2019 年度・線型代数学演習 (S1)：第 1 回・問題

2019.4.8 実施，担当：石本

1-1. ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

と実数 λ，そして次の行列を考える．

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (単位行列)}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (零行列)}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

次を示せ．

(1) $E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

(2) $O\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$(零ベクトル)

(3) $A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2$

(4) $A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A\boldsymbol{v}$

1-2. 行列 A，B，C を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

とする．次を計算せよ．

(1) $A + 2B$ ， (2) AB ， (3) BA ， (4) $A(BC)$ ， (5) $(AB)C$

1-3. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

とする．$\Delta = ad - bc$ は行列 A の**行列式**と呼ばれる．$\Delta \neq 0$ のとき，B を次で定める；

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

このとき，$AB = BA = E$ を示せ (E は単位行列).

注意：この行列 B は A の**逆行列**，といい A^{-1} で表す．

1-4. 行列 A を n 回 (n は自然数) 乗じたもの，$AAA \cdots A$，を A^n と表し，行列のベキと呼ぶ．次の (1)~(3) のそれぞれの行列 A に対して A^n を計算せよ．ただし，$A^0 = E$ で定める．

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (3)\ A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

ただし，a は実数とする．

裏面に続く

1-5. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，A^n を計算しよう.

(1) 行列 P として，

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を用意し，問題 **1-3.** の結果を用いて，P^{-1} を計算し，$B = P^{-1}AP$ を求めよ.

(2) PB^nP^{-1} を計算することにより，A^n を求めよ.

問題は以上である

2019年度・線型代数学演習 (S1)：第2回・問題

2019.4.22 実施，担当：石本

2-1.

次の写像がそれぞれ全射かどうか、また単射かどうか判断せよ．

(1) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ で $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，$x \mapsto e^{-x}$.

(2) $f : S^1 \to S^1$ で $z \in S^1$ に対して，$z \mapsto z^2$．ただし，S^1 は単位円であり，$S^1 = \{z \in \boldsymbol{C}\ ;\ |z| = 1\}$.

(3) $A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ で，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$．ただし，$A = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & b \end{bmatrix}$ で a, b は実数.

2-2.

次の方程式の解をすべて求めよ．ただし，$z \in \boldsymbol{C}$ とする．

$$(1)\ z^2 + 2i = 0 \quad , \quad (2)\ z^4 - 2z^3 + z - 2 = 0 \quad , \quad (3)\ z^3 + 2z - i = 0$$

2-3.

多項式 $P(x)$ を $x - \alpha$，$x - \beta$（$\alpha \neq \beta$）で割った余りをそれぞれ r，s とする．このとき，$P(x)$ を $(x - \alpha)(x - \beta)$ で割った余りを r, s で表わせ.

2-4.

虚数部分が正である複素数全体を $H = \{z \in \boldsymbol{C}\ ;\ \mathrm{Im}z > 0\}$ と表し，上半平面という．H の元 z に $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ を対応させる写像を φ とする．

(1) φ によって H は単位円の内部 $D = \{w \in \boldsymbol{C}\ ;\ |w| < 1\}$ に移ることを示せ.

(2) 実軸と平行な直線で H に含まれるもの，すなわち $\{z = x + ik; x \in \boldsymbol{R}\}$ (k は正の定数) は φ によってどのような図形に移るか.

(3) 同様に，虚軸と平行な直線の一部で H に含まれるもの，すなわち $\{z = k + iy; y > 0\}$ (k は実の定数) は φ によってどのような図形に移るか.

2-5.

実の 2×2 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で行列式が正，すなわち $\Delta_A = ad - bc > 0$ となるものを考える.

(1) 上半平面 H の元 z に対して，$cz + d \neq 0$ を示せ.

(2) H の元 z に対して，$f_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ とおくとき，$f_A(z)$ も H に属することを示せ.

(3) もう一つの実行列 B を考える．同様に B の行列式が正のとき，$f_{AB}(z) = f_A(f_B(z))$ が成り立つことを示せ.

