2019 年度・線型代数学演習 (S1)：第 1 回・解答

2019.4.8 実施，担当：石本

1-1.

共通資料 p83 の命題 1 の証明をみよ．□

1-2.

(1)

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 4 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 4 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 3 & 4\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

(4)

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

より，

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ -13 & 48 \end{bmatrix}$$

(5) (2) の結果を使って

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ -13 & 48 \end{bmatrix}. \square$$

注意：一般に $AB \neq BA$ である．（行列の積の順序は必ずしも交換できるわけではない）
注意：一般に $A(BC) = (AB)C$ である．（行列の積は横の順序が同じであればどこから計算してもよい）

1-3.

直接計算することによって示す．

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ad-bc)/\Delta & (-ab+ab)/\Delta \\ (cd-cd)/\Delta & (-bc+ad)/\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

また同様に，

$$BA = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E. \square$$

1-4.

(1) 直接 $n = 2,\ n = 3$ を計算することにより，

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

が推測できる．これを帰納法で示せばよい．
(2)

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$$

となり，これを繰り返せば,

$$A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$$

がわかる．実際，自然数 k に対して,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta+\sin\theta\cos k\theta\\ -\sin\theta\cos k\theta-\cos\theta\sin k\theta & \cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta\\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

なので，帰納法からすぐに,

$$A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$$

が示される．
注意：この問題 (2) の行列は回転行列と呼ばれ，平面上の点を角 θ だけ回転させる．それゆえ A^n は角 $n\theta$ だけ回転させる行列になっている．
(3)

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2 & 2a\\ 0 & a^2\end{bmatrix}.\ 同様に\ A^3=\begin{bmatrix}a^3 & 3a^2\\ 0 & a^3\end{bmatrix}.$$

これより $A^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{bmatrix}$ がわかる．厳密な証明には (2) と同様に数学的帰納法を用いれば良い．

1-5.
(1) 問題 **1-3.** の結果より,

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ であり,\ B=P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned}PB^nP^{-1}&=P\left(P^{-1}AP\right)^nP^{-1}=P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)P^{-1}\\ &=(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(PP^{-1})\\ &=EAEAE\cdots AE=AAAA\cdots A=A^n\end{aligned}$$

であることに注意．ここで，最後の行で E は単位行列であり，$EA=AE=A$ であることを用いた．B^n は先の問題と同様に計算することで,

$$B^n=\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}$$

であることがわかるので,

$$A^n=PB^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n\end{bmatrix}\ \square$$

2019年度・線型代数学演習 (S1)：第2回・解答

2019.4.22 実施，担当：石本

2-1.

(1) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{Im} f = (0, \infty) \neq \boldsymbol{R}$ であり，全射ではない．狭義単調減少関数であり，それゆえ単射．

(2) $|z| = 1$ より，$z = \cos\theta + i \sin\theta$，と書ける．ただし $\theta \in [0, 2\pi)$．ド・モアブルの公式より $z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ は偏角 θ を 2 倍にする写像．それゆえ，全射であるが，単射ではない．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a(x-y) \\ b(x+y) \end{bmatrix}$．$x' = x - y$ と $y' = x + y$ とすると，写像 $(x, y) \mapsto (x', y')$ は全単射（全射かつ単射）．$a \neq 0, b \neq 0$ のとき，$(x', y') \mapsto (ax', by')$ も全単射なので，写像 $A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は全単射．一方，$a = 0$ のとき，$(x', y') \mapsto (0, by')$ は，全射でも単射でもない．$b = 0$ のときも全射でも単射でもない．まとめると，$ab \neq 0$ なら全単射，$ab = 0$ なら全射でも単射でもない．□

2-2.

(1) $z^2 = -2i$ を解く．$-i = \cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2)$ より，$z = \sqrt{2}\,(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)), \sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$．よって，$z = \pm(1 - i)$.

