講義ノート「微分積分学」

石本健太
京都大学数理解析研究所

2020 年 3 月 29 日

目 次

はじめに

この講義ノートは 2016 年度京都大学農学部 1 回生向けの全学共通科目「微分積分学（講義・演義）A・B」の際に使用したものです．自身の記録用に一つのファイルとして公開することにしました．文章の校正も行っていません．それゆえ，本文は大量の誤字脱字だけでなく，深刻な誤りを含む可能性も大いにあると思います．また，本文の利用によりいかなる不利益が生じても私は責任を負えません．使用する際には，充分注意してください．

講義を受講するにあたって

大学は自ら学問を追究する場です．講義には**自主的**に参加してください．これは,「講義に出席せよ」という意味ではありません．出席する場合にはそれなりのやる気を持ってくることを期待しています．講義は教員と学生がともに作り上げていくものだと理解してください．ですから，講義中の質問や要望は歓迎します．一方で，他の学生の迷惑になることは慎んでください．例えば，大声での私語，携帯電話による通話，ニオイのする食べ物の持ち込み，などです．

なぜ微分積分学を学ぶのか

大学は自分の専門科目を学ぶところだと考えている方にとっては，自分の専門と関係のない（と思っている）数学の勉強は概して興味が湧かないかもしれません．大学の理系教養科目としての微分積分学（教養課程の数学一般に言えるが）は皆さん自身の**可能性を広げる**大切な内容です．

1．あらゆる科学の言葉

まず，数学は普遍的な言語として，あらゆる科学の礎を担っています．特に，物理学や統計学が顕著ですが，物事を定量的に表現したい場合には，数学は言語として非常に便利です．皆さんがこれから学んでいく専門分野だけでなく，卒業後の世界で常に新たに学びが必要になります．その際に，例えば，経済指標や材料・環境・データ科学などの文献（wikipedia でもいいです）を目の前にするでしょう．古くから存在する基礎的で重要な理論は微分積分学の言語で書かれているものが特にたくさんあります．このように新たに何かを学ぶ際に，数学の言葉が障壁になっていては，皆さんの可能性の芽が摘み取られてしまいかねません．大学教養課程で数学を学ぶ意義がこの土台作りにあるのだと考えています．

2．生命科学における数学

この講義の受講生の多くが生物学・生命科学に強い関心を抱いている学生だと思います．では，生物学を学ぶ際には，必要ないのでしょうか．学問の境界は近年ますます曖昧になって，多くの分野の知識の融合が盛んに行われています．特に，コンピュータの発達によって多くのデータを取得・解析・予測できるようになりました．生命・環境科学も例外ではなく，むしろ現在最も数学が積極的に用いられている分野といっても良いでしょう．微分積分学は元来，ものごとの変化を捉えるために生み出された数学の分野ですから，将来の予測や得られたデータの解析に最も親和性の高い道具です．みなさんの立ち向かう未来で，きっと頼りになる武器となるはずです．

講義の進め方と目標

講義は後述の教科書 [1] に従って進める予定です．皆さんはすでに高校数学で微分積分を学んでいますし，そのレベルは高く，大学教養数学と重なる部分も多々あります．講義では，できる限り大学で新しく学ぶ内容に時間を割きたいと思います．微分積分学には大きく，微分や積分，極限や連続といった概念を理解するという**理論**の部分と，実際に微分や積分の**計算**の実行という二つの側面があります，数学を応用するという立場に立てば，計算のほうが重要な気がしますが，受験勉強以外では特殊な計算テクニックはそこまで必要ではありません．高度に情報処理の発達した現在やこれからの社会では計算の多くの部分でコンピュータに任せることになるでしょう．例えば，Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com)，SAGE（http://www.sagemath.org）などのウェブページは積極的に自主勉強の際に役立てください．しかしながら，自らが直面する個々の問題をコンピュータに解かせるためには，ある程度の計算能力も必要です．理論部分と計算部分をバランス良く講義では取り上げたいと思いますし，皆さんにもその意識を持ってもらいたいと思います．

前期の微分積分学は，後期の多変数の微分積分（線形代数の知識も必要）への基礎固めとしての役割が大きいと思います．その中で．前期は**「無限と極限」**から始めます．この章では現代数学の言葉を（例えば，wikipedia 読んでも理解できるように）学びます．**イプシロン・デルタ論法**と呼ばれる関数の連続性の定義の理解が目標です．**「微分」**の章では，複雑な関数を解析するための数学的な道具としての**テイラー展開**を自由に使いこなせるようになることが目標です．最後の**「積分」**の章では，高校数学では扱わなかった，**広義積分**を理解し，計算できるようになることを目標とします．

教科書と参考書

教科書は [1] です．基本的にはこの本に沿って講義を進めるので，各自手に入れてください．参考書（独断と偏見によるオススメ）が [2-4] です．[2] は講義や教科書の内容では物足りなかったり，納得できない人向けのもう少し進んだ内容の教科書です．[3] は一般向けの数学本ですが，初版から 80 年たった現代でも生きる教養にあふれた古典です．[4] は生命科学のあらゆるトピックを数学者の視点から解説している一般書です，数学の新たな一面に触れることができるでしょう．

[1]「入門微分積分学」三宅敏恒，培風館
[2]「微分積分学」斎藤正彦，東京図書
[3]「百万人の数学（上・下）」ランスロット・ホグベン，日本評論社
[4]「数学で生命の謎を解く」イアン・スチュアート，SB クリエイティブ

第0章　準備

0.1　数と集合

高校数学でも学んだが，**集合** (set) をあえて定義すると，「ある条件や性質で規定されるものの集まり」と表現できる.「集合を作っている個々のもの」を**元** (element) という．要素とも呼ぶが，大学以降では元と呼ぶことが多い.

例えば，集合 A を正の偶数からなる集合とすると，$A = \{$ 正の偶数 $\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ と表記する.

数の集合と記号

自然数全体の集合：	$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$
整数全体の集合：	$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$
有理数全体の集合：	$\boldsymbol{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}\}$
実数全体の集合：	$\boldsymbol{R} = \{$ 有理数と無理数全体 $\}$
複素数全体の集合：	$\boldsymbol{C} = \{a + bi \mid a, b \in \boldsymbol{R}\}$

- $\boldsymbol{N}$ にゼロを含む場合もある.
- 実数の定義だけ，なんだかはっきりしていないように「感じる」ことに注意．あとで詳しくやる.
- $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位．複素数平面は $\boldsymbol{C} \simeq \boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \boldsymbol{R}\}$ と同一視.
- 我々の暮らしている空間は 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$.
- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

2 つの集合 X, Y の**包含関係**，$X \subset Y$ を「X は Y の部分集合」という．これを数学的に記述すると，

任意の X の元 x が, Y の元になっている

と表現でき，数学記号で書くと，

$$\forall x \in X,\ x \in Y$$

となる．これを英語で読むと，

for all x in X, x belongs to Y

といった感じになる.

先の包含関係を表す命題の**否定**は $X \not\subset Y$ だが，これは,

ある X の元 x が, Y の元になっていない

あるいは,

$$\exists x \in X,\ x \notin Y$$

と書ける．英語で読むと，

$$\text{there exists } x \text{ in } X \text{ such that } x \text{ does not belong to } Y$$

といったところだろうか．

論理的な表記は，大学数学の根幹を為すものである．また，真理を積み上げていく為の大事な足場になる．例えば，次の問題を考えてみよう．

問題 1

x を実数とする．「任意の正の数 ϵ に対して，$|x| < \epsilon$」ならば「$x = 0$」となることを示せ．

解答

背理法で示す．すなわち，x が 0 でない値 c であると仮定する．すると，$|c| > |c|/2$ であるから，$\epsilon = |c|/2$ とすると，$|x| < \epsilon$ とならない．このような正の数 ϵ が存在してしまうことになり，条件に矛盾する．□

このように，等式を「無限個の不等式」で表現することができる．微分積分学に登場する微小な値や無限回の和といった「極限的な操作」を数学的に表現するために，欠かせない道具である．

0.2 関数

２つの集合 X, Y の元の間の対応を**写像**という．これは関数の一般化（別の呼び方？）になっており，X の元から Y の元への対応を「X から Y への写像」という．記号で書くと，

$$f : X \to Y$$

である．$x \in X$，$y \in Y$ とすれば，これは，

$$y = f(x)$$

に他ならない．X や Y が $\boldsymbol{R}$ やその部分集合の場合が，われわれが馴染みのある「関数」である．

X は関数の「入力」が可能な x の範囲で**定義域**といい，Y の部分集合で，定義域からのすべて入力から得られる「出力」の範囲を**値域**（あるいは f による**像**）という．定義域 (domain) を

$$D = \left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

と，例えば，関数 $f : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$,

$$f(x) = \sin x$$

とすると，値域 (range) は

$$R = \{x \mid -1 < x \leq 1\}$$

となる．

注意

古い教科書では，終集合 Y のことを値域ということもある．現代では像のことを値域と呼ぶことが多いが，紛らわしいため，本講義では値域という言葉を用いないようにする．

ここにある D や R といったひとつながりの $\boldsymbol{R}$ の部分集合を**区間**と呼ぶ．大学の教科書では，次にまとめたような表記法を用いることがしばしばある．

区間の表記法

a と b を実数として，

$$\begin{aligned}\text{開区間}:&\ a < x < b \text{ を } (a,b)\\ \text{閉区間}:&\ a \leq x \leq b \text{ を } [a,b]\\ \text{左半開区間}:&\ a < x \leq b \text{ を } (a,b]\\ \text{右半開区間}:&\ a \leq x < b \text{ を } [a,b)\end{aligned}$$

と書く．開区間側では，便宜的に a を $-\infty$，b を ∞ としてもよい．例えば，$x \geq 0$ は $[0,\infty)$ となるし，$\boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$ と書ける．

大学数学では，関数も写像のある特別な場合としてまとめて取り扱うことがある．一方，線形代数学であらわれる行列も写像の文脈から理解することが可能である．ここでは，これ以上深入りすることはしないが，集合や写像といった抽象的な対象を取り扱うことで現代数学が発展してきたという事実は，心に留めておいてもよいだろう．

第1章　極限と連続関数

1.1　数列と極限

問題 2

a_n $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ を数列とする．次の数列は何を表しているか．

(1) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13$, $\cdots$

(2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$, $a_6 = 4$, $a_7 = 2$, $\cdots$

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$,$\cdots$

(4) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$, $\cdots$

解答

(1) a_n は n 番目の素数を表す数列．

(2) a_n は自然数 n の約数の個数を表す数列．

(3) a_n はフィボナッチ数列．$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ の漸化式で表される．フォボナッチは 13 世紀に活躍したイタリアの数学者．名前はレオナルド・ダ・ピサ（ピサのレオナルド）といい，フィボナッチはあだ名のようなもの．フィボナッチは著書「算盤の書」の中で，ウサギの個体数の変化に関する問題に触れており，これが有名なフィボナッチ数列の名前の由来である．$b_n = a_{n+1}/a_n$ としたとき，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ になることはあまりにも有名．

(4) a_n は $\sqrt{2}$ を小数で表現したときの各桁の数字を並べたもの．$1 : \sqrt{2}$ を白銀比と呼び，黄金比と並んで「美しい」形を表すと言われている．事実，目の前にあるノートもこの比をもつ長方形になっているはず．□

際限なく大きくなることがない数列を**上に有界**な数列という．数学的に表現すれば，

$$\text{任意の } n \text{ に対して，} M \in \boldsymbol{R} \text{ が存在して，} a_n \leq M,$$

逆に，際限なく小さくならない数列を**下に有界**といい，

$$\text{任意の } n \text{ に対して，} M \in \boldsymbol{R} \text{ が存在して，} a_n \geq M.$$

と書ける．上にも下にも有界な数列を一般に**有界数列**という．

数列がどんどん大きく（小さく）なる場合に，その数列は**単調増加数列**（**単調減少数列**）という．すなわち，

$$\text{任意の } n \text{ に対して，} a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$$

が成り立つことをいう．いずれかが成り立つ場合にまとめて**単調数列**という．

問題 3

問題 2 の (1)∼(4) の数列のうち有界な数列，単調な数列はそれぞれどれか．

解答

単調な数列は (1) と (3) であることは明らか．有界性は，少し注意が必要かもしれない．まず，素数が無限に存在することから (1) は有界でない．(2) は一見有界に見えるかもしれないが，これも有界でない．証明は背理法を用いる．もし，上に有界だと仮定すると，

ある自然数 M が存在して，どの自然数の約数もその個数が M 以下となる．$\cdots(*)$

ここで、素数を小さい方から $M+1$ 個順に並べてかけてできた数を考える．(1) で述べたように素数は無限に存在するのでこのようにこのような数を作ることが実際可能で，この数は約数を $M+1$ 個もつから $(*)$ に矛盾する．よって，(2) の数列も非有界．(3) は漸化式からすぐに有界でないことがわかる．(4) は一桁の数しか取り得ないので，$0 \leq a_n \leq 9$．ゆえに上にも下にも有界．（$\sqrt{2}$ は無理数なので，$a_n = 0$ となることはない．以下で詳しく見る．）□

さて，問題 2(4) を真似て，任意の実数 x を小数表示することを考えよう．その整数部分を p，小数部分の小数第 n 位を q_n とする．すると，

$$x = p.q_1q_2q_3q_4\cdots$$

のように書ける．すなわち，

$$x = p + q_1\left(\frac{1}{10}\right)^1 + q_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + q_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

このように，小数で数を記述すると，全ての実数を記述できる（と高校数学では思っていた）．そこで，この実数が途切れなく存在しているという性質を（**実数の連続性**）数学的に表した，次の公理（理論の出発点として，証明なしで認める命題）を理解しよう．

実数の連続性

単調で有界な数列 a_n は収束する．

循環小数は有理数で，またその逆も成り立つので，無理数は「循環しない」小数ということになる．例えば，問題 2(4) の $\sqrt{2}$ の場合，数列 x_n を $p = 1, q_1 = 4, q_2 = 1.q_3 = 2, \cdots$ として，

$$x_n = p + q_1\left(\frac{1}{10}\right)^1 + q_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + q_n\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

と表してみよう．n が有限の場合，この数列はいつまでたっても有理数のままである．無理数を作るためには，この数列が収束する必要がある．これを保証するのが「実数の連続性」である．実際，この数列は単調で有界なので収束し，$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \sqrt{2}$ という無理数の存在の無事が示される．

1.2 $\epsilon - N$ 論法

さて，大学の微積分において，非常に有名な（悪名高い？）次の問題を考えよう．

問題 4

$0.999\cdots = 1$ を示せ.