問題は以上である

2019 年度・線型代数学演習 (S1)：第 3 回・問題

2019.5.13 実施，担当：石本

3-1.

$\boldsymbol{R}^3$ 内に 3 点 A(2,2,-1), B(1,-1,2), C(5,1,2) があり，それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で表す．原点を O $(0, 0, 0)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ の値を求めよ．

(2) 直線 OA と OB のなす角を θ $(0° \leq \theta \leq 90°)$ とする．このとき，以下の (ア)~(エ) の θ の大きさの条件から適切なものを選べ．

$$(\text{ア})\ 0° \leq \theta < 30°,\ (\text{イ})\ 30° \leq \theta < 45°,\ (\text{ウ})\ 45° \leq \theta < 60°,\ (\text{エ})\ 60° \leq \theta \leq 90°$$

(3) 外積，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(4) 線分 AB の長さを求めよ．

(5) 直線 AB と yz 平面との交点の座標を求めよ．

(6) 点 B を通り直線 AB に垂直な平面 S を考える．直線 OC と S の交点の座標を求めよ．

3-2.

(1) **スカラー三重積**に関する次の等式を示せ：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

(2) **ベクトル三重積**の公式として知られる次の等式を示せ：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

3-3.

次の行列の積を考える．積は定義されているか？定義されているものについては計算を行え．

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad (4) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3-4.

次の行列 A に対して A^n を求めよ．ただし，$n = 1, 2, \cdots, 3$ は自然数．

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

裏面に続く

3-5.

(1) 正方行列 A に対して，$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$，$C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ を定める．このとき，B が対称行列，C が交代行列であることを示せ．ただし，対称行列と交代行列はそれぞれ $X^T = X$，$X^T = -X$ となる行列 X のことである．

(2) $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して，次が成り立つことを示せ：

$$(AB)^T = B^T A^T$$

3-6.

2 つの正方行列 A，B に対して，記号 $*$ を次のように定める：

$$A * B = AB - BA.$$

(1) このとき, 任意の正方行列 A, B, C に対して,

$$(A * B) * C + (B * C) * A + (C * A) * B = O$$

が成り立つことを示せ.

正方行列 A に対し，A の対角成分の和を行列の跡 (トレース) といい，$\mathrm{Tr}A$ と書く．すなわち $A(i, j)$ 成分を a_{ij} とおくとき，$\mathrm{Tr}A = \sum_i a_{ii}$.

(2) このとき，任意の正方行列 A, B に対して,

$$\mathrm{Tr}(A * B) = 0$$

が成り立つことを示せ.

問題は以上である

2019年度・線型代数学演習 (S2)：第１回・問題

2019.6.17 実施，担当：石本

1-1.

次の連立方程式を掃き出し法を用いて解け．また，拡大係数行列の階数を答えよ．

$$(1)\begin{cases} x-y-2z=1 \\ x-2y-5z=2 \\ 3x-2y+z=-2 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} 2x+2y+4z=-2 \\ -2x-4y=1 \\ y-2z=3 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} a-2b+3d=2 \\ a-2b+c+2d+e=2 \\ 2a-4b+c+5d+2e=5 \end{cases}$$

1-2.

次の行列 A に逆行列は存在するか？存在する場合にはそれを求めよ．ただし，a は実数である．

$$(1)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)\ A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

1-3.

回転行列と呼ばれる行列 $R=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と行列 $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を考える．ただし，θ，x，y は実数とする．

(1) $R^{-1}=R^T$ が成り立つことを直接計算することによって示せ．

(2) X^TX を求めよ．

(3) $X^TX\neq 0$ のとき，$X^TRX=0$ となる θ $(-\pi<\theta\leq\pi)$ の値を求めよ．

(4) (1) の性質を満たす行列は直交行列と呼ばれる．行列式が 1 である 2 行 2 列の直交行列は，回転行列 R となることを示せ．

1-4.

n 次行列 A，B について，次の (1)〜(3) を示せ．ただし，E は n 次単位行列，O は n 次ゼロ行列であり，k を正の自然数とする．

(1) $A^k=E$ となる k があれば A は正則である．

(2) $A^k=O$ となる k があれば，$E-A$ は正則であることを示せ．

(3) $AB-BA=E$ となる A，B が存在しないことを示せ．

1-5.