(2) まず，左辺 $= P(z)$ としたとき，$P(2) = 0$ より，因数定理より $P(z)$ は $z - 2$ で割れる．因数分解を進めると $P(z) = (z-2)(z^3+1) = (z-2)(z+1)(z^2-z+1)$ となるので，$z = 2, -1, (1 \pm i\sqrt{3})/2$.

(3) まず，左辺 $= P(z)$ としたとき，$P(i) = 0$ より，因数定理より $P(z)$ は $z - i$ で割れる．因数分解を進めると $P(z) = (z-i)(z^2+iz+1) = 0$．ここで，$z^2 + iz + 1 = 0 \Leftrightarrow (z + (i/2))^2 = -5/4$ より，$z + i/2 = \pm i\sqrt{5}/2 \Leftrightarrow z = -i/2 \pm i\sqrt{5}/2$．まとめると，解は $z = i, (-i \pm i\sqrt{5})/2$．□

2-3.

剰余定理より，$F(x), G(x)$ を商として，$P(x) = F(x)(x-\alpha) + r = G(x)(x-\beta) + s$ と表される．同様に，$H(x)$ を商として，$P(x) = H(x)(x-\alpha)(x-\beta) + ax + b$ と書ける．ただし，a, b は実の定数．$P(\alpha) = r = a\alpha + b$，$P(\beta) = s = a\beta + b$ より，$a = \dfrac{r-s}{\alpha-\beta}$，$b = \dfrac{s\alpha - r\beta}{\alpha - \beta}$．すなわち，余りは $\left(\dfrac{r-s}{\alpha-\beta}\right)x + \dfrac{s\alpha - r\beta}{\alpha-\beta}$．□

2-4.

(1) D の条件が H の条件と同値であることを示す．$w = \dfrac{z-i}{z+i}$ より，$|w| < 1 \Leftrightarrow |z - i| < |z + i|$．これは z 平面の上半平面領域が w 平面の単位円内部に対応していることを意味している。

(2) 実数 x, y, X, Y を用いて，$z = x + iy$，$w = X + iY$ と表し，$(X(x,y), Y(x,y))$ の満たす式を求める．$w = \dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$ より，$X = 1 + \dfrac{-2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$，$Y = \dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$．ここで，$y = k(>0)$ (k は定数) とすると，$Y/(X-1) = x/(y+1)$ より $x = (k+1)Y/(X-1)$．これを用いて，X の式に代入すれば，$X - 1 = \dfrac{2(X-1)^2}{(k+1)[(X-1)^2+Y^2]}$．整理すると，$\left(X - 1 + \dfrac{1}{k+1}\right)^2 + Y^2 = \dfrac{1}{(k+1)^2}$．これは w 平面では中心が単位円内部の実軸上にあって $w = 1$ を通る円であり，$w = 1$ を除いて単位円内にある．よって，求める図形はこの円の $w = 1$ を除いた部分である．

(3) $x=k(\neq 0)$ のとき，(2) と同様に式変形をすれば，$Y=\dfrac{-2Y^2}{k[(X-1)^2+Y^2]}$ より，$(X-1)^2+\left(Y+\dfrac{1}{k}\right)^2=\dfrac{1}{k^2}$ を得る．これは，中心が $\mathrm{Re}w=1$ 上にあって，$w=1$ を通る円である．ゆえに，求める図形はこの円の円弧で単位円に含まれる部分である．一方，$x=0$ のときは，$X=1-\dfrac{2}{y+1}$，$Y=0$ より，実軸上の端点を含まない線分 $\{c\in \boldsymbol{R} \mid -1<c<1\}$ に移る．□

2-5.

(1) $c\neq 0$ のとき，$\mathrm{Im}z>0$ より $\mathrm{Im}(cz+d)=c\mathrm{Im}z\neq 0$．$c=0$ のとき，$cz+d=d$ だが $\Delta_A=ad>0$ から $d\neq 0$ なので $cz+d\neq 0$.