解答

左辺は，$p=0, q_1=q_2=\cdots=q_n=9$ とした数列 x_n，

$$x_n = 9\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + 9\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

の極値 $\lim_{n\to\infty} x_n$ のことを表している．x_n は単調で有界な数列であるから，この極値は確かに存在する．等比級数の和の公式を使えば，この数列の極限が

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

と求まる．□

問題 4 は $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ を表しているが，このような単調な数列の場合に，極限を問題 1 のように,「無限個の不等式」で表してみよう．すると，

$$\text{任意の正の数}\epsilon\text{に対して，}|x_n - 1| = \left(\frac{1}{10}\right)^n < \epsilon$$

と書ける．これは数列の極限の完全な言い換えに見えるかもしれないが，実はこのままでは不十分である．正しくは，次のように**定義**される：

数列の極限（$\epsilon - N$ 論法）

数列 a_n が a に収束するとは，
任意の正の数 ϵ に対して，次の条件 $(*)$ を満たすある自然数 N が存在すること：

$$\text{任意の } n > N \text{ について，} |a_n - a| < \epsilon \quad \cdots (*)$$

これを，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書く．

ここで,「ある自然数 N より大きな n」という制限は，数列の収束先に数列のはじめの方は「影響しない」という直感を反映している．この定義は高校数学で感覚的に「十分 n が大きくなれば a_n は n に近づく（収束する）」と表現していたものを，厳密性をもつ論理的な表現に改めたものである．すなわち,「十分を大きい」を「ある自然数 N より大きな n」,「a_n は n に近づく」を「$|a_n - a| < \epsilon$」と具体的な数字をもって，大きさや距離を明示している．

これを，先の少数展開 x_n に当てはめると，次のように表現できる．まず，適当な ϵ を（例えば $\epsilon = 10^{-5}$）を選ぶ．これは，少数展開による誤差を ϵ 以下に抑えるためには，少数展開を小数第何位(これが N まで) 展開すれば良いか、ということを問題視にしている．$\epsilon = 10^{-5}$ のときは $N=5$ ととれば $n > N$ で $|x_n - 1| < \epsilon$ とできる．このようにどんな誤差以下にも小数展開ができる，ということが数列が収束することの本質である．

さて，この定義をアルゴリズム的に書くと，次の 1.~3. にまとめられる．

1. まず正の数 ϵ をひとつ決める．
2. それより大きな n では $|a_n - a| < \epsilon$ となる N（一般に ϵ の関数）を見つける．
3. 1.~2. が ϵ が正の数である限り成り立つか確認する．

これを数学的な言葉で表すと，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \boldsymbol{N} \ \ \text{s.t.}「\ \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon\ 」$$

となる.「s.t.」は such that の略.

大学の数学ではこれらの不等式による記述をを極限の定義とし，微分積分学の理論を構築していくが，この講義ではこの定義に基づいた厳密的な論証や証明にはあまり深入りはしない．しかし，現代数学が，できるかぎり日常語の曖昧さを排除し，厳密性のある論理的な言葉で対象を記述することで発展してきた事実は理解すべきである．この論理性を重要視する風潮は物理学や統計学だけでなく，昨今では生物・生命科学，社会科学などにも広まりつつある．これは，コンピュータの発達と切っても切り離せない関係にある．というのも，コンピュータが理解できるアルゴリズムは数学的で論理的な「言葉」によって書かれているからである．デジタルネイティブ世代が担っていくこれからの世の中は，数学的な言葉が英語以上に世界共通語になるといっても過言ではない．すべての理系大学生に21 世紀の**教養**としてこの $\epsilon(-N)$ 論法を理解してほしい.

では，この定義によってどのようなこと示すことができるか，以下に例を挙げよう.

問題 5

次の極限を表す式を $\epsilon - N$ 論法示せ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

解答

$a_n = \frac{1}{n}$ とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$|a_n| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$ となるような n が存在するかを考える．ここで，

$$N = \frac{2}{\epsilon}$$

とすれば，$n > N$ に対して，$|a_n| < |a_N| = \epsilon/2 < \epsilon$ となり，数列の極限の定義を満たす．□

次に命題は，**はさみうちの原理**（定理）として知られている．高校数学ては証明無しに認めていたが，$\epsilon - N$ 論法を用いて証明することができる.

はさみうちの原理（定理）

数列 a_n，b_n があり，$n > N$ であれば，$|a_n| < |b_n|$ であるとする．$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

証明

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を $\epsilon - N$ 論法で書けば，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_b \in \boldsymbol{N} \ \ \text{s.t.}「\forall n > N_b, |b_n| < \epsilon」.$$

今，$N_a = \max\{N, N_b\}$ とすれば，

$$n > N_a \text{を満たす } n \text{ に対して}, |a_n| < |b_n| < \epsilon.$$

つまり，

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall n > N_a \ \ \text{s.t.}\ \ |a_n| < \epsilon$$

が成り立つことがわかった．これはすなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．□

1.3 連続関数

高校数学まででも様々な関数を考えええてきたが，その際，関数の大局的な性質として最も重要な要素のひとつは，関数の**最小値**と**最大値**であろう．関数においては，値域（像）の最大値と最小値のことである．集合の言葉を使って表現すると，$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A の最大値 $m = \max(A)$ とは，

$$m \text{ 以外の任意の } a \in A \text{ に対して，} a < m$$

が成り立つ値のことである．関数の場合には，定義域を A とする関数 f のときは $\max(f(A))$ が対応する．最小値 $\min(f(A))$ は，不等号の向きが逆になったものである．

さて，関数として，

$$f(x) = x^2 \quad (-1 \leq x < 2)$$

を考え，この関数の最大値と最小値を考えてみよう．もちろん最小値は 0 で，最大値は存在しない．しかし，最大値「のような」値がある．それは，4 である．定められた定義域の範囲では，とりえない $x = 2$ のときの f の値である．この最大値の「ような」値は，有界な関数であればいつだって存在する（実数の連続性の帰結）．まず，**関数が有界**であるとは関数の値が，際限なく大きくなったり，小さくなったりしないことである．正しく表現すれば，関数 f(x) が集合 A で定められているとき，

$$\forall x \in A \text{ に対して，} |f(x)| < M \text{ となる実数 } M \text{ が存在すること}$$

である．$f(x) < M$ が成り立つ場合に，**上に有界**，$f(x) > M$ が成り立つ場合に，**下に有界**という．

先の最大値の「ような」数を関数の**上限**という．関数 $f(x)$ が集合 A で定められているとき，

$$\sup(f(A)) = \min\{\ m \mid \forall a \in A,\ f(a) \leq m\}$$

で定める．最大値が存在する場合は，上限と最大値は一致する．一方，最小値「のような」数を**下限**といい，同様に，

$$\inf(f(A)) = \max\{\ m \mid \forall a \in A,\ f(a) \geq m\}$$

で定める．

注意 1 ：もちろん，最小値が存在する場合は，下限と最小値は一致する．

注意 2 ：また，有界でない場合にも $\sup = \infty$，$\inf = -\infty$ と表記すれば，いつでも書き下すことができる．

今回の 2 次関数の例では，$\sup[0,4) = 4$．$\inf[0,4) = \min[0,4) = 0$ となる．他にも，$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ とすれば，$\max A$ は存在しないが，$\sup A = 1$．$\min A = \inf A = 0$．これらの場合，直感的には理解しやすいと思うが，それを数学的に表現しようとすると，少しまどろっこしい．直感的に理解しづらくなったときには，いつだって厳密な表現に立ち返ればよい．そういう意味でも論理的（あるいは数学的な）な表現が最後の拠り所となる．

さて，**関数の極限**は高校数学でも学んだ，例えば，関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されていれば，グラフを左右から近づけていくことで，

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

として，極限が定義できる，と学んだ．左から近づけたときには**左極限**，右から近づけたときは**右極限**といって，

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = l$$

と表した．左右の極限が一致するときに，極限が定義できたのだ．今まで，授業では散々数学的な表記にこだわってきたにもかかわらず，この定義はなんだか「いい加減」だと感じて欲しい．これをきっ

ちりと表現した数学的な定義がいわゆる**イプシロン・デルタ論法**と呼ばれるものである．厳密な証明やきわどい議論の場合には．必要不可欠になる．次の章で定義は述べるが，その先の講義ではあまり深入りしないことにする．

この極限をつかって，高校数学で関数の連続性を学んだ．すなわち，$f(x)$ が a で**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことで，ある区間 I のすべての点で連続な場合に，区間 I において**連続関数**といったのだ．多項式や三角関数，指数・対数関数などはすべて連続関数で，これらの組み合わせで作られる多くの関数が連続関数であることもすでに学んだはずである．

連続関数の性質

(1) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が点 a で連続のとき，

$$f(x) \pm g(x),\quad cf(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (\text{ただし}, g(a) \neq 0)$$

はすべて $x = a$ で連続.

(2) 関数 $f(x)$ 点 a で連続，関数 $g(y)$ が $y = f(a)$ 連続のとき，その合成関数 $g(f(x))$ も点 $x = a$ で連続.

極限計算は高校数学でもたくさん目にしたと思うが，次の問題はどうであろうか.

問題 6

次の関数 f が (∞, ∞) で連続になるように a を定めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0) \\ a\ (x = 0) \end{cases}$$

解答

$x = 0$ でなければ，連続関数の積だから，$x\sin(1/x)$ も連続である．$x \to 0$ での極限が知りたいが，グラフは $x = 0$ の近くで激しく振動する．しかし，$|\sin(1/x)| \leq 1$ であることに注意すれば，

$$\left| x\sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| \to 0\ (x \to 0)$$

なので，はさみうちの原理から $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$．$f(0) = a = 0$ とすれば，連続関数になる．□

1.4 $\epsilon - \delta$ 論法

関数の極限も数列の極限と同様，大学数学での厳密な定義が存在する．まず，数列の極限の定義（$\epsilon - N$ 論法）の類似で無限大での関数の極限の定義を見てみよう.

関数の極限

関数 $f(x)$ が $x \to \infty$ で $f(x) = l$ に収束するとは,
任意の正の数 ϵ に対して，次の条件 (*) を満たす $M \in \boldsymbol{R}$ が存在すること：

$$x > M \text{ ならば}, |f(x) - l| < \epsilon \quad \cdots (*)$$

これを，$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ と書く．$x \to -\infty$ の場合は,「$x < M$ ならば，$\cdots$」となる．

これは，数列の極限での $N \in \boldsymbol{N}$ を $M \in \boldsymbol{R}$ に変えただけなので，わかりやすいであろう．

次に，無限大ではなく，有限の実数 a での極限 $\lim_{x\to a}$ はどのように．書けるであろうか．これが，大学数学の難所とも呼ばれている**イプシロン－デルタ論法**である．しかし，これまでの表記法に慣れていれば，特段難しさを感じるものではない．

関数の極限（$\epsilon - \delta$ 論法）

関数 $f(x)$ が $x = a$ で $f(x) = l$ に収束するとは,
任意の正の数 ϵ に対して，次の条件 (*) を満たす $\delta > 0$ が存在すること：

$$|x - a| < \delta \text{ならば}, |f(x) - l| < \epsilon \quad \cdots (*)$$

である．これを，$\lim_{x\to a} f(x) = l$ と書く．

$\epsilon - N$ 論法の「十分大きな N を用意すれば」の部分が「a からの十分近い距離 δ を用意すれば」に変わったと考えればよい．それゆえ，δ は一般には ϵ の関数になっている．次の例を考えてみよう．

問題 7

次の極限を表す式を $\epsilon - \delta$ 論法を使って示せ．

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

解答

まず，正の数 ϵ を任意にひとつとり，$f(x) = x^2$ として $|f(1) - 1| < \epsilon$ となるような，y の領域を考える．$x = 1$ の近くで，その領域に値を持つように x の範囲を決める．δ を正の数として，$|x - 1| < \delta$ のとき,

$$|f(x) - 1| < \max\{|f(1+\delta) - 1|, |f(1-\delta) - 1|\} = \max\left\{|2\delta + \delta^2|, |-2\delta + \delta^2|\right\} = 2\delta + \delta^2.$$

となるので，$2\delta + \delta^2 < \epsilon$ を満たしていれば，$\epsilon - \delta$ 論法の定義を満たす δ の存在を示したことになる．実際，$0 < \delta < -1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}$ であればよいので，このような δ は ϵ の大きさによらず（つまり任意の ϵ に対して）存在する，□

これをこの定義の l として $f(a)$ をとれば，これが $f(x)$ が a で連続であることの定義になる．この厳密な表現は例えば，次のような論証で威力を発揮する．

問題 8

次の極限が存在するならその値を求めよ．存在しない場合にはその理由を述べよ．

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

解答

問題 6 でも見たように，この関数は $x=0$ 付近で激しく振動する．前の問題問 6 と違い 0 に収束するような関数がかかっていないので，振動の振幅は $x=0$ に近づいても小さくならず，収束しないように見える．そこで背理法を使って，このことを示してみよう．まず，極限値が存在すると仮定し，極限値を a とする．すると，任意の $\epsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，

$$|x|<\delta \text{に対して}, |f(x)-a|<\epsilon \quad \cdots (*)$$

を満たすことを意味している．しかし，$f(x)$ はこの x の範囲でも $-1 \leq f(x) \leq 1$ で変化するので，$|f(x)-a| \geq 1$ となりうる．これは $\epsilon<1$ の ϵ では $(*)$ が成り立たないことになり．矛盾を生じる．□

1.5 中間値の定理と逆関数

また，連続関数の大切な性質として，次の中間値の定理を復習しておこう．

中間値の定理

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ において連続で，$f(a)<f(b)$ ならば，$f(a)<k<f(b)$ を満たす任意の k に対して，$f(c)=k$ となる $c \in (a,b)$ が存在する．

連続関数が直感的にはグラフが途切れない，ということを表すことを考えれば成り立って当然と考えるであろうが，論理的な言葉を使って，厳密に証明をする場合には，実数の連続性の公理が必要となる．定理の証明はいささかテクニカルなので，ここでは述べないことにする．

