \text{ のとき}),\end{aligned}$$

に対して実行すると, 漸進的に総実代数体 F'_i/F 及び F'_i 有理点 $\tilde{t}'_i \in T_{W'_i}(F'_i)$ を

- F'_i/F はガロワ拡大
- F'_i/F は $\mathcal{L}$ 及び $\ell\ell'$ 上の素点で不分岐
- $v_{q'}$ は F'_i で 完全分解
- F'_i は $K\tilde{F}F'_1F'_2 \dots F'_{i-1}$ と F 上線形無関連
- 全ての $w \in S'_1 \sqcup S'_2$ に対して, $\tilde{t}'_i$ は $\Omega'_{i,w}$ に含まれる


 図9 定理 3.1 の初期の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリック II-descent to F'

を満たすように構成出来る. $\tilde{F}' = F'_1 F'_2 \dots F'_r$ は F の総実ガロワ拡大となり, S'_1 の素点は全て $\tilde{F}'$ で完全分解し, S'_2 の素点は全て $\tilde{F}'$ で不分解となり, $\tilde{F}'$ は $K\tilde{F}$ と F 上線形無関連となる. また, $t'_i \in T_0(\tilde{F}')$ を $\tilde{t}'_i$ の像とすると, 構成法から $V_{n_i}[\ell]_{t'_i} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F}')}$ 及び $V_{n_i}[\ell']_{t'_i} \cong (I(\bar{\theta}_i) \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F}')}$ が成立する.

Step 4, 証明の完成

F' を $\tilde{F}\tilde{F}'$ の F_0 上のガロワ閉包とする. F' は $\bar{F}^{\ker(\bar{r}_i)}$ 達の合成体と線形無関連である.

- (i) すると, $V_{n_i, \ell', t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は $v_{q'}$ に於いて DS 条件を満たすから ($v_{q'}$ は F' で完全分解するので, 非合同性条件 (DS-2) を満たすことを改めて注意しよう), テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4], 定理 5.4) に依って, $V_{n_i, \ell', t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的となる.
- (ii) レベルは ℓ と素なので, 法 ℓ で考えて $V_{n_i}[\ell]_{t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的. したがって $\bar{r}_i |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ 及び $(\bar{r}_i \otimes \delta_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong V_{n_i}[\ell]_{t_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的.
- (iii) 同様に $V_{n_i, \ell, t_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は $v_{q'}$ に於いて DS 条件を満たすから, 矢張り テイラーのモジュラー性持ち上げ定理により, $V_{n_i, \ell, t_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的となるが, より強く重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q v_{q'}\}}$ 型で保型的ともなる (注意 17 及び 定理 3.2 の証明の Step 3, (ii) と同様の議論より従う).
- (iv) v_q 上の F' の素点 w_q を適当に取り, F'' を F'/F に於ける w_q の分解体とする. さらに, w_q の下にある F'' の (唯一の) 素点を $\tilde{w}_q$ とすると, F'/F'' が

可解拡大なので、アーサー-クローゼルの可解底変換定理 ([AC] 定理 4.2 及び [CHT] 補題 4.3.2) によって、 $V_{n_i, \ell, t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}}$ 型で保型的.

- (v) レベルが ℓ と素だから、法 ℓ で考えて、 $V_{n_i}[\ell]_{t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}}$ 型で保型的.
- (vi) v_q は F'' で完全分解するので、 $r|_{\text{Gal}(\bar{F}_{\tilde{w}_q}/F''_{\tilde{w}_q})}(\text{Frob}_{w_q'')}$ の固有値は $r|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}(\text{Frob}_{v_q})$ と等しくなる (DS-1). さらに $\sharp\kappa(\tilde{w}_q) = \sharp\kappa(v_q)$ であることから (b) と合わせて $\tilde{w}_q$ も非同次条件 (DS-2) を満たす. つまり、 $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')} \text{ は } \tilde{w}_q \text{ に於いて DS 条件を満たすので、モジュラー性持ち上げ定理から、} r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')} \text{ は重さ 0, } \{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}} \text{ で保型的.}$
- (vii) 再び アーサー-クローゼルの可解底変換定理により、 $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的.

□

図 8 及び 図 9 に Step 4, の大筋の流れを示した. モレ-バイイーの定理を適用する際に v_q や $v_{q'}$ を S_1 乃至 S'_1 (完全分解する素点の集合) に含めることに依り、(適当に分解体をとる等して) 非同次条件 (b) を崩さないよう巧く議論を進めているのがポイントと言えよう.