(2) $z=x+iy$ ($x,y\in \boldsymbol{R}$，ただし $y>0$) として計算すると，$f_A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy}$. $\mathrm{Im}f_A(z)=\dfrac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}(ad-bc)$ となり，$y>0$，$\Delta_A>0$ より，$\mathrm{Im}f_A(z)>0$ から $f_A(z)\in H$.

(3) 実数 p,q,r,s に対して，$B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ で行列式が正，すなわち $\Delta_B=ps-qr>0$ であるものを考える．$AB=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$ であるから $f_{AB}(z)=\dfrac{(ap+br)z+(aq+bs)}{(cp+dr)z+(cq+ds)}$. 一方，$f_A(f_B(z))=\dfrac{a\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right)+b}{c\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right)+d}=\dfrac{a(pz+q)+b(rz+s)}{c(pz+q)+d(rz+s)}=f_{AB}(z)$.

注意：行列 AB の行列式は $\Delta_{AB}=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)=bcqr+adps-adqr-bcps=(ad-bc)(ps-qr)=\Delta_A\Delta_B>0$ となっている．□

2019 年度・線型代数学演習 (S1)：第 3 回・解答

2019.5.13 実施，担当：石本

3-1.

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=[5,3,0]^T\cdot[0,4,-5]^T=12$.

(2) $\cos\theta=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$ である．よって，θ は (エ) $60^\circ\le\theta\le 90^\circ$ を満たす.

(3) (3,-5,-4).

(4) $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=|[-1,-3,3]^T|=\sqrt{19}$.

(5) 直線 AB の方程式は t を実数として，$[1,-1,2]^T+t[-1,-3,3]^T=[-t+1,-3t-1,3t+2]^T$．$yz$ 平面 $(x=0)$ との交点は $t=1$ のときで，$(0,-4,5)$．(6) 平面 S の方程式は $-(x-1)-3(y+1)+3(z-2)=0$．すなわち，$-x-3y+3z=8$．P の座標は実数 p を使って $(5p,p,2p)$ で表されるので，これを代入すると $p=-4$．すなわち $(-20,-4,-8)$．□

3-2.

(1) 直接計算すればよい．$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$, $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$, $\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,c_3]^T$ とすれば，左辺は,

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{bmatrix}=(b_2c_3-b_3c_2)a_1+(b_3c_1-b_1c_3)a_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_3.$$

右辺も計算すると,

$$\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=(b_2c_3-b_3c_2)a_1+(b_3c_1-b_1c_3)a_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_3$$

となり，両辺一致する.

(2) 直接計算すればよい．$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$, $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$, $\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,c_3]^T$ とすれば，左辺は,

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_3c_3+a_1c_1)b_2-(a_3b_3+a_1b_1)c_2\\(a_1c_1+a_2c_2)b_3-(a_1b_1+a_2b_2)c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1\\(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2\\(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3\end{bmatrix}$$

となり，右辺に一致する．□

3-3.

(1) $\begin{bmatrix}6&10&-5\\0&-9&27\end{bmatrix}$ (2) 積は定義されていない．(3) $\begin{bmatrix}6&2&-4\\-3&-1&2\\12&4&-8\end{bmatrix}$ (4) -3 □

3-4.

(1) $A^2=E$ となる．よって $A^n=A$(n が奇数のとき)、$A^n=E$(n が偶数のとき) となる.

(2) まず，A^2 を計算すると、$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$．さらに A^3 を計算すると $A^3 = O$．これより，$n \geq 3$ では，$A^n = O$．□

3-5.