上の中間値の定理で関数がその区間で単調であれば，k を定めると，c はひとつに定まる．数学的には，区間 I で関数が**単調増加**であるとは．

$$\text{任意の } x,y \in I \text{ に対して}, x<y \text{ ならば } f(x)<f(y)$$

となることである．**単調減少**の場合は最後の不等号が逆になる．

いずれにせよ，単調関数の場合には，k と c が 1 対 1 に対応する．このとき，$x=g(y)$ を満たす関数（**逆関数**）g が存在し，これを f^{-1} と書き，$y=f^{-1}(x)$ のように表す．

ベキ関数 x^2 の逆関数は累乗根 $\sqrt{x}$ であるし，指数関数の逆関数は対数関数である．いずれも単調な区間で定義されていることに注意すること．また，高校数学では学ばなかったが，三角関数も単調な区間を選べば，そこで逆関数が定義できる．

逆三角関数

$\sin x(-\pi/2 \leq x \leq pi/2)$，$\cos x(0 \leq x \leq \pi)$，$\tan x(-\pi/2<x<\pi/2)$ の逆関数をそれぞれ

$$\sin^{-1} x\ , \quad \cos^{-1} x\ , \quad \tan^{-1} x$$

とかいて，アークサイン，アークコサイン，アークタンジェントと読む．$\sin^{-1}$ の代わりに，arcsin，Sin^{-1} と書くこともある．サインやコサインのマイナス 1 乗ではないので注意．そのため，

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}\ , \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}\ , \quad \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

という表記も用いられる．それぞれ，コセカント，セカント，コタンジェントと読む．

第2章　1変数の微分

1変数関数の微分法に関しては，すでに高校数学でその多くを学んでいる．例えば，微分の定義・微分可能性・多くの具体的な関数の計算手法，そして微分法の応用として接線や関数の最大最小・関数の概形などがそうである．そのため，講義では高校数学で履修済みの事柄に関しては軽く復習する程度にして，ロピタルの定理，テーラー展開や漸近解析などを当面の目標として講義を進める．

2.1　微分の定義と計算法

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは，次の極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することで，これを $f(x)$ の a の微分係数といい，$f'(a)$ と表記する．$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるが，その逆は成り立たない．また，$f'(a)$ は $x = a$ での関数 $f(x)$ の接線の傾きを表している．

また，関数 $y = f(x)$ の導関数（単に微分ということも多いが）とは，$f'(x)$ のことを指し，x に関する微分であることを明示したいときなどは，$\frac{dy}{dx}$ や $\frac{df}{dx}$，あるいは，$\frac{df}{dx}(x)$ や $\frac{df(x)}{dx}$ などと書く．特に後ろの2つは微妙に意味合いが異なることに注意したい．$\frac{df}{dx}(x)$ は導関数 $\frac{df}{dx}$ が x の関数であることを意味しており，$\frac{df(x)}{dx}$ は関数 f の x に関する導関数を意味する．この違いは1変数ではあまり大きな違いにはならないが，多変数になればより明確になる．

微分計算の公式

a を定数として，関数 $f(x)$，$g(x)$ が微分可能のとき，次の関数は微分可能で，以下の公式が成り立つ：

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)\ , \quad (a \cdot f(x))' = af'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\ , \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{-f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2}.$$

また，合成関数 $f(g(x))$ や逆関数 $y = f^{-1}(x)$ も微分可能であれば，次のように計算できる．

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\ , \quad \left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

以上，高校数学の復習である．個々の関数に関しては，高校で履修した公式を思い出して欲しい．それでは，先の章の最後で導入した逆三角関数の導関数の公式を導いてみよう．

問題 9

逆三角関数 $\sin^{-1} x\ (-1 < x < 1)$，$\cos^{-1} x\ (-1 < x < 1)$，$\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

解答

まず，$y=\sin^{-1}x$ について，$x=\sin y$ であるから，

$$(\sin^{-1}x)'=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=\frac{1}{\cos y}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで，y の範囲が $-\pi/2\ <y<\pi/2$ のとき，符号は $+$ が正しい．
一方，$y=\cos^{-1}x$ の場合は，同様に

$$(\cos^{-1}x)'=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=-\frac{1}{\sin y}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで，y の範囲が $0<y<\pi$ であるから，符号は $-$ が正しい．
最後に，$y=\tan^{-1}x$ の場合は，

$$(\tan^{-1}x)'=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$$

と求まる．導関数は $x\in(-\infty,\infty)$ で定まっている．□

当然ながら，高校数学でも学んだが，微分は関数の接線を与える．

接線の方程式

関数 $f(x)$ が点 $x=a$ をで微分可能な時，点 $P(a,f(a))$ での $f(x)$ の接線 l の方程式は，

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

このように 1 階の微分係数を用いることで，関数を局所的に直線で近似することができる．2 階の微分係数まで用いると，2 次関数で近似できる．このように，一般に高階の微分係数を使うことで，関数を多項式で近似する方法がテイラー展開であり，この章の最終目標である．

2.2 平均値の定理とその応用

微分法の応用として，最も大事な応用は最大・最小値や極値を求めることであった．次の性質を思い出しておこう．

微分と極値

関数 $f(x)$ が点 c を含む閉区間 I で定義され，$x=c$ で微分可能であるとき，
(1) $f(x)$ が $x=c$ で最大値または最小値をとるならば，$f'(c)=0$.
(2) $f(x)$ が $x=c$ で極値をもてば，$f'(c)=0$.

また，すでに高校でも学んできたように，

微分と関数の増減

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なとき，(a,b) で
(1) $f'(x)>0$ のとき，$f(a)<f(b)$（単調増加）
(2) $f'(x)<0$ のとき，$f(a)>f(b)$（単調減少）
である．

これらの性質から，関数の増減や極値が求まり，関数の概形を得ることができる．
注意：この性質の証明には次の平均値の定理を用いる．

また，微分法の理論的に大事な定理として**平均値の定理**がある．高校数学でもすでに学習したように，

(ラグランジュの) 平均値の定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．

である．図を用いれば，自明にも思えるだろうが，この節では大学数学らしく証明を与えることにしよう．

まず，連続関数の性質として，次の定理が成り立つ：

最大値最小値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ で最大値と最小値をもつ．

この定理もほとんど明らかなような気がするが，厳密な証明には中間値の定理と同じく実数の連続性が必要である．証明は多少技巧的であるため，講義ではこの定理に関しては証明を与えることはしない．

さて，上の最大値最小値の定理を認めると，次の**ロルの定理**を得る．

ロルの定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとき，$f(a)=f(b)$ ならば，

$$f'(c)=0$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する．

証明

(i) $f(x)$ が定数のとき，$f'(x)=0$ より，条件を満たす c は存在する．

(ii)$f(x)$ が定数でないとき，最大値最小値原理より最大値 $m=f(c_1)$ と最小値 $l=f(c_2)$ をとる．$f(x)$ は定数ではないので，m または l の少なくとも一方は $f(a)=f(b)$ とは異なる． すなわち，c_1 または c_2 の少なくとも一方は a でも b でもない．c_1 が a，b と異なるとき，c_1 は最大値なので $f'(c_1)=0$ となり，条件の c が存在する．c_2 の場合も同じ．□

平均値の定理はこのロルの定理の拡張として証明することができる．

証明（平均値の定理）

$l=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ として，$F(x)=f(x)-l(x-a)$ とおく．$F(a)=F(b)=f(a)$ に注意すると，$F(x)$ にロルの定理を適用でき，$F'(c)=f'(c)-l=0$ となる c が存在することがわかる．このとき $l=f'(c)$．□

この (ラグランジュの) 平均値の定理の拡張として，**コーシーの平均値の定理**が知られている：

コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとき，$g(a) \neq g(b)$ かつ $g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a,b)$ が存在する．

証明

$l = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ として，$F(x) = f(x) - l(g(x)-g(a))$ とおく．$F(x)$ にロルの定理を適用すれば，$F'(c) = f'(c) - lg'(c) = 0$ となる c が存在することがわかる．このとき $l = f'(c)/g'(c)$．□

ここまで，この節では平均値の定理とそれに関わる定理に対して証明を与えてきた．これらはすべて，次の**ロピタルの定理**のための準備である．この定理は，$0/0$ 型や ∞/∞ 型の，いわゆる**不定形**と呼ばれる極限を求める際に非常に便利な"受験テクニック"として知られているが，この定理の証明を与えることで，正しく利用することを目指す．

ロピタルの定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が a の近くで定義されており，微分可能であるとする．$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ で，$\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ が存在するならば，$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ も存在し，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

注：片側極限や a が ∞ のとき，また ∞/∞ 型の不定形のときも同様の定理が成り立ち，これらを含めてロピタルの定理という．定理の主張から，一度分母分子微分してもまだ不定形の場合は，もう分母分子の微分を繰り返し極限が得られるまで行えばよい．

証明

$f(a) = g(a) = 0$ とすると，$f(x)$ と $g(x)$ はともに a で連続となる．コーシーの平均値の定理を適用すれば，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が $a < c < x$（あるいは $x < c < a$）に存在する．$x \to a$ のとき，$c \to a$ なので，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

がわかる．□

問題 10

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}\ ,\ (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2},$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}\ ,\ (4)\ \lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-a}{x+a}$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(ax)}{\sin^{-1}x}\ (\text{ただし，}a \neq 0)$$

解答

(1) 0/0 型の不定形であり，ロピタルの定理を使えば，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1.$$

(2) 0/0 型の不定形であり，ロピタルの定理を使えば，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

(3) 不定形ではない．$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}=+\infty$.
(4) $\log\frac{x-a}{x+a}/x$ とみれば，0/0 型の不定形であり，ロピタルの定理を使えば，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\frac{x-a}{x+a}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2a}{x^2-a^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-2a.$$

(5) ロピタルの定理を使えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=a.$$

□

曲線のパラメータ表示

区間 I で定義された連続関数 $f(t)$，$g(t)$ によって，得られる曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\ (t\in I)$$

を**パラメータ** t で定義される連続曲線という．また，$f(t)$，$g(t)$ が C^1 級（微分可能で，微分も連続）のとき，C は滑らかという．このとき，x と y の間には関数関係があり，$f'(c)\neq 0$ ならば，$f(t)$ は $t=c$ の近くで単調であるので，逆関数

$$y=g\left(f^{-1}(x)\right)$$

が存在し，その微分は，

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=f(c)}=\frac{g'(c)}{f'(c)}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=c}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=c}}$$

で与えられる．

高校でも扱ったが，念のため復習しておこう．

問題 11

次のパラメータ表示された関数はサイクロイド曲線と呼ばれる．

$$x=t-\sin t\ ,\quad y=1-\cos t\quad (0<t<2\pi)$$

(1) $\frac{dy}{dx}$ を求めよ．
(2) この曲線の概形を書け．

解答
(1) $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$ より，$t\neq 2n\pi\ (\in \boldsymbol{Z})$ に対して，$\frac{dy}{dx}$ は定まる．実際，$\frac{dy}{dt}=\sin t$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

(2) $0<t<\pi$ で単調増加，$\pi<t<2\pi$ で単調減少．$t=\pi$ で極大値 $(x,y)=(\pi,2)$ をとる．

2.3 高階導関数

関数 $f(x)$ を n 回微分した関数を n **次導関数**，あるいは n 階導関数と呼び，$f^{(n)}(x)$，$\frac{d^n f}{dx^n}$ と書く．

n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続な関数を **n 回連続微分可能な関数**と呼び，C^n **級関数**ともいう．また何回でも微分可能な関数を C^∞ **級関数**という．区間 I で C^n 級関数である関数全体の集合を $C^n(I)$，C^∞ 級関数である関数全体の集合を $C^\infty(I)$ と書く．

例えば多項式や $\sin x$，$\cos x$，e^x は C^∞ 級関数であり，$C^\infty((-\infty,\infty))$ の元である．

あとのテーラー展開の節で詳しく見るように，高次の導関数は関数のより詳しい情報を与えてくれる．まずは，高校数学でも触れてきた 2 次の導関数から詳しく見ていこう．

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $y=f(x)$ を考え．(x,y) 平面内の曲線上の $\mathrm{A}(p,f(p))$ での接線が常に曲線の上にあるとき，その曲線は**上に凸**といい，常に曲線の下にあるとき，**下に凸**という．これらの凸性が変化する点を**変曲点**といい，これは，$f(x)$ が微分可能なとき，接線の増減が切り替わる点である．すなわち，$f''(x)$ が正（負）ならば，その点で関数は下（上）に凸であり，$f''(x)=0$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化する点が変曲点である．

凸性は，応用上様々な分野で重要な性質であり，例えば非線形方程式の数値解を求める手法であるニュートン法がある．

問題 12（ニュートン近似）

$f(x)$ が $[a,b]$ で 2 回微分可能で，

$$(i) f(a)<0,\quad f(b)>0$$

$$(ii) f'(x)>0,\quad f''(x)>0\ \ (a\le x\le b)$$

とする．

(1) このとき，方程式 $f(x)=0$ は区間 $[a,b]$ でただひとつ解 α をもつ．このことを示せ．
(2) 数列 c_n を，c_{n+1} が $y=f'(c_n)x+f(c_n)$ と $y=0$ の交点になるように定める，すなわち，

$$c_1=b\ ,\quad c_{n+1}=c_n-\frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

て定めるとき，c_n が有界単調減少列であることを示して，極限 $\lim_{n\to\infty}c_n$ が存在することを示せ．
(3) $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ を示せ．

解答

(1) まず．区間 $[a,b]$ で解をもつことは，中間値の定理からわかる．単調増加関数であるから，解は唯一である．

(2) まず，$c_n\in[\alpha,b]$ で $c_{n+1}=c_n-\frac{f(c_n)}{f'(c_n}<c_n$ より，数列は単調減少．c_{n+1} は $y=f'(c_n)(x-c_n)+f(c_n)$ と $y=0$ の交点であるから，凸性より，$c_n>a$．これらを合わせると，c_n が有界単調減少列であることがわかり，実数の連続性より数列は極値をもつ．

(3) この極限を β とすると，条件式の両辺の極限をとることで，

$$\beta=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

すなわち，$f(\beta)=0$ である．(1) より，そのような β は唯一で $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ である．□