行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ と $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(2) $\left(P^{-1}AP\right)^n$ を求めよ．ただし，$n=1,2,\cdots$ は自然数．

(3) 上の結果を用いて，A^n を求めよ．

問題は以上である

2019年度・線型代数学演習 (S2)：第2回・問題

2019.7.1 実施，担当：石本

2-1.

次の行列 A の階数を求めよ．ただし，(2) では A は n 次の行列で x は実数である．

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2-2.

線型写像 $F : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ が与えられたとする．任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ となる $n \times m$ 行列 A を線型写像 F の**行列表示**という（数理科学基礎共通資料 p143）．連立一次方程式を例に，ベクトル空間と線型写像の概念を整理してみよう．次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

この連立方程式の係数行列を A とする．

(1) $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ，$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が線型写像であることを示せ．

A が線型写像 f の行列表示であることを確かめよう．基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を用いれば，$\boldsymbol{R}^3$ の任意の点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ と書ける．

(2) $\boldsymbol{u}_1 = f(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{u}_2 = f(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{u}_3 = f(\boldsymbol{e}_3)$ とする．この3つの列ベクトルを横に並べてできる行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}$ が A に一致することを具体的に計算して示せ．

$V = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ は線型写像 f の**像**といい $\mathrm{Im}(f)$ と書く．また，解集合 $W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は線型写像 f の**核**といい $\mathrm{Ker}(f)$ と書く．

(3) $\mathrm{Im}(f)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になっている．A の具体的な成分を用いずにこれを示せ．(部分空間の定義を確認せよ)

(4) 同様に，$\mathrm{Ker}(f)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になっている．A の具体的な成分を用いずにこれを示せ．

A を連立方程式の係数行列として具体的に像と核を考えよう．

(5) $\boldsymbol{u}$ を与えたときに $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在するための条件を求める．$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とおくことで，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ の解 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在するための u_1, u_2, u_3 の間の必要十分条件を求めよ．また，その条件を満たす $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$ の幾何学的な意味を答えよ．

(6) 係数行列 A の階数は $V = \mathrm{Im}(f)$ の次元になっている．V の次元を求めよ．(次元の概念については次の問題で詳しく考える)

(7) 連立方程式を解くことで解集合 W がどのような集合か具体的に求めよ．また，その幾何学的な意味を答えよ．W の不定係数の数が集合 $W = \mathrm{Ker}(f)$ の次元である．W の次元を求めよ．

2-3.

実ベクトル空間 V の元であるベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ を用意する．実数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{a}$ が

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

と表されるとする．このとき，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で書ける，という．ここで $\boldsymbol{a}$ としてゼロベクトルを考えた関係式,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \qquad \cdots(*)$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ の **1 次関係**という．式 $(*)$ を満たす $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ に限られるとき，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ は **1 次独立**という．そうでない場合には **1 次従属**という．例えば，次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立である．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

(1) 行列 A としてこれらの列ベクトルを横に並べてできる $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ と係数を縦に並べたベクトル $\boldsymbol{x} = [c_1, c_2, c_3]^T$ を使えば，式 $(*)$ に対応する 1 次関係は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ で表されることを示せ．

(2) 上の連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を掃き出し法で解くことにより，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であることを示せ．

実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ が V **を生成する**とは，V の全てのベクトルが $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されているときにいう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立で V を生成するとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n\}$ はベクトル空間 V の**基底**であるという．ベクトル空間の基底は 1 つではないが，基底を構成するベクトルの個数は基底にはよらず，一定である．この基底を構成するベクトルの個数をベクトル空間 V の**次元**といい，$\mathrm{dim}V$ と書く．

(3) 上の例で挙げたベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底になっている．これらのベクトルが 1 次独立であることは (2) で示した．基底であることを言うには $\boldsymbol{R}^3$ が $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で生成されることを言えば良い．すなわち任意の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$，一次結合の実係数を $\boldsymbol{x} = [c_1, c_2, c_3]^T$ として，連立方程式

$$\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_n \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