(1) $B^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$，$C^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -C$ から示される．

(2) A の (i,j) 成分を a_{ij}，同様に B の (i,j) 成分を b_{ij} とする．2 つの行列の積 AB は $l \times n$ 行列であり，その (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$．左辺はこの転置行列なのでその (i,k) 成分は,

$$\sum_{j=1}^{m} a_{kj} b_{ji} = \sum_{j=1}^{m} b_{ji} a_{kj}.$$

b_{ji} は B^T の (i,j) 成分，a_{kj} は A^T の (j,k) 成分なので，これは $B^T A^T$ に等しい．□

3-6.

(1) $(A*B)C - C(A*B) + (B*C)A - A(B*C) + (C*A)B - B(C*A) = (AB-BA)C - C(AB-BA) + (BC-CB)A - A(BC-CB) + (CA-AC)B - B(CA-AC) = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB - BCA + BAC = O$.

(2) A の (i,j) 成分を a_{ij}，B の (i,j) 成分を b_{ij} と書けば，$A*B$ の (i,k) 成分は $\sum_j (a_{ij}b_{jk} - b_{ij}a_{jk})$．この行列の対角成分の和をとれば，$\mathrm{Tr}(A*B) = \sum_i \sum_j (a_{ij}b_{ji} - b_{ij}a_{ji})$．$i$ と j に関する和の順序を入れ替えれば，第 2 項目は第 1 項目と同じ．よって，$\mathrm{Tr}(A*B) = 0$．□

2019 年度・線型代数学演習 (S2)：第 1 回・解答

2019.6.17 実施，担当：石本

1-1.

(1) 拡大係数行列に対して，行の基本変形によって簡約化する．(1 行目)×(−1) を (2 行目) に加え，(1 行目)×(−3) を (3 行目) に加える．(2 行目)×(−1) をする．(2 行目)×(+1) を (1 行目) に加え，(2 行目)×(−1) を (3 行目) に加える．(3 行目)×(1/4) をする．(3 行目)×(−1) を (1 行目) に加え，(3 行目)×(−3) を (2 行目) に加える．以上の操作で，次のように変形される．

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\1 & -2 & -5 & 2\\3 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\0 & -1 & -3 & 1\\0 & 1 & 7 & -5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\0 & 1 & 3 & -1\\0 & 1 & 7 & -5\end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 3 & -1\\0 & 0 & 4 & -4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 3 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

よって，$(z, y, z) = (1, 2, -1)$．階数は 3．□

(2) (1 行目)×(1/2) をする．(1 行目)×2 を (2 行目) に加える．(3 行目)×2 を (2 行目) に加える．以上の行基本変形により，拡大係数行列は次のように変形される．

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 4 & -2\\-2 & -4 & 0 & 1\\0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\-2 & -4 & 0 & 1\\0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\0 & -2 & 4 & -1\\0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

よって連立方程式は解を持たない．階数は 3．□

(3) (1 行目)×(−1) を (2 行目) に加え，(1 行目)×(−2) を (3 行目) に加える．(2 行目)×(−1) を (3 行目) に加える．(3 行目)×(−1) を (2 行目) に加える．以上の操作で，拡大係数行列は次のように簡略化される．

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2\\2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$b = c_1$，$d = c_2$ をそれぞれ任意定数にとれば，解は $(a, b, c, d, e) = (2 + 2c_1 - 3c_2, c_1, -1 + c_2, c_2, 1)$ と表される．階数は 3．□

1-2.

(1) 3×6 行列 $[AE]$ を簡約化する．(1 行目)×(−2) を (2 行目) に加え，(1 行目)×(−1) を (3 行目) に加える．(3 行目)×(−1) を (1 行目) に加え，(3 行目)×(1) を (2 行目) に加える．(2 行目)×(−1) をする．(2 行目)×(−2) を (1 行目) に加える．以上の操作で，

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1\\0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

となるので，逆行列は存在し $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．□

(2) 3×6 行列 $[AE]$ を簡約化する．$a \neq 0$ のとき，各行 $\times(1/a)$ を乗じる．(2 行目)$\times(-1/a)$ を (1 行目) に加える．(3 行目)$\times(-1/a + 1/a^2)$ を (1 行目) に加え，(3 行目)$\times(-1/a)$ を (2 行目) に加える．以上の操作で，