例えば，$f(x)=x^2-2=0$ の解，$\alpha=\sqrt{2}$ を数値的に計算してみよう．$c_1=2$ としすると，$c_2=1.5$，$c_3=17/12=1.41666\cdots$，$c_4=1.414257\cdots$，となり，たった 3 回の計算で 5 ケタ以上の精度を持つ．

ライプニッツの公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 I で n 回微分可能であるとき，積 fg も n 回微分可能であり，

$$(fg)^{(n)} = \sum_{n=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

２項定理と同様に，帰納法で示せるので，証明はしない．大学の教科書の多くで ${}_nC_k$ を $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ と書くことが多い．

では，練習として，次の関数の高次導関数を求めてみよう．

問題 13

次の関数の n 階導関数を求めよ．

$$(1)\ \frac{e^x}{1-x}\ ,\quad (2)\ x^2\cos 2x,\quad (2)\ \frac{1}{x^2-x-2}$$

解答

(1) ライプニッツの公式より，$(\frac{e^x}{1-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (e^x)^{(n-k)} (\frac{1}{1-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k e^x \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = n! e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(1-x)^{k+1}}$

(2) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$ を使うと，$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos(2x + n\pi/2)$．ライプニッツの公式より，

$$\begin{aligned}(x^2\cos 2x)^{(n)} &= x^2(\cos 2x)^{(n)} + n(x^2)'(\cos 2x)^{(n-1)} + \frac{1}{2}n(n-1)(x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)} \\ &= 2^n x^2 \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^n nx\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 2^{n-2}n(n-1)\cos\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1})$ であるから，$(\frac{1}{x+a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ を使えば，

$$\frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right). \square$$

2.4　テイラーの定理

２次導関数が，関数の凸性を表したように，高階の導関数はより細かな関数の形状に関する情報を与えてくれる．１階の導関数は，関数のある点での接線を表した．これは，関数を **1 次関数**で近似したことに対応する．関数を 2 次関数で近似する際には，２階の導関数までを用いるし，一般に関数を n 次関数（n 次多項式）で近似する場合には，n 階の導関数までを用いる．このことを保証するのが，次のテイラーの定理（あるいはテイラーの公式）である．

テイラーの定理

関数 $f(x)$ が開区間 I で n 回微分可能であるとき，I の任意の２点 a，b（$a < b$）に対して，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を満たす点 c（$a < c < b$）が存在する．

証明

$$g(x) = f(b) - \left\{f(x) + f'(x)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n\right\} = f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

とすると，$g(b)=0$ である．$g(a)=R_n$ とおく．さらに，ロルの定理を使うために，

$$h(x)=g(x)-\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}g(a)$$

とおく．$h(a)=h(b)=0$ なので，ロルの定理を使うと，$h'(c)=0$ となる c が a と b の間に存在する．

$$h'(x)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+\frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-x)^{n+1}}g(a)$$

なので，

$$\begin{aligned}h'(c)&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{k-1}+\frac{(n+1)(b-c)^n}{(b-a)^{n+1}}g(a)\\&=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-a)^n+\frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-x)^{n+1}}R_n=0\end{aligned}$$

から，

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を得る．□

特に，$c=a+\theta(x-a)$（$0<\theta<1$）として，a を固定して，上の定理を表現すると，点 $x=a$ の近くでの近似式になっており，テイラー展開と呼ぶ．

テイラー展開

関数 $f(x)$ が開区間 I で n 回微分可能であるとき，I の任意の点 a を固定すると，$x\in I$ 対して，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

を満たす点 θ（$0<\theta<1$）が存在する．右辺を $x=a$（のまわり）でのテイラー展開という．

注意 1：$0!=1$
注意 2：中でも，$x=0$ のまわりのテイラー展開を**マクローリン展開**と呼ぶ．
注意 3：右辺第 2 項の誤差を表す項を（ラグランジュの）**剰余項**と呼ぶ．
注意 4：展開係数は一意である．

例えば，e^x の $x=0$ でのテイラー展開，すなわちマクローリン展開を考えてみよう．$f(x)=e^x$ としたとき，$f^{(k)}(x)=e^x$ より，テイラーの公式は，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^n\ (0<\theta<1)$$

となる．$f_n(x)=f(x)-R_n$ で定義すると，$f_0(x)=1$，$f_1(x)=1+x$，$f_2(x)=1+x+(1/2)x^2$，$f_3(x)=1+x+(1/2)x^2+(1/6)x^3$ となっている．これは，e^x の $x=0$ でのより精度のより良い近似を与える多項式になっている．この展開を繰り返せば，もとの関数に近づきそうな気がするであろう．このようにテイラー展開を無限次まで行った次の**無限級数**，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

を**テイラー級数**（あるいは**整級数**）という．このような表記が意味をもつのは，もちろんこの級数が収束するときだけである．関数を多項式でいくらでも近似できるということがテイラー級数の意味で

ある．級数の収束に関する詳しい話題は後期で扱い，ここでは大切な事実をいくつか紹介するだけにとどめる．

重要なテイラー級数

次の関数に対する $x=0$ でのテイラー級数は $(-\infty,\infty)$ で収束する：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad,\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad,\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

次の関数に対する．$x=0$ でのテイラー級数は $(-1,1)$ で収束する：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad,\quad (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}{}_\alpha C_n x^n,\quad \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

ただし，α は実数であり，${}_\alpha C_n=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ で定義される．

いずれも，テイラー展開の剰余項 R_n が $n\to 0$ でゼロに収束することを確認すれば良い．

複素数関数に関しては，講義では扱わないが，次の公式は実用上非常に有用であるので，その結果を紹介する．

オイラーの公式

$\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

が成り立つ．

上で扱った重要なテイラー級数の公式から，

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$$

が成り立つことが期待できる（実際に，複素数に拡張することでこの式が正しい）．この表式を実部と虚部に分解することで，

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos x+i\sin x$$

を得る．特に，$x=\pi$ とした，$e^{i\pi}+1=0$ はあまりにも有名．

では，練習として，次の関数のテイラー公式（マクローリン公式）を求めてみよう．

問題 14

次の関数の $n=3$ までのマクローリン公式を求めよ.（剰余項は x^4 のオーダー）

$$(1)\ \sin x\ ,\quad (2)\ \sqrt{1+x}$$

解答

(1) $f(x)=\sin x$ のとき，$f^{(k)}=\sin(x+n\pi/2)$ なので，$f^{(0)}(0)=f^{(2)}(0)=1$，$f^{(1)}(0)=f^{(3)}(0)=0$. よって，$f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\sin(\theta x)x^4}{24}$.

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}$ とすれば，$f^{(k)}(x)={}_kC_{1/2}(1+x)^{-(2n-1)/2}$ より，$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5x^4}{128}(1+\theta x)^{-7/2}$

□

2.5 無限小と漸近解析

$x=0$ でのテイラー展開，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x))}{(n+1)!}x^{n+1}$$

は x^n までの近似であることを意味している．剰余項 $R_n=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x))}{(n+1)!}x^{n+1}$ は x^n に比較すれば，影響力の小さな項であることになろう．このことを表す記号を導入する．

ランダウの記号

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

が成り立つとき，

$$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to a)$$

と書き（ランダウのスモールオー，スモールオーダー）．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}<\infty$$

が成り立つとき，

$$f(x)=O(g(x))\ \ (x\to a)$$

と書く（ランダウのラージオー，ラージオーダー）．

テイラー展開の表式においては，$R_n=o(x^n)$，あるいは $R_n=O(x^{n+1})$ と書ける．この式は左辺を右辺で評価した式であり，普通の等式ではない．

では練習として，次の問題を解いてみよう．

問題 15

次の関数を $x=0$ のまわりで展開して，x^3 まで求めよ．

$$(1)\ \frac{1}{\sin x+\cos x}\ ,\quad (2)\ \frac{x}{e^x-1}$$

$$(3)\ \frac{x}{\log(1+x)}\ ,\quad (4)\ \sqrt{1-x+x^2}$$

解答

(1) $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x+\cos x}&=\frac{1}{1-\left(-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}\\&=\left(1-\left(-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\right)^{-1}\\&=1+\left(-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)+\left(-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)^2+\left(-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)^3+o(x^3)\\&=1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

(2) $e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} &= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)^{-1} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

(3) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\log(1+x)} &= \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)^{-1} \\
&= 1 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x)^3
\end{aligned}
$$

(4) $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ より，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1 - x + x^2} &= \left(1 + \left(-x + x^2\right)\right)^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-x + x^2\right) - \frac{1}{8}\left(-x + x^2\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-x + x^2\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

□

また，テイラー展開を用いることで，関数の極限や極大・極小の判断，また関数の大小の判断が簡単にできる．次の問題を考えてみよう．

問題 16

$x = 0$ のまわりでのテイラー展開を用いて，以下の問いに答えよ．

(1) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) 次の関数は $x = 0$ で，極大値，あるいは極小値を取るか調べよ：

$$\frac{\sin x}{x}.$$

(3) 次の 2 つの関数は，$x = 0$ の近くでどちらが大きいか：

$$\cos x \text{ と } \frac{\sin x}{x}$$

解答

(1) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ より，

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3).$$

これより，$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$．

(2) $O(x)$ の係数が 0 で，$O(x^2)$ の係数が負であるから極大値になっている．

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ なので，$x = 0$ の近くで，$\cos x < \frac{\sin x}{x}$．□

少しテクニックが必要になるが，次のテイラー展開も重要である．

問題 17

次の関数を $x=0$ のまわりで展開して，x^3 まで求めよ．

$$(1)\ \tan x\ ,\quad (2)\ (1+x)^x,\quad (3)\ \tan^{-1} x$$

解答

(1) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$，$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ より，

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

(2) $y = (1+x)^x$ とすると，$\log y = x\log(1+x) = x\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ である．よって，

$$\begin{aligned}y &= e^{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)^2 + o(x^3) \\ &= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

(3) $y = \tan^{-1} x$ とすると，$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$．両辺 x で 0 から x まで積分すると，

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

となる．□

さらに，練習を重ねよう．

問題 18

次の極値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right),\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right),\quad (3)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

解答

(1) $O(x^2)$ まで求めればよい．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^{-2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^{-2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) \to \frac{1}{3}\ (x\to 0)\end{aligned}$$

(2) いろんな解法があると思う．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{x}\left((1-x)^{-1/2} - (1+x)^{-1/2}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right) - \left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right)\right) \\
&= \frac{1}{x}\,(x+o(x)) \to 1 \ (x \to 0)
\end{aligned}
$$

(3) $y = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ とする．

$$
\begin{aligned}
\log y &= \frac{1}{\sin^2 x}\log(\cos x) = \frac{1}{\sin^2 x}\log(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)) \\
&= \left(\frac{1}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\right)^2\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}+o(1)
\end{aligned}
$$

よって，$y = e^{1/2+o(1)} \to \sqrt{e}\ (x \to 0)$．□

第 3 章　1 変数の積分

この章では，高校数学でも扱った 1 変数の積分法を学ぶ．高校数学では区分求積法をもとに，積分が微小区間の和の極限として定義した．これを大学数学的に書き表したリーマン積分の定義と，連続関数の積分の存在定理を（証明はしないが）紹介する．そこで，改めて「微分と積分が逆演算である」という微分積分学の基本定理の重要性とその驚きを味わってほしい．技術的には，逆三角関数に関する積分や広義積分が大学数学で学ぶ新たな内容であり，積分の基本的な性質の復習を終えたのちは，この広義積分の計算を身につけることを目標に授業を進める．

3.1　積分の定義と微分積分学の基本定理

高校数学での積分の導入はいささか技術的であった：関数 $f(x)$ に対して，

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

を満たす $F(x)$ を**原始関数**（あるいは**不定積分**）といい，この関数を

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

と書く，という約束であった．この関数は，**積分定数**とよばれる定数の差を除いて，一意に定まっていた．しかし，これは論理的にはすっきりしない．というのも，一般の関数 $f(x)$ に対して，微分すれば f になるような関数 F が一意に存在するのであろうか．また，この積分の定義と「面積」という実用的な側面の関係が不明である．そこで，改めて積分の定義を考えよう．アイデアは長方形で領域の面積を近似する区分求積法である．

まず，閉区間 $[a, b]$ に対して，$x_0 = a$，$x_n = b$ として

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を，$[a, b]$ の**分割**という．また，$|\Delta| = \max_{1 \le i \le n}\{x_i - x_{i-1}\}$ を分割の幅という．

閉区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数，$y = f(x)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$$

を**リーマン和**という．この和の上限と下限に対応するのが，

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\ , \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i}\{f(x)\}$$
$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\ , \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i}\{f(x)\}$$

であり，それぞれ**上限和**，**下限和**という．分割 Δ の分点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ のさらに間にさらに分点をとって得られる分割 Δ' を Δ の細分というが，分割を細かくすればするほどこの 2 つの和は近付きそうである．実際，

$$s(f, \Delta) \le s(f, \Delta') \le S(f, \Delta') \le S(f, \Delta)$$

が成り立つ．

さらに，分割 Δ を動かし

$$S(f)=\inf_{\Delta}\{S(f,\Delta)\}\quad,\quad s(f)=\sup_{\Delta}\{s(f,\Delta)\}$$

を定義[1]すると，$s(f)\leq S(f)$ を得る．$s(f)=S(f)=\sigma$ となるとき，関数 f は区間 $[a,b]$ で **(リーマン) 積分可能**であるという．これは，$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ の極限が存在することと同じである．いずれにせよ，この収束値 σ を

$$\sigma=\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き，関数 f の区間 $[a,b]$ での**定積分**という．現代的には，積分の値をもって**面積**を定義する．この考え方は，積分のもつ面積の意味を明確にするだけでなく，た変数の積分論の基礎にもなっている．

しかし，積分計算の度に毎度この和の収束を考えるのは現実的でない．多くの状況でこのように定義される積分の存在を保証してくれるのが次の定理であり，高校数学で存在を仮定しきてきた**原始関数**の存在を保証してくれる．

連続関数の積分の存在定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば，積分可能である．

この定理の証明を講義では行わない．証明を理解するためには，**一様連続性**と呼ばれる概念が必要であり，閉区間上の連続関数が一様連続であるという性質が証明の鍵となっている．また，ここで扱ったリーマン積分では，積分の定義ができない関数がまだまだたくさんある．これらを改善するための積分の概念がルベーグ積分論である．