の形で表されれば良い．この連立方程式を解くことで，実際に c_1, c_2, c_3 を p_1, p_2, p_3 で表わしベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{R}^3$ の基底になっていることを示せ．

一方，次の 4 つのベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立ではない．

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

(4) (1)-(2) と同様にして，1 次関係の式 $(*)$ を連立方程式の形に表し，それを解くことにより，1 次独立でないことを示せ．

(5) (4) の結果を用いて，$\boldsymbol{b}_4$ を $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ の 1 次結合で表わせ．

問題は以上である

2019 年度・線型代数学演習 (S2)：第 3 回・問題

2019.7.15 実施，担当：石本

3-1.

次の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルは 1 次独立か調べよ．1 次独立でない場合には，1 次独立なベクトルの最大個数を求めよ．

$$(1)\ \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2)\ \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3-2.

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ がベクトル空間 V の基底であるとき，次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は V の基底となるか調べよう．

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3.$$

(1) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]A$ となる行列 A を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次関係を $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ と書くことにする.$\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, c_3]^T$ と A を用いると,$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次関係が $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と書き表されることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が 1 次独立であることを用いて，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次関係が $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ に帰着されることを示せ.

(4) A の階数を調べることで，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が V の基底であることを示せ.

3-3.

ベクトル空間 U から V への線型写像 $F : U \to V$ を考える．U の基底と V の基底をそれぞれ，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ と取る．$F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)$ は V のベクトルなので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次結合で書ける．これを行列を用いて，

$$[F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]\, A \qquad \cdots (*)$$

と表したとき，$m \times n$ 行列 A を U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$，$V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ に関する F の**行列表現**という．演習 2.2 では基本単位ベクトルからなる標準基底を用いた表現について議論したが，今回は一般の基底に対する表現を考えてみよう．

(1) $U = \boldsymbol{R}^3$，$V = \boldsymbol{R}^2$ として，まず標準基底を考える．

すなわち，U の基底として $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，$V$ の基底として $\left\{ \boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ を取る．線型写像 $F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \qquad \cdots (**)$$

で定めるとき，この標準基底での表現行列 A が，$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ となることを上の定義に基づいて確認せよ.

問題 **3-2.** では基底の変換を考えた．一般に U の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$ から，$\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots \boldsymbol{u}'_n\}$ に変換した場合，正則行列 P を用いて，$[\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots \boldsymbol{u}'_n] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_n]\, P$ と表される．この行列 P を**変換行列**という．同様に，V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ から，$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots \boldsymbol{v}'_m\}$ に変換する変換行列を Q とすれば，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots \boldsymbol{v}'_m] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_m]\, Q$ となる．ここで，Q は正則行列である．

(2) 再び，$U = \boldsymbol{R}^3$，$V = \boldsymbol{R}^2$ として，U の基底を標準基底から $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ へ，V の基底

を標準基底から $\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ へ変換する．変換行列 P と Q を求めよ．

さて，再び一般論に戻って基底の取り替えによって表現行列がどのように変換されるか調べてみよう．新しい基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots \boldsymbol{u}'_n\}$ と $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots \boldsymbol{v}'_m\}$ における F の表現行列を B とすれば，

$$[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_m]\, B$$

となる．

(3) $[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)]\, P$ を示せ．

(4) $[F(\boldsymbol{u}'_1), F(\boldsymbol{u}'_2), \cdots, F(\boldsymbol{u}'_n)] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m]\, QB$ を示せ．

(5) $B = Q^{-1}AP$ を示せ．

(6) 線型写像 $(**)$ に対して，(2) の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ での表現行列 B を求めよ．

(7) ベクトル空間 U から自分自身への線型写像を**線型変換**という．線型変換 $F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ が $F(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で与えられるとき，$\boldsymbol{R}^3$ の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ を取ったときの，この基底に対する F の表現行列を求めよ．

問題は以上である

時間の余った人は，授業に関することを含めて（なんでも）感想やコメントを書いてください。