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a^{-1} & a^{-1} & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^{-1} & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^{-1} - a^{-2} & a^{-1} & -a^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & a^{-1} & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-2} & -a^{-2} + a^{-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$$

$a = 0$ のとき行列の階数 A の階数は 2 なので，逆行列は存在しない．$a \neq 0$ であれば，逆行列は存在し $A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & -a^{-2} & -a^{-2} + a^{-3} \\ 0 & a^{-1} & -a^{-2} \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ となる．□

1-3.

(1) $R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ であることを示す．(2) $X^T X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2$.
(3) $X^T RX$ を直接計算すると，$X^T RX = (x^2 + y^2)\cos^2\theta$ となる．今，条件より，$X^T X = x^2 + y^2 \neq 0$ であるから，$\cos^2\theta = 0$．すなわち，$\theta = \pm\pi/2$.
(4) 求める行列を $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると，$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．これは $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とすると，$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1$ かつ，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ を示している．すなわち，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ は互いに直交する単位円周上の点であることがわかる．これより，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ と置けば，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \cos(\theta \pm \pi/2) \\ \sin(\theta \pm \pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp\sin\theta \\ \pm\cos\theta \end{bmatrix}$ となる．上の符号をとった場合は，行列式は 1 となり，そのまま行列 R になる．下の符号をとった場合には，行列式は -1 となってしまうので，上の符号に対応する R だけで表現できることが示される．□

1-4.

(1) $A\,A^{k-1} = E$ より逆行列 $A^{-1} = A^{k-1}$ が存在するので正則行列.
(2) $E - A^k = (E - A)(E + A + \cdots + A^{k-2} + A^{k-1}) = E$ なので，$E - A$ は逆行列 $(E + A + \cdots + A^{k-2} + A^{k-1})$ が存在するので，正則行列.
(3) 両辺行列のトレースを考える．$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0$．一方，$\mathrm{tr}E = n \neq 0$ なので，$AB - BA = E$ となる A，B は存在しない □.

1-5.

(1) まず，$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ となる．順に行列の積の計算を行い，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ が求まる．

(2) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．(3) $A^n = P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1}$ より，$\begin{bmatrix} -2^{n+1} + 3 & -2^n - 3 & 2^n - 3 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 2 & -2^n + 2 \\ -2^{n+2} + 4 & -2^{n+1} - 4 & 2^{n+1} - 4 \end{bmatrix}$ □.

2019年度・線型代数学演習 (S2)：第2回・解答

2019.7.1 実施，担当：石本

2-1.

(1) 行列 A に対して，行基本変形を行い簡約化する．(4 行目)$\times(-2)$ を (1 行目) へ加え，(4 行目)$\times(-2)$ を (2 行目) へ加え，(4 行目)$\times(+1)$ を (5 行目) へ加える．(4 行目) と (1 行目) を入れ替える．(2 行目)$\times(+1)$ を (3 行目) へ加え，(2 行目)$\times(+1)$ を (5 行目) へ加える．(3 行目)$\times(-1/2)$ を (4 行目) へ加え，(3 行目)$\times(-1/2)$ を (5 行目) へ加える．これらの基本変形により A は次のように変形される．

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，行列 A の階数は 3.　(2) 行列 A に対して，(1 行目)$\times(-1)$ を残りの行に加えていく．$x \neq 1$ のとき，(2 行目) 以降を $\times\frac{1}{1-x}$ する．その後 (2 行目) 以降に対して，各行の $(-x)$ 倍を順に (1 行目) に加えていくと，

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x-1 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-1 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+(n-1)x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots(*)$$

さらに，$x \neq -1/(n-1)$ であれば，(1 行目) に $\frac{1}{1+(n-1)x}$ を乗じて，それを順に (2 行目) 以降に加えていくと，

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots(**)$$

これとは別に，$x=1$ のとき，$x=-1/(n-1)$ のときをそれぞれ考える．$x=1$ なら (1 行目)$\times(-1)$ を (2 行目) 以降に加えていくと，(2 行目) 以降の成分は全てゼロになるので階数は 1．$x=-1/(n-1)$ なら式 $(*)$ の一番右側の表式より階数は $n-1$．それ以外のときは式 $(**)$ より階数は n.