また，この定理から，区間ごとに連続な関数（**区分連続**）も積分が可能である．

さて，このように，我々に馴染み深い関数の定積分が定義できたところで，不定積分（あるいは原始関数）を

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

で定義する．これで，積分と微分が逆演算である，という微分積分学の基本定理を述べる準備ができた．

微分積分学の基本定理

$f(x)$ を区間 I で連続な関数とする．$a\in I$ のとき，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

とすると，

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

証明

$a<x$ とする（$a>x$ の場合も同じ）．定義から，

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

定積分の積分区間の加法性より，

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h}f(t)\,dt.$$

[1] ここで Δ を動かす，の意味は n も動かす

$h>0$ のとき，（$h<0$ なら符号は逆）

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

ここで，

$$M = \max\{f(t) \mid x \leq t \leq x+h\}$$
$$m = \min\{f(t) \mid x \leq t \leq x+h\}$$

である．この不等式の両辺を h でわると，

$$m \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M$$

が成り立つ．$h \to 0$ で，$m, M \to f(x)$ なので，はさみうちの原理より，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \ \square$$

これ以降，実際的な計算においては，原始関数を微分の逆操作で求めることにより，積分計算ができる．すなわち，高校数学での計算手法が正当化されたというわけである．

3.2 積分の計算法

積分の計算は高校数学でもかなり複雑なものを含めて，勉強してきた．まずは，積分計算の基本的な性質をまとめて復習しておこう．

積分の計算の基本

$f(x)$，$g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．このとき，次が成り立つ．

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k \text{ は定数})$$

また，定積分は不定積分を使って計算できる：

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (k \text{ は定数})$$

最後の性質より，不定積分を求めることができれば，すぐに積分計算ができる．次の技法を用いることで基本的な不定積分からさまざまな（基本的な関数の組みあわせの）関数の不定詞気分が計算できる．

置換積分と部分積分

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt \qquad (\text{置換積分})$$

$G(x) = \int g(x)\,dx$ とおくと，

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx \qquad (\text{部分積分})$$

基本的な不定積分を以下にまとめておく．これらは，覚えておくと便利である．

基本的な不定積分

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha-1}\quad(\alpha\neq -1)\quad,\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x\quad,\quad \int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x\quad(a\neq 1, a>0)\quad,\quad \int \log x\,dx = x\log x - x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x\quad,\quad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{|a|}\quad,\quad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

いつくか，積分計算の練習を行おう．

問題 19

次の不定積分を求めよ．

$$(1)\int \cot x\,dx\quad(2)\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx\quad(3)\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

$$(4)\int \sin^{-1}x\,dx\quad(5)\int \frac{1}{\cosh x}\,dx\quad(6)\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

解答

(1) $\cot x = 1/\tan x$ であるから，

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C(\text{積分定数})$$

(2)

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C(\text{積分定数})$$

(3) 分母のルート内を平方完成することで，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C = \sin^{-1}(2x-1) + C(\text{積分定数})$$

(4) 部分積分を行う．すると，

$$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sin^{-1}x + \log\sqrt{1-x^2} + C(\text{積分定数})$$

(5) $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ より，

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

ここで，$t = e^x$ とすれば，$dt = e^x dx$ より，

$$\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2\tan^{-1}t + C = 2\tan^{-1}e^x + C(\text{積分定数})$$

(6) $x^2 = t$ とおけば，$dt = 2xdx$．すると，

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}t + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x} + C(\text{積分定数})\quad\square$$

その他にも重要な不定積分がある．次を確認しておこう．

問題 20

次の不定積分が成り立つことを確認せよ．

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log|x+\sqrt{x^2+a}| \quad (a \neq 0)\\
&(2)\ \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{|a|}\right) \quad (a \neq 0)\\
&(3)\ \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) \quad (a \neq 0)
\end{aligned}
$$

解答

いずれも，直接右辺を微分すれば確かめられるが，ここでは左辺から右辺を導く．

(1) 分母を $t=\sqrt{x^2+a}-x$ とおく．すると，$dt/dx=(x+\sqrt{x^2+a})/\sqrt{x^2+a}$．これを用いると，左辺の不定積分は，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \log|x+\sqrt{x^2+a}|+C(\text{積分定数})$$

となる．

(2) まず，部分積分により，

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

となる．一方で被積分関数の分母分子に $\sqrt{a^2-x^2}$ を乗じると，

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\sin^{-1}\frac{x}{|a|}-\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

この 2 つの式を連立させると求めたい不定積分を得る．

(3) 上の問題と同様の手法を用いる．まず，部分積分により，

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}$$

を得る．また，被積分関数の分母分子に $\sqrt{x^2+a}$ を乗じることで，

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+\log|x+\sqrt{x^2+a}|$$

この 2 式を連立させると，求めたい不定積分が得られる．□

有理式とは，分母分子が多項式になっているものをいうが，高校数学でも学んだように，有理式の被積分関数は**部分分数展開**を用いて計算することができる．まとめると，次のようになる．

有理式の積分

有理式 $f(x)$ の不定積分は，$f(x)$ を次の 3 つの和で書き表すことで実行できる．

(1) 多項式　(2) $\dfrac{a}{(x+b)^m}$ の形　(3) $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ の形（分母 $=0$ の判別式は負）

次の例題を考えてみよう．

問題 21

次の不定積分を求めよ．

$$(1)\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx \quad (2)\int \frac{1}{x^3+1}\,dx \quad (3)\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

解答

(1) 部分分数展開より，

$$\frac{x^4+1}{x^3-x} = ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x-1}+\frac{e}{x+1}$$

と書ける．この右辺を整理すると，

$$ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x-1}+\frac{e}{x+1} = \frac{ax^4+bx^3+(-a+c+d+e)x^2+(-b+d-e)x+-c}{x(x-1)(x+1)}$$

となる．これより，係数は $a=1, b=0, c=-1, d=e=1$ と求まる．よって，

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx = \int \left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+\log\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C(\text{積分定数})$$

(2) 部分分数展開より，

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

と書ける．右辺を整理すると，

$$\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

となるから，係数が $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{2}{3}$ と求まる．以上より，

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

右辺 2 項目の積分は分母を平方完成させる必要がある．すなわち，

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{(x-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{(x-\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C(\text{積分定数}).$$

以上をまとめると，

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C(\text{積分定数})$$

(3) $1/(x^2+1)$ の微分が $-2x/(x^2+1)^2$ であることを使って部分積分を行う．

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-1}{x}\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

右辺第 2 項目は部分分数展開を用いて計算を行う．すなわち，

$$\int \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{x}-\tan^{-1}x+C(\text{積分定数}).$$

以上をまとめると，

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C(\text{積分定数}).\ \square$$

この部分分数展開の公式は，複素数の範囲まで含めると次の代数学の基本定理が背景にはある．

代数学の基本定理

複素係数の n 次多項式は，重複度を込めて n 個の（複素の）零点をもつ．いいかえると，次のように n 個複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ で因数分解できる；

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + z_{n-1} z + a_n = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n)$$

無理関数の有理式の積分

$R(x, y)$ を x と y の 2 変数からなる有理関数とする．このとき，

$$(1) \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx \text{ の形の積分は } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ とすると有理化される}$$

（ただし，$ad - bc \neq 0$，$n \geq 2$）

$$(2) \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \text{ の形の積分は } t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x \text{ とすると有理化される}$$

（ただし，$a > 0$，$b^2 - 4ac < 0$ ）

問題 20(1) の積分 $\int dx/\sqrt{x^2+a}$ がその例である．問題 20(2) や (3) も同じ変数変換で計算が可能である．

三角関数の有理式の積分

$R(x, y)$ を x と y の 2 変数からなる有理関数とする．このとき，

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \text{ の形の積分は } t = \tan\frac{x}{2} \text{ とすると有理化される}$$

問題 22

(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ を t で表せ．
(2) この結果を用いて，次の不定積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

解答

(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ とすると，$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}/(1+\tan^2\frac{x}{2})$，$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2/(1+\tan^2\frac{x}{2}) - 1$ より，

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

と表せる．

(2)

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{dx}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$$

なので，

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

これより，求める積分は，

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C(\text{積分定数})\ \square$$

問題 23

次の積分 $I_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ はウォリス積分と呼ばれる．I_n に関するの漸化式を立てて積分を求めよ：

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta.$$

解答

部分積分により，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \left[-\cos\theta\sin^{n-1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^2\theta\sin^{n-2}\theta\, d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

よって，$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$．これより，

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 & (n\text{ が奇数}) \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$ に注意して，

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 1(n\text{ が奇数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1(n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

を使って表すと，

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{ が奇数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる．ただし，$0!! = (-1)!! = 1$ と定める．□

3.3 広義積分

これまで学んできた積分は閉区間上のものばかりであった．この節では，閉区間に限らない区間上の積分を考える．

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b)$（ただし，b は実数または ∞）で連続な関数とする．極限 $\lim_{c\to b}\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するとき，$f(x)$ は区間 $[a, b)$ で積分可能といい，

$$\lim_{c\to b}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

と書き，これを**広義積分**という．区間を $(a, b]$（ただし，a は実数または $-\infty$）とした場合も同様．開区間 (a, b) の場合も $(a, c]$ と $[c, b)$ の二つの領域に分けて計算すれば，半開区間と同じになる．

まずは，実際に計算してみて感覚をつかんでみよう．

問題 24

次の広義積分が存在するか調べ，存在する場合にはその値を求めよ．

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad (2) \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$(4) \int_0^\infty e^{-x}\,dx \quad (5) \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad (6) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

解答

(1) $x \to +0$ で $1/\sqrt{x}$ は有界でなくなる．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to+0}\left(2-2\sqrt{a}\right) = 2.$$

(2) $x \to +0$ で $1/x$ は有界でなくなる．

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to+0}\left[\log x\right]_a^1 = \lim_{a\to+0}(-\log a) = +\infty$$

となり，この積分は収束しないので，この広義積分は存在しない．

(3) $x \to 1$ で被積分関数は有界でなくなる．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to1}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to1}\left[\sin^{-1}x\right]_0^a = \lim_{a\to1}\sin^{-1}a = \frac{\pi}{2}.$$

(4)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-e^{-a}\right) = 1.$$

(5)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\log x\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\log a = +\infty.$$

となり，積分は発散し広義積分は存在しない．

(6)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(\tan^{-1}a\right) = \frac{\pi}{2}. \square$$

特に，(2) と (5) の例は特に重要である．以下に，べき関数の積分の発散と収束に関する性質をまとめておこう．

べき関数の積分の発散と収束

(1) 次の積分は $\alpha < 0$ で広義積分となり，

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

は $\alpha > -1$ であれば収束し，$\alpha \leq -1$ であれば発散する．

(2) 次の広義積分

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx$$

は $\alpha < -1$ であれば収束し，$\alpha \geq -1$ であれば発散する．

実際に不定積分がわかる場合には，直接極限をとることで，広義積分の存在がわかるが，実際の研究の場面では不定積分を（今までやってきたように）簡単な関数で書き表すことができないことが多い．その場合でも収束・発散がわかる関数（例えばべき関数）で**評価**することによって，積分の収束・発散を知ることができる．

優関数と劣関数の方法

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$（ただし，b は実数または $+\infty$）で連続とする．

(1) 次の性質を満たす，関数 $g(x)$ が存在し，

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(x)\,dx < +\infty \text{（収束するの意味）}$$

を満たすとき，$g(x)$ を**優関数**といい，積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(2) 次の性質を満たす，関数 $g(x)$ が存在し，

$$0 \leq g(x) \leq |f(x)| \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(x)\,dx \text{ が発散}$$

を満たすとき，$g(x)$ を**劣関数**といい，積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散する．

この方法を用いて，積分の収束と発散の判断を行おう．特に，コンピュータに計算をさせる際，発散する積分を無理やり数値的に計算させても，計算はうまくいかない．最悪な場合には，なにか有限の「数字」を積分の値だとコンピュータが答える場合があり，数学の知識がないと，値のない積分の値が存在すると勘違いすることになってしまう．

問題 25

次の積分について，(1) と (2) については積分が存在すること，(3) と (4) については積分が発散することを示せ．

$$(1) \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx \quad (2) \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx \quad (4) \int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx$$

解答

(1) $|\sin(1/x)| \leq 1$ より，

$$\left|\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x}\right|\,dx \leq \int_0^1 \,dx = 1$$

となり，積分は収束する．

(2) $0 \leq x \leq 1$ で $e^{-x^2} \leq 1$，$1 \leq x$ で $x \leq x^2$ なので，$e^{-x^2} < e^{-x}$．以上より．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

の右辺 1 項目は $\int_0^1 dx$ で抑えられる（$[0,1]$ で被積分関数は連続なので積分が存在するのは明らか）．右辺第 2 項目は

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} < +\infty$$

となり，積分は収束する．問題の積分は**ガウス積分**とよばれて，特に重要である．物理学や統計学の教科書に頻繁に登場する．この積分の具体的な値については，後期の微分積分学 B の広義で扱う．

(3) 被積分関数は $x \in [0,\infty)$ で連続．また，被積分関数は $x \to \infty$ で $\sim x^{-2/3}$ となるので，発散する．丁寧に書けば，

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}\,dx = \int_0^\infty (x+1)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \int_1^\infty x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

となり，これは発散する．

(4) 被積分関数は $x \in [\frac{\pi}{2},\infty)$ で連続なので，$x \to \infty$ に注目する．$t = 1/x$ とすれば，$dt = -dx/x^2$ より，$dx = -dt/t^2$．すると，

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

$t \to 0$ で $\sin t \sim t$ より，右辺 2 項目被積分関数は $\sim 1/t$ となるので，積分は発散する．もっと丁寧に書けば，$t \in [0,\pi/2]$ で $\sin t > t/2$ を用いて，

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2t}\,dt$$

最後の積分は確かに発散する．□

最後に，区間内に可算個の不連続点を持っている場合の積分を考える．区間を有限個の区間に分割してそれぞれの積分の和を考えれば良い．区間 (a,b) 内の不連続点を $x = c_1, c_2 \cdots, c_n$ とするとき，それぞれの開区間 $(a,c_1),(c_1,c_2),\cdots,(c_n,b)$ での積分が全て収束するときに積分が存在する，次の例題を考えてみよう．