2-2.

(1) 線型写像の定義は次の 2 つの条件を満たすことであった．条件 (a) 任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2)$, 条件 (b) 任意の $c \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$．条件 (a) は，$f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2)$ より成り立つ．条件 (b) も同様に，$f(c\boldsymbol{x}) = A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = cf(\boldsymbol{x})$ から成り立つ．　(2) $\boldsymbol{u}_1 = f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$．同様に計算することで，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = A$.　(3) ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 V が部分空間であることを示すには次の 2 つの条件，(a) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$, (b) 任意の $c \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ について $c\boldsymbol{u} \in V$, が成り立っていることを示せば良い．まず条件 (a) について考える．$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在する．すると $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ より，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$．条件 (b) は $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in V$ が存在するので，$c\boldsymbol{u} = cA\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$，よって $c\boldsymbol{u} \in V$ がわかる．

(4) (3) と同様 2 つの条件を確認する．条件 (a) は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対して，$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$ から成り立つ．条件 (b) は $A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ から成り立つ． (5) 拡大係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & u_1 \\ 3 & -2 & -2 & u_2 \\ 2 & -1 & -3 & u_3 \end{bmatrix}$ に対して行基本変形を行い簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -2u_1+u_2 \\ 0 & 1 & -5 & -3u_1+u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1-u_2+u_3 \end{bmatrix}$ となる．以上より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $u_1 - u_2 + u_3 = 0$．これは $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$ が，原点を通りベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直な平面上の点，であることを意味している． (6) (5) の簡約化から係数行列 A の階数 (すなわち $\mathrm{Im}(f)$ の次元) は 2． (7) 上の基本変形から，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $z = t$ を任意の実数とすれば，$\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$．これは $\boldsymbol{x}$ が原点を通り $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行な直線上の点であることを意味している．$W = \mathrm{Ker}(f)$ の次元は 1.

2-3.

(1) $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+2c_2+c_3 \\ 3c_1-c_2+3c_3 \\ -2c_1-3c_2-3c_3 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_n$ より，成り立つ． (2) 係数行列を行基本変形をして簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となるので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となり，これは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であることを示している． (3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ の連立方程式を解く．拡大係数行列に対し，行基本変形を施す．(1 行目)×(−3) を (2 行目) へ加え，(1 行目)×(+2) を (3 行目) へ加える．(1 行目) と (3 行目) をそれぞれ ×(+7) する．(2 行目)×(+2) を (1 行目) へ加え，(2 行目)×(+1) を (3 行目) へ加える．(3 行目)×(+1) を (1 行目) へ加える．以上の操作により，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & p_1 \\ 3 & -1 & 3 & p_2 \\ -2 & -3 & -3 & p_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & p_1 \\ 0 & -7 & 0 & -3p_1+p_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2p_1+p_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 14 & 7 & 7p_1 \\ 0 & -7 & 0 & -3p_1+p_2 \\ 0 & 7 & -7 & 14p_1+7p_3 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 & p_1+2p_2 \\ 0 & -7 & 0 & -3p_1+p_2 \\ 0 & 0 & -7 & 11p_1+p_2+7p_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 12p_1+3p_2+7p_3 \\ 0 & -7 & 0 & -3p_1+p_2 \\ 0 & 0 & -7 & 11p_1+p_2+7p_3 \end{bmatrix}$$

と変形できる．以上より，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 12p_1+3p_2+7p_3 \\ 3p_1-p_2 \\ -11p_1-p_2-7p_3 \end{bmatrix}$． (4) c_1, c_2, c_3, c_4 を実数として，$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 + c_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0}$ を考える．この式は行列で書くと次の連立方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ になる．左辺の行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ になるので連立一次方程式の解は t を実数として $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と求まる．よって非自明な解が存在するので 1 次独立ではない． (5) $t = 1$ とすれば，これは $-\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0}$．よって，$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3$.

2019 年度・線型代数学演習 (S2)：第 3 回・解答

2019.7.15 実施，担当：石本

3-1.

(1) 列ベクトルを並べた行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ を考える．行基本変形により，A は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と簡約化できるので，$\mathrm{rank}A = 3$．階数とベクトルの数が一致しているのでこれらのベクトルは 1 次独立．

(2) 同様に列ベクトルを並べた行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を考える．行基本変形により，A は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ と簡約化できるので，$\mathrm{rank}A = 2$．階数がベクトルの数より小さくなっているのでこれらのベクトルは 1 次独立でない（1 次従属）．また，１次独立なベクトルの最大個数は階数と一致する．答えは 2.

注意：列ベクトルを並べた行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ は列ベクトルの 1 次独立な最大個数に一致する．これは，前回の演習問題 2.3(1) で 1 次独立の条件（１次関係）を連立方程式の解の関係で表現したことからも分かる．□

3-2.

(1) 行列を使って，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ への変換を書き下すと，

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．

(2) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ は行列で書き表すと，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$．(1) の結果より，これは $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

(3) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は V の基底なので 1 次独立である．これは，$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いると「$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$」に対応している．これより，(2) の関係式は，$\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{c}$ と読み替えることで，$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ に帰着される．

(4) 基本変形による簡約を考えて A の階数を調べると．$\mathrm{rank}A = 3$．よって $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となって $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は１次独立である．これより $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が V の基底になっていることがわかる．□

3-3.

(1) 式 $(*)$ の左辺を直接計算すると，$F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2$，$F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}'_1 + 5\boldsymbol{e}'_2$，$F(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2$，となるので，式 $(*)$ は $[F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)] = [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2]\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ と表されるので，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]P$ より，$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2]Q$ より，$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(3) 変換行列 P の (i, j) 成分を p_{ij} とすると，$\boldsymbol{u}'_j = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}_i p_{ij}$ と書ける．F の線型性より，$F(\boldsymbol{u}'_j) = F(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}_i p_{ij}) = \sum_{i=1}^n F(\boldsymbol{u}_i p_{ij}) = \sum_{i=1}^n F(\boldsymbol{u}_i)p_{ij}$．よって,$[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)]\,P$.

(4) 表現行列 B と変換行列 Q の定義より,$[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_m]B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]QB$.

(5) (3) の結果と式 $(*)$ より,$[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)]\,P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]AP$. 一方,(4) より $[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]QB$. よって,$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]AP = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]QB$. $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]$ はベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ が１次独立なので, 正則行列となっており, ゆえに $AP = QB$. さらに

Q が正則行列なので Q の逆行列 Q^{-1} が存在し，$B = Q^{-1}AP$.

(6) (5) の式を使えば，$B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 4 & 17 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

(7) $U = V$ のとき，U の線形変換 $F : U \to U$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する表現行列を A として

$[F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n]\, A$ で定める．別の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ への変換行列を P とするとき，(5) で $P = Q$ とすることで，新しい基底での表現行列 B は $B = P^{-1}AP$ で表される．今，A として標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ での表現行列を考える．すなわち，$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$．問題の基底ベクトルを $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ すれば，標準基底からの変換は変換行列を P として $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]P$ と書ける．ただし，$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$．新しい基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ での表現行列 B は $B = P^{-1}AP$ を計算すればよい．$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ より，$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$．$\square$