問題 26

次の積分は可能か．

$$(1)\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \quad (2)\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

解答

(1) 被積分関数は $x=0$ で不連続となることに注意すれば，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 4$$

となり，積分は存在する．

(2) 被積分関数は $x=0$ で不連続となることに注意すれば，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

しかし，右辺はそれぞれ発散するので，積分は存在しない．この積分を

$$\lim_{a\to 0}\left(\int_{-1}^a \frac{1}{x}\,dx + \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{a\to 0}\left([\log|x|]_{-1}^a - [\log|x|]_a^1\right) = \lim_{a\to 0}(0 - \log a + \log a - 0) = 0$$

としてはいけない．この積分は（コーシーの）主値といい，広義積分とは区別する．

ここまで，さまざまな広義積分を扱ってきた．その中でも応用上重要なガンマ関数についてもう少し詳しく考えてみよう．

ガンマ関数は次で定義される広義積分である：

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

この積分は $s > 0$ で収束する．実際，被積分関数を $f(x) = e^{-x}x^{s-1}$ とおけば，十分大きな x に対して指数関数は多項式より大きくなるので，$x^{s-1} < e^{x/2}$ とできる（$\lim_{x\to\infty} x^{s-1}/e^{x/2} = 0$ と同じ意味）ので，$f(x) < e^{-x/2}$．これは優関数になっているので，$\int_c^\infty f(x)\, dx$ は確かに収束する．また，$x = 0$ に近いところでは，$e^{-x}x^{s-1} < x^{s-1}$ が $x > 0$ で成立することから，$s > 0$ であれば，確かに $\int_0^c f(x)\, dx$ も収束することがわかる．ガンマ関数は次の性質から，階乗の一般化になっている．

問題 27

ガンマ関数の次の性質を示せ．

$$(1)\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0)$$

$$(2)\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

解答

(1) 部分積分を行う．

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\, dx = \left[-e^{-x}x^s\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\, dx = s\Gamma(s).$$

(2) (1) の漸化式より，$n \geq 1$ の整数に対して，$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)! \cdot \Gamma(1)$．$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^x\, dx = 1$ より，$\Gamma(n) = (n-1)!$．　□

3.4　曲線の長さ

曲線の長さは高校数学でも学んだが，次の式で与えられる．

曲線の長さ

関数 $f(x)$ が微分可能で，$f'(x)$ が連続ならば，曲線 $C : y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ は長さをもち，

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

で与えられる．曲線が

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

（ただし，$a \leq t \leq b$）とパラメータ表示されているときには，

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

と表される．

この公式も面積の定義と同じく，分割 Δ を細かくしていくときに線分の長さの和がある値に収束するときに，積分可能といい，その積分値を長さと定義するのであった．

いくつか練習問題を解いておこう．

問題 28

次の曲線の長さを求めよ：

$$(1)\ y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \quad (-b \le x \le b\ ; a, b > 0)$$

$$(2)\ C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi)$$

解答

(1) 曲線の長さは $y = a\cosh(x/a)$ より，$y' = \sinh(x/a)$ に注意すると，

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-b}^{b} \cosh(x/a) dx = [a\sinh(x/a)]_{-b}^{b} = 2a\sinh(b/a).$$

この曲線は，カテナリーとよばれ，紐やロープが垂れ下がっているときの曲線である．

(2) この曲線は，問題 11 で扱ったサイクロイド曲線である．$dx/dt = a(1 - \cos t)$，$dy/dt = a\sin t$ より，

$$L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a. \ \square$$

3.5 補講：ネピア数に関する話題

対数を発見したスコットランドの数学者 John Napier にちなんで，ネピア数（ネイピア数）と呼ばれている数字 $e = 2.718\cdots$ は自然対数の底として知られている無理数であるが，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ に代表されるように，微分積分学の深遠さを形成する大事なピースである．しかし，講義ではネピア数の特徴や，指数対数関数の性質は高校数学で学んだとして詳しく扱わなかった．この項では前期に学んだ事柄のおさらいとして，ネピア数について詳しく見ていこう．
まず，ネピア数の定義であるが，高校数学では $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ を採用するものが多い．まずは，この極限が実際に存在することを示してみよう．

問題 29

数列 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$（$n = 1, 2, 3\cdots$）が収束することを示せ．

解答

実数の連続性（単調有界数列は収束する）を使う．

$$\begin{aligned}
a_n =& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
=& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
=& \le 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
& + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}
\end{aligned}$$

より，a_n は単調増加．

$$\begin{aligned} a_n =&2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &\leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 2+\frac{1-1/2^n}{1-1/2}\leq 3 \end{aligned}$$

より，上に有界．また，$a_n \geq a_1 = 2$ なので，$2 \leq a_n \leq 3$．実数の連続性より，数列 a_n は収束する．□

このように，確かに極限が存在することが証明され，ネピア数の存在がわかった．しかも証明ではその値の $2 \leq a_n \leq 3$ の評価式も得られた．この評価を狭め，ネピア数の良い近似式を探してみよう．古代からこのような近似式を求めることは,（実務として）現実の問題を扱う際には大変重要であった．

問題 30

マクローリン展開の第 6 項までを計算し，e の近似値を求めよ．

解答

マクローリンの公式より，

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{e^{\theta x}}{7!}x^7 \quad (0<\theta<1).$$

$x=1$ を代入することで，e の評価式を得る：

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2.7180555\cdots.$$

誤差は，剰余項の大きさを見れば良い．$x=1$ のとき剰余項は，

$$\left|\frac{e^\theta}{7!}\right| < \frac{3}{5040} = 0.0005952\cdots$$

となるので，少数第 3 位までの近似 $e \approx 2.718$ を得る．□

このように，テイラーの公式（マクローリンの公式）を用いれば，近似の精度をどんどんと上げることができる．しかし，いつまでたっても真の値にたどり着くことはない．これは，e が無理数であることからわかる．そのため，e は循環少数でも表すことはできない．この事実はよく知られているが，実際に示してみよう．

問題 31

e が無理数であることを示せ．

解答 e が有理数だと仮定して，矛盾を示す．e が有理数だとすれば，整数 $p,q>0$ を用いて，$e=q/p$ と表せる．e は先ほどの第 $p+1$ 項までのテイラーの公式の $x=1$ ので値から，

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}+\frac{1}{(p+1)!}+\frac{e^\theta}{(p+2)!} \quad (0<\theta<1)$$

の評価式を得る．ここで，両辺 $p!$ を乗じると，

$$p!\cdot e = \left(p!\cdot 2+\frac{p!}{2!}+\frac{p!}{3!}+\cdots+\frac{p!}{(p-1)!}+\frac{p!}{p!}\right)+\frac{1}{p+1}+\frac{e^\theta}{(p+1)(p+2)}.$$

ここで，左辺は整数．右辺の括弧内はすべて整数であるからその和である括弧部分も整数．しかし，右辺の残りの項は，p が 1 以上の整数なので

$$0 < \frac{1}{p+1} + \frac{e^{\theta}}{(p+1)(p+2)} < \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 3} = 1$$

となり，整数ではない．ここで，$2 < e < 3$ を用いた．以上より，右辺は全体として整数になり得ず，左辺が整数であることに矛盾する．背理法より，e は無理数．□

ちなみに，π が無理数であることの証明はもう少し難しい．最も簡単な証明は微分積分学の知識のみで可能であるが，日本の岩本義和が 1949 年に与えた証明は，美しい定理の証明が集められた M. Aigner and G. M. Ziegler, "Proofs from the Book"（和訳「天書の証明」）の 90 の定理のひとつとして記載されている．驚くべきことに，この本に記載されている日本人は岩本ただ一人であるが，この証明は彼が近畿大学の学部生の時に与えたものである．しかも卒業後は大阪の府立高校の教諭をしていたらしい．

さらに余談であるが，放浪の天才数学者として知られるポール・エルデシュは，放浪の旅を続けながらその旅先で共同研究を行い，その生涯にわたって 1500 篇もの論文（その多くが共著）を書いた．エルデシュは「数学の美しい本には美しい定理がありそれが書かれている天書 (The book) があるはずだ」という話をたびたびしていたそうで，その話をうけて篇さんしたのが，この本であるという（和訳「天書の証明」の全文より）．また，エルデシュの功績をたたえて，エルデシュ数というものが数学者の中では知られている．これは，エルデシュ自身のエルデシュ数を 0 として，エルデシュ数 n のひとと共著論文を書いたことのあるひとのエルデシュ数を $n+1$ とするもので，エルデシュとの関係性の近さを表した指標であるといえよう．もし，数学者や数学に関わるひとと話をする機会があったら、「あなたのエルデシュ数はいくつですか」と尋ねてみるといいかもしれない．ちなみに私のエルデシュ数=4 です．

さて，ネピア数 e の大切な性質として，$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ がある．これは，オイラーによる e の定義である．すなわち，$da^x/dt = a^x$ となる a のことである．これと関連して，数理モデルとしての微分積分学の応用例として，微分方程式による個体群動態を考えてみよう

マルサスの「人口論」によると時刻 t での人口 $x(t)$ の増加率，すなわち dx/dt はその時の人口 x に比例すると考えた．比例定数を $a > 0$ とすると，

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

と書き表せる．時刻 $t = 0$ での値を $x(0) = x_0$ とすれば，この微分方程式の解を求めることが可能である．

問題 32

$x(t)$ に関する微分方程式 (マルサス方程式)

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

を，$x(0) = x_0$ の初期条件の元で解け．ただし，$a > 0$ とする．

解答

変数分離型であり，

$$\frac{dx}{x} = adt$$

と変形して，両辺積分すると，$\int \frac{dx}{x} = \int adt$．すなわち，$\log|x| = at + C$．ただし，$C$ は積分定数．x について解けば，$x = Ae^{at}$．ただし，$A = e^C$ は定数．初期条件を満たす A は $A = x_0$ だから，求め

る関数 x は $x(t) = x_0 e^{at}$．□

すなわち，人口は指数関数的に増大する．それに対して，人口を支えるための食料等の資源はべき関数的にしか増やすことはできず，いずれは人口増加によって資源が枯渇することをマルサスは主張した．

マルサスのモデルでは，人口を無限に増えてしまうが，資源の枯渇によっていずれ人口増加はおさまるであろう．そこで，フェルフルスト (Verhulst) はマルサスのモデルの人口増加率 a が人口の増加によって減少するように a を $a(b-x)$ に置き換えるて，モデルを改良した：

$$\frac{dx}{dt} = a(b-x)x.$$

ここで，b は人口増大の最大値に対応する．この微分方程式はしばしば**ロジスティック方程式**として知られる．今，$b=1$ としてみよう，数学ではこのように，方程式の性質に注目するばあいに，係数を簡単な数字に置き換える．これは，人口 x や時間のスケール（目盛り）を変えただけで，ダイナミクスの様子は何も変わらない．

問題 33

$x(t)$ に関する微分方程式 (ロジスティック方程式)

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x)$$

を，$x(0) = x_0$ の初期条件の元で解け．ただし，$a > 0$ とする．

解答

先と同様に変数分離をして，両辺積分すると，

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt$$

である．これを解けば，$\log|x/(1-x)| = at + C$ (C は積分定数) となり，$A = e^C$ を定数として，$x/(1-x) = Ae^{at}$．これを x について解けば，

$$x(t) = \frac{Ae^{at}}{1+Ae^{at}} = \frac{1}{1+Ae^{-at}}$$

を得る．初期条件を満たす A は，$A = x_0/(1-x_0)$．□

このように，t が十分大きくなると，$x \to 1$ とある値に近づき，人口が無限に増えることはない．また，微分方程式の解の関数を**ロジスティック関数**と呼ぶ．実際に，バクテリアや酵母のような単純なコロニーの実験で，ロジスティック的な増加が確認されている．$t \to -\infty$ で $x \to 0$ になることに注意すると，0 から 1 を滑らかにつなぐ関数で，おおよそ $t = 0$ の付近の幅 $1/a$ 程度の部分で変化を起こす．この関数は，神経ニューロンのモデルとして，機械学習の分野でたびたび用いられるだけでなく，薬剤の効果などの 2 値問題モデル曲線としてもしばしば用いられる（ロジスティック回帰）．

限られた空間内で限られた養分のもとでの，ガン腫瘍の成長のモデルとして次のゴンペルツの微分方程式が実験データをよく説明することが知られている：

$$\frac{dx}{dt} = -ax\log(bx)$$

と書ける．ここでも，簡単のため $b=1$ とした次の方程式の解を考えてみよう．

問題 34

$x(t)$ に関する微分方程式 (ゴンペルツ方程式)

$$\frac{dx}{dt} = -ax \log x$$

を，$x(0) = x_0$ の初期条件の元で解け．ただし，$a > 0$ とする．

解答

先と同様に変数分離をして，両辺積分すると，

$$\int \frac{dx}{x \log x} = -\int a dt$$

となり，$\log|\log x| = -at + C$．両辺 e の肩に 2 回乗せて，$x = e^{Ae^{-at}}$．ただし，$A = e^C$ とした．初期条件より，積分定数は $A = \log(x_0)$．よって求める解は，$x = \exp(\log(x_0)e^{-at})$．$x_0 < 1$ であれば単調増加で，$x_0 > 1$ であれば単調減少で，$t \to \infty$ で $x \to 1$．□

ゴンペルツ曲線は, ロジスティック曲線に比べて $x \to \infty$ での収束がよりゆっくりである．実際，$x = 1-\epsilon$ としたとき, ロジスティック方程式の右辺（$b = 1$ のもの），すなわち増加率は $ax(1-x) = a(1-\epsilon)\epsilon$．ゴンペルツ方程式の場合は $-ax\log x = -(1-\epsilon)\log(1-\epsilon) = a(1-\epsilon)(\epsilon - \epsilon^2/2 + \cdots) < ax(1-x)$ となり，増加率は小さくなる．

また，この方程式は $\log x = \log x_0 e^{-at}$ より，$(dx/dt)/x = -ae^{-at}$．これは，個体数の減少率が指数関数的になっていることを意味している．実際，人間の死亡率は 30 歳から 80 歳の間で、年齢の指数関数に比例することが知られており（ゴンペルツ則, Gompertz），このことからモデル化された．

参考文献：

マルサス方程式やロジスティック方程式の人口学や生態学への応用いついては，標準的な数理生物学の教科書に載っている．例えば,「マレー数理生物学入門」（J. D. Murrey 著，丸善出版，2014）．

ガン腫瘍の増殖とゴンペルツ曲線との関係については,

A. K. Laird, “Dynamics of tumor growth”, Br. J. Cancer, 18 (1964) 490-502.

J. Aroesty *et al.*, “Tumor growth and chemothrapy: Mathematical methods, computer simulations, and experimental foundation”, Math. Biosci., 17 (1973) 243-300.

などを参照されたい．

第 4 章　級数

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ の $N \to \infty$ の極限を数列 a_n の（無限）**級数**といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表記する．この極限が収束する場合，**級数は収束する**といい，収束値を**級数の和**という．級数が収束しないとき，その級数は**発散する**という．

問題 35

次の級数を求めよ．：

$$(1)\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$(2)\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

解答

(1) 公比 1/2 の無限級数の和であるから，第 n 項までの和は $S_n = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}$．よってその級数の和は $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$.

(2) この級数の和を S で表記すると，$S > 1 + \int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$ より発散する．□

級数の基本性質

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ も収束し，(ただし，c は実数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

証明

級数の部分和を $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$，$\sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$ とすれば，級数はそれぞれ $\lim_{n\to\infty} A_n$，$\lim_{n\to\infty} B_n$. よって上の性質は収束列の和とスカラー倍に関する性質と同じ．□

4.1　級数の種類と収束判定法

級数が収束するか発散するかは特に応用上も重要な問題である．例えば，テイラー級数（整級数）の収束は次の章で詳しく述べる．

もっとも性質の良い級数としては，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の a_n が全て非負，すなわち $a_n \geq 0$ を満たすもので，このときこの級数を**正項級数**と呼ぶ．

正項級数の収束

(1) 第 n 部分和 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が有界数列ならば，正項級数は収束する．

(2) 正項級数が収束すれば，その項を入れ替えた級数も収束し，その和は元の級数の和と一致する．

証明

(1) $a_n \geq 0$ なので，A_n は単調数列．単調で有界な数列は収束する（実数の連続性）より，A_n も収束する．

(2) 収束する級数 $\sum a_n$ の項の順番を変えた級数を $\sum b_n$ とし，それぞれの級数の第 n 部分和を A_n，B_n とする．$b_i = a_{k(i)}$ とかける．$k(1), k(2) \cdots k(n)$ の中で最大のものを m とすれば，

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_m = A_m \leq A.$$

より，B_n は有界なので収束し，その収束値を B とすれば，$B \leq A$．$\sum a_n$ は $\sum b_n$ の和の順番を変えたものだから，$A \leq B$．これらを合わせると，$A = B$．

□

(2) の性質は有限和では成り立って当然の性質であるが，一般の収束する級数については成り立たない場合がある．このような「無限和」でも「有限和」のように取り扱える場合には,「無限和」でも便利な性質が導かれる．そこで正項級数よりもより一般的でかつ上記の性質が成り立つ級数を考えたい．そこで重要になるのが次の**絶対収束**という概念である

数列 a_n の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の各項の絶対値をとった級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ を**絶対値級数**といい，その和が収束するとき，もとの級数は**絶対収束**（または絶対値収束）するという．また，絶対収束しない数列でも収束する級数は**条件収束**するという．例えば，$a_n = -(\frac{1}{2})^n$ の無限和は絶対収束する．

絶対収束する級数

(1) 絶対収束する級数は収束する．

(2) 絶対収束する級数の項を入れ替えた級数も収束し，その和は元の級数の和と一致する

証明

(1) 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するとする．

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \quad , \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$

とすれば，$\sum a_n^+$，$\sum a_n^-$ はともに正項級数である．$\sum a_n^+ < \sum |a_n| < \infty$，$\sum a_n^- < \sum |a_n| < \infty$ なので，$\sum a_n^+$，$\sum a_n^-$ は有界数列なので収束する．$\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ も収束する．最後の等式で上の「級数の基本性質」を用いた．

(2) 絶対値級数は正項級数なので「正項級数の性質」より明らか．□

では，絶対収束しない級数で収束するもの（条件収束）の例を考えて，上の性質のありがたみを感じてみよう．

問題 36

次の（ニュートン・）メルカトル級数を示せ：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

解答

$\log(1+x) = \int dx/(1+x)$ を使う．$u \neq -1$ のとき，等比級数の和の公式より，

$$\sum_{k=0}^{n} (-u)^k = \frac{1}{1+u} - \frac{(-u)^{n+1}}{1+u}.$$

移項して，両辺 0 から x(ただし，$0 \leq x \leq 1$) まで積分すると，

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{du}{1+u} = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-u)^k du + \int_0^x \frac{(-u)^{n+1}}{1+u} du.$$

右辺 2 項目を R_n とし，右辺の第 1 項は各項積分すると，

$$\log(1+x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + R_n.$$

ここで，R_n は $1 \leq u+1$ より，

$$|R_n| \leq \int_0^x \left| \frac{(-u)^{n+1}}{1+u} \right| du \leq \int_0^x u^{n+1} du = \frac{x^{n+2}}{n+2} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

となり，$0 \leq x \leq 1$ で（実は $-1 < x \leq 1$ まで拡張できる），$\log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$．$x=1$ を代入すれば示したい級数の和が得られる．

（別解）

まず部分和

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

を考える．これは，次のように式変形をし最後に区分求積法を用いると，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \log 2 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

となり，求めたい式を得る．□

この級数は収束しているが，絶対収束しない．もちろん正項級数でもない．ということは足し上げる順番によって級数の和が変化する可能性がある．実際に級数の和が変化することを見てみよう．$S = \log 2$ とすれば，

$$\begin{array}{llllllllllllll} S = & 1- & \frac{1}{2} & + \frac{1}{3} & - \frac{1}{4} & + \frac{1}{5} & - \frac{1}{6} & + \frac{1}{7} & - \frac{1}{8} & + \frac{1}{9} & - \frac{1}{10} \cdots \\ \frac{S}{2} = & & \frac{1}{2} & & - \frac{1}{4} & & + \frac{1}{6} & & - \frac{1}{8} & & - \frac{1}{10} \cdots \end{array}$$

となり，両辺足すと，

$$\frac{3}{2}S = 1 \quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad + \frac{7}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \quad \cdots.$$

これは，正の項を 2 つ，負の項を一つの順番で足しあげる操作に対応しており，その場合確かに収束値が異なる（3/2 倍に増える）．じつは，より一般に次の定理が成り立つことが知られている．

条件収束する級数

条件収束する級数は，足す項の順序を変えると，任意の実数に収束させたり，∞ や $-\infty$ に発散させることができる．

さて，どのような級数が収束するのであろうか．収束や発散の判断は，前期の講義積分の収束・発散の判断ととどうように，収束・発散が既知のより「大きな」級数や「小さな」と比較すればよい．

正項級数の収束判定法（比較判定法）

$\sum a_n$，$\sum b_n$ は正項級数とする．
(1) 有限個の n を除き $a_n \leq b_n$ で，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \alpha(<\infty)$ で，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．

証明

(1) $\sum a_n$，$\sum b_n$ の第 n 部分和をそれぞれ A_n，B_n とすれば，$A_n \leq B_n \leq \sum b_n < \infty$ となり，A_n は有界なので収束する．

(2) 数列 a_n/b_n は有界なので，ある正の数 M を用いると，$a_n \leq Mb_n$．$\sum Mb_n$ は収束するので，$\sum a_n$ も収束する．□

上の比較判定法を使用する際，収束・発散の基準として等比級数を用いるのが便利である．

等比級数の収束・発散

等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$．

これを先の比較判定法に応用した 2 つの収束判定法が知られている．

正項級数の収束判定法（コーシーの収束判定法）

$\sum a_n$ は正項級数とする．
(1) 有限個の n を除き $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ となる $r(<1)$ が存在すれば，$\sum a_n$ は収束する．
(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在するとき，$r<1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$r<1$ なら $\sum a_n$ は発散する．

正項級数の収束判定法（ダランベールの収束判定法）

$\sum a_n$ は正項級数とする．
(1) 有限個の n を除き $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ となる $r(<1)$ が存在すれば，$\sum a_n$ は収束する．
(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在するとき，$r<1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$r<1$ なら $\sum a_n$ は発散する．

ここで，練習問題として上の 2 つの収束判定法を用いて，次の級数の収束・発散の判定をしてみよう．

問題 37

次の級数の収束・発散を判定せよ．

$$(1) \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad (2) \sum \frac{a^n}{n!}, \quad (3) \sum \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

解答

問題の級数を $\sum a_n$ と表す．(1) コーシーの判定法を用いる．$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 1/e(<1)$，$(n\to\infty)$ より，級数は収束する．

(2) ダランベールの判定法を用いる．$a_{n+1}/a_n = a/(n+1) \to 0(<1)$，$(n\to\infty)$ より，級数は収束する．これは e^x や $\sin x$ などのテイラー級数が収束することを示す際に非常に便利である．

(3) ダランベールの判定法を用いる．$a_{n+1}/a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e(>1)$，$(n\to\infty)$ より，級数は発散する．

□

4.2 整級数

この節では**整級数**と呼ばれる，扱いやすい級数に注目して話を進める．整級数とは，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

で表される級数のことで，等比級数やテイラー級数がこれに対応する．特に，前期取り扱った関数のテイラー展開が収束する条件（収束半径）や，収束するときに存在するテイラー級数が項別に微分や積分の操作ができること（項別微分・項別積分）などをみる．まずは，次の収束半径という概念を導入しよう．

収束半径

整級数 $\sum a_n x^n$ に対して，

$$r = \sup\{|u| | \sum a_n u^n \text{は収束する}\}$$

を**収束半径**といい $(0 \le r \le \infty)$，

$$|x| < r \text{ なら絶対収束し}, |x| > r \text{ なら発散する}$$

実際には，前節で扱った収束判定法を用いることで，収束半径を求めることができる．

収束半径の求め方

整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径 r は次のように計算できる．

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ が存在すれば，$r = 1/\alpha$.

(2) $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \alpha$ が存在すれば，$r = 1/\alpha$.

(1)，(2) はそれぞれコーシーの収束判定法，ダランベールの収束判定法からの帰結である．

問題 38

次の整級数の収束半径を求めよ．

$$(1) \sum nx^n \ , \quad (2) \sum (1/2^n) x^{2n} \ , \quad (3) \sum (n^n/n!) x^n$$

解答

(1) $a_{n+1}/a_n \to 1 (n \to \infty)$ なので，$r = 1$.

(2) まず，$x^2 = y$ とおく．すると，$\sum (1/2^n) y^n$．この整級数に対して収束半径を求めると，$a_{n+1}/a_n = (1/2^{n+1})/(1/2^n) = 1/2$ より，収束半径は 2．そのとき，$|x| < \sqrt{2}$ であれば収束し，そうでなければ発散するので，求める整級数の収束半径は $\sqrt{2}$.

(3) $a_{n+1}/a_n = (n+1)^{n+1}/n^n(n+1) = (1+1/n)^n \to e$．よって求める収束半径は $1/e$．□

整級数 $\sum a_n x^n$ は収束半径内 $|x| < r$ で収束するので，この区間で定義された関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と見ることができる．実はあとでみるように，関数の整級数への展開は一意であるから，テイラー級数の収束半径内では関数を整級数で表現可能であることに他ならない．

さて，ここではまず整級数で定義された関数が収束範囲内で連続であり，微分・積分が項別にできることをみる．これによって微分・積分の計算ができる関数の種類がずっと増えることになる．

整級数で定義された関数の連続性

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は，区間 $(-r, r)$ で連続である．

整級数の項別積分

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束半径内で項別積分可能．すなわち，

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x|<r).$$

証明

連続な関数であるから閉区間内で積分可能である．項別積分ができることは $\int_0^x f(t)dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ が $N\to\infty$ でゼロに収束することを示せばよい．

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} dt\right| &\le \int_0^x \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right| dt = \int_0^x \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n \right| dt \\ &\le \int_0^x \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n t^n| dt = |x| \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n|\end{aligned}$$

今，収束半径内で級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ は絶対収束するので $N\to\infty$ で右辺はゼロに収束する．□

整級数の項別微分

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は 収束半径内で無限回微分可能．さらに，項別微分可能で，

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x|<r).$$

証明

まず，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径を調べよう．$0<u<r$ を満たす u に対して $|x|<x_0<r$ を考えると，$\sum a_n x_0^n$ は収束半径内なので絶対収束する．

$$\left|\frac{n a_n x^{n-1}}{a_n x_0^n}\right| = \frac{n}{x_0} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{n-1} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

比較判定法より，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ も絶対収束し，収束半径は r である．この収束値を $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ と書けば，これは連続で項別積分可能：

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

微分積分学の基本定理より，$f'(x)=g(x)$．□

ここまで，整級数の性質について述べてきた．前期で学んだテイラー展開との関連を踏まえてもう一度ここでまとめておこう．

関数 $f(x)$ が $|x-a|<r$ で収束する級数の和で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (|x-a|<r)$$

と書き表されるとき，$f(x)$ は $x=a$ で整級数展開可能，あるいは**解析的**という．また，右辺を $x=a$ での整級数展開，あるいは**テイラー展開**という．特に $a=0$ のとき，**マクローリン展開**という．

収束半径内で項別微分可能であるから，両辺 k 回微分すれば，

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

よって，$f^{(k)}(0) = a_k k!$．つまり，整級数があれば，その係数は $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ であり，係数は一意に定まる．これはテイラー級数に他ならない．前期で学んだテイラー級数をおさらいしておこう．

重要なテイラー級数

次の関数に対する $x = 0$ でのテイラー級数は $(-\infty, \infty)$ で絶対収束する：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

次の関数に対する．$x = 0$ でのテイラー級数は $(-1, 1)$ で絶対収束する：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} {}_\alpha C_n x^n, \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

ただし，α は実数であり，${}_\alpha C_n = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ で定義される．

問題 39

次の関数の整級数展開（マクローリン展開）を求めよ．

$$(1)\mathrm{Tan}^{-1} x \ , \quad (2)\frac{1}{x^2+2x-3} \ , \quad (3)\frac{1}{(1+x)^2}$$

解答

(1) $\mathrm{Tan}^{-1} x$ のテイラー展開を考える．$d\mathrm{Tan}^{-1} x/dx = 1/(1+x^2)$ より，まず

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

が収束半径 $r = 1$ で成り立つ．収束半径内では項別積分可能であり，両辺 0 から $x(< 1)$ まで積分すると，

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

を得る．

(2) 変形すると，

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}}\right)$$

である．$|x| < 1/3$ で展開が可能で，

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-x}{3}\right)^n\right) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n$$

(3) 求める関数の原始関数を考えると，$d/dx(-1/(1+x)) = 1/(1+x)^2$ であるから，まず

$$\frac{-1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$$

を考える（収束半径は 1）．両辺微分すると，収束半径内で項別微分可能で

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

を得る．□

問題 40

次のライプニッツ級数（ライプニッツの公式）を示せ．

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

解答

$\mathrm{Tan}^{-1}x$ のテイラー展開

$$\mathrm{Tan}^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

を考える．ここで，$x=1$ が代入できれば，$\mathrm{Tan}^{-1}1=\pi/4$ なので，求めるライプニッツの公式が得られるが，$x=1$ は収束半円上で収束するかどうかがわからない．しかし，次のアーベルの定理によって収束することがわかる．□

アーベルの連続性定理

整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を r とする．その内側にある $x\quad(|x|<r)$ に対して，$f(x)=\sum a_n x^n$ とおく．もし，$x=r$ で級数 $\sum a_n x^n$ が収束しているのであれば，$f(x)$ は $x=r$ で左から連続．すなわち $\lim_{x\to r}f(x)=f(r)=\sum a_n r^n$．

前述のメルカトル級数も $\log(1+x)$ のテイラー級数，

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

に，ここでもアーベルの定理を使えば，$x=1$ を代入することで得られる．

問題 40 のライプニッツ級数は円周率 π の無限級数展開を表しており，円周率を無限の精度で近似できる．実際には収束の速度は遅く，全く実用的ではない．この公式を発見したライプニッツはこの公式に驚き，π が有理数ではないかと疑ったらしい．実際には π は無理数であり，その証明については前期にすこし触れた．

π の無限級数展開として，最も驚くべき公式の一つがインドの天才数学者ラマヌジャンによって発見された次の式であろう：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}.$$

伝説的なラマヌジャンの生涯に関する伝記映画が 2016 年に公開された「The man who know infinity（邦題：奇跡がくれた数式)」（著者はまだ見ていません）．

4.3 関数列と一様収束

整級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ は，数列 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$ の $n\to\infty$ の極限としてみることができる．$f_n(x)$ は x の関数でもあるから，これは関数の数列（**関数列**）である．整級数の節で見た項別微分や項別積分は，以外の一般の関数列に関しては極限と微分・積分の操作の入れ替えが可能かどうか，という問題に対応する．実際，整級数の項別微分において

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

この 2 つが一致することと，極限と微分・積分の操作の入れ替えが可能が同じであることがわかる．

この節では，一般の関数列の項別微積分に関して，証明無しにその結果をいくつか紹介したいと思う．そのために重要となってくる概念が，次の関数列の**一様収束性**である．

各点収束と一様収束

関数列 $f_n(x)$ が各 x を固定したとき，$n \to \infty$ で $f(x)$ に収束するとき $f_n(x)$ は $f(x)$ に**各点収束**（単純収束）するという．さらに，

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f(x) - f_n(x)| = 0$$

のとき，$f_n(x)$ は $f(x)$ に**一様収束**するという．

問題 41

次の関数列は一様収束するか．

$$(1)\ \frac{nx}{1+n^2x^2}\ (-\infty < x < \infty),\quad (2)\ x^n e^{-nx}\ (0 < x < 1)\ ,\quad (3)\ \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\ (0 < x < \infty)$$

解答

(1) x を固定すると，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$．一方，$f_n(x)$ は $x = 1/n$ で最大値 $1/2$ をとる．$\sup |f_n(x)| = 1/2$ でこれは $n \to \infty$ でゼロにならない．すなわち，一様収束しない．

(2) x を固定すると，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$．一方，$f_n(x)$ は $x = 1$ で最大値 e^{-n} をとる．よって，$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ となり，一様収束する．

(3) x を固定すると，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$．一方，$f_n(x)$ は単調増加で $\sup |f_n(x)| = \infty$．よって，一様収束しない．

□

一様収束する関数列に関して，次の性質が成り立つ．

一様収束に関する性質

(1)（連続性） 区間 I 上の関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するとき，$f_n(x)$ が連続なら，$f(x)$ も連続．

(2) （極限と積分の交換）区間 $[a, b]$ 上で連続な関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

(3) （極限と微分の交換）区間 $[a, b]$ 上で滑らかな関数列 $f_n(x)$ が各点収束し，その微分 $f'_n(x)$ が一様収束するならば，

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

関数列として $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ とすれば，これは整級数の一般化になっていて**関数項級数**と呼ばれる．そのとき，項別微分，項別積分について上と同様の性質が成り立つ．

一様収束に関する性質

(1) （項別積分）区間 $[a,b]$ 上で連続関数の級数 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_n(x)$ が一様収束するとき，

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

(2) （項別微分）区間 $[a,b]$ 上で滑らかな関数の級数 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_n(x)$ が各点収束し，その微分 $f_n'(x)$ が一様収束するならば，

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}a_n(x)$$

特に，$f(x)$ が整級数の場合，収束半径内で $f_n(x)$ は $f(x)$ で一様収束するので，これらの性質は，前節の整級数に関する性質をすべて含んでいる．

第 5 章　多変数の微分

これまで，一変数関数 $y = f(x)$ の微分積分について学んできた．この章からは，変数が 2 つ以上の多変数関数に関する微分積分に話をすすめる．実際的に高校数学で扱わない内容であり，実用上の観点からも教養課程の微分積分学の中で，最も「学びがい」があるであろう．

変数の数が増えたところで，2 変数以上は本質的には変わらないので，必要でなければ 2 変数関数に限って議論を行い，1 変数と 2 変数での違いに注目しよう．3 変数以上への拡張には素直に行うことができる場合が多い．

まず，2 変数関数 $z = f(x, y)$ を考えてみよう．実際の応用の場面では，どのような状況が対応するであろうか．(x, y) が座標平面の位置を表すとすれば，z はその位置での「高さ」を意味し，この関数は 3 次元空間内の曲面になる．実際に，地図における標高や，天気図での気圧，写真の輝度などはいずれもこの 2 変数関数に対応する．

変数を増やしてみよう．例えば $c = f(x, y, z)$ は 3 変数関数で x, y, z を空間の座標だと思えば，空間内の温度や物質の濃度などを表す関数に対応する．同じ 3 変数でも $c = f(x, y, t)$ と書いて，x, y を平面座標，t を時間だと思えば，ある位置での値の時間的な変化を表す関数とみなすこともできる．

これらは，いずれも物理量の値などを表しているが，変数はもっと抽象的なものを表していても良い．例として，統計学で重要な問題を考えてみよう．今，実験での入力値と観測値に対応する 2 つの変数 x, y に対して，n 組のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ が得られたとしよう．このデータを $y = ax + b$ の直線にあてはめること（回帰分析）を考えてみる．この直線を求める手法として，最もよく用いられる最小自乗法は観測値と直線による値の自乗誤差 e（誤差分散）が最小になるように a，b を定める手法であり，2 変数関数

$$e(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

の最小値を調べる問題に他ならない．あてはめる関数に n 次の多項式 $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ を採用した場合は，自乗誤差 e は $a_0, a_1, \cdots, a_n$ の $n + 1$ 個の変数の関数になる．

前期の 1 変数の微分積分学と線形代数の知識の上に，多変数の微分積分学は成り立っている．講義では特に 2 変数関数を取り上げることが多い．2 行 2 列の行列の内容が必要な場合は，各自復習することが必要である．

5.1　多変数関数

この節では，1 変数関数の微積分を多変数関数に拡張する上で必要となる数学の「言葉」を学ぶことにしよう．

まず，平面座標 (x, y) や空間座標 (x, y, z) の素朴な拡張として，n 次元空間の座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ を考えよう．それぞれの座標が実数のとき，集合

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}\}$$

を考えよう．2 点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の**距離** d はピタゴラスの定理の拡張で，

$$d = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

となる．$\boldsymbol{R}^n$ を普通 n **次元（ユークリッド）空間**という．また n 次元実ベクトル空間でもある．$\boldsymbol{R}^2$ は座標平面，$\boldsymbol{R}^3$ は普通の座標空間である．それゆえ，多変数関数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 A を定義域とする写像，

$$f : A \to \boldsymbol{R}$$

である．

1 変数関数の場合，定義域として区間を考えることが多かった．そこで，区間を多変数関数に拡張してみよう．まず，素朴に開区間 $D_\epsilon(p) = \{x \mid |x - p| < \epsilon\}$ を多変数に拡張すると，中心が $\boldsymbol{p}$ で半径（$\boldsymbol{p}$ からの距離）が ϵ の円（2 次元）または球 (3 次元) の（端を含まない）内部に対応する．この集合 $D_\epsilon(\boldsymbol{p})$ の"軌跡"として次の**開集合**が定義される．

開集合

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 D が**開集合**であるとは，D の任意の点 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ に対して，$D_\epsilon(\boldsymbol{p}) \subset D$ となる ϵ が存在することをいう．

このままでは,「ひとまとまりの」部分集合である区間の性質がない．そこで，**連結**という概念を定義する．

連結・領域

集合 D が連結であるとは，D に含まれる任意の 2 点が折れ線で結ばれることをいう．特に，D が $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合のとき，D は**領域**という．これは区間の拡張に対応している．

領域 D が開集合であるとき，D を**開領域**という．これは開区間の拡張になっている．これに対応して，閉集合や閉領域もある．閉集合は，開集合の補集合と定義できる．それゆえ，領域 D が閉集合であれば，D は**閉領域**という．

さて，ここからは上のような領域を定義域とする多変数関数を取り扱う．特に，関数の微分や積分を考える場合には，関数の連続性やそれを調べるための関数の極限の定義を押さえておく必要がある．

1 変数の場合の極限は右か左かの 2 通りであったが，多変数関数ではこの極限の「向き」が無数になる．例えば 2 変数の場合 $(x, y) \to (0.0)$ は (x, y) 平面上のありとあらゆる向きからの極限が考えられる．関数の極限が定まるのは，これらの無数の方向からの極限が一致するときである．例えば 2 変数の場合，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c$$

のように書く．

問題 42

次の関数の極限を調べよ．

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

解答

(1) $y = 0$（つまり x 軸）からの極限と $x = 0$（つまり y 軸）の極限が異なっている．実際，$y = 0$ から近づけた場合は，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$x=0$ から近づけた場合は，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-y^2}{y^2}=0.$$

このため，問題の関数の極限は定まらない．

(2) (1) と同様に $y=0$ から近づけた場合，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3+x^2}{x^2}=1$$

$x=0$ から近づけた場合，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-y^3+y^2}{y^2}=1$$

ともに極限は 1 である．もし極限が存在するのであれば 1 でなければならない．

あとは，いずれの方向からの極限も 1 であることを示せば良い．

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^3-y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right| &= \left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{2x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\end{aligned}$$

極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いると

$$=\left|\frac{2r^3\cos^3\theta}{r^2}\right|+\left|\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}\right|\leq 2r+r\to 0\quad(r\to 0).$$

となり，どの方向から近づいても極値が 1 になることがわかった．□

関数が連続であるとは，極値とそこでの値が一致すること，すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．1 変数の場合と同様に，連続関数の組み合わせ作られた関数も連続である．

多変数の連続関数の性質

$f(x,y)$，$g(x,y)$ が点 (a,b) で連続であれば，cf，$f\pm g$，fg，f/g（ただし，$g(a,b)\neq 0$）も点 (a,b) で連続．

開領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ が連続であるとは，D のすべての点で連続であることをいう．

問題 43

次の関数が全平面で連続かどうか調べよ．

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-3x^2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解答

まず，$(x,y)\neq(0,0)$ 分母はゼロにならず，また関数は多項式の和と積で作られているので連続．$(0,0)$ での極限がゼロであるかどうかを調べれば良い．極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いると，

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^4-3x^2y^2}{2x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4-3x^2y^2}{x^2+y^2}\right| &\leq \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \\ &= r^2|\cos^2\theta|+3r^2|\cos^2\theta\sin^2\theta|\leq 4r^2\to 0\quad(r\to 0)\end{aligned}$$

となり，極値は 0 である．$f(0,0)=0$ より，$(x,y)=(0,0)$ でも連続．よって全平面で連続である．□

多変数関数において，ある変数に注目し残りの変数を定数と思って関数を微分することを，**偏微分** (partial derivative) と呼ぶ．$z=f(x,y)$ について $y=b$ で得られる $x=a$ での f の偏微分係数は

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

である．この極限が存在するとき $(x,y)=(a.b)$ で f は z について偏微分可能という．偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad や \quad f_x(a,b)$$

などと書く．∂ の読み方は人によって異なるが,「ディー」「デル」「ラウンド」などと呼ばれることが多い．y についての偏微分係数も同様である．これは $y=b$ での切り口（xz 平面）で見た図形に対しての x 方向への傾きを表している．(a,b) が変数だとみなした場合，**偏導関数**といい，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\quad f_x(x,y)\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad z_x(x,y)$$

などと書く．y についての偏導関数も同様である．

問題 44

次の偏導関数をすべて求めよ．

$$(1)\ \ z=f(x,y)=x^2y^5-2x^3y^2+y \qquad (2)\ \ w=f(x,y,z)=\sin(x^2+xy+z)$$

解答

(1) $f_x=2xy^5-6x^2y$，$f_y=5x^2y^4-4x^3y+1$.

(2) $f_x=(2x+y)\cos(x^2+xy+z)$，$f_y=x\cos(x^2+xy+z)$．$f_z=\cos(x^2+xy+z)$ □

当然，偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して恒等的に $f_x=0$ であれば f は y のみの関数であり，その逆も成り立つ．同様に，恒等的に $f_y=0$ であれば f は x のみの関数であり，その逆も成り立つ．

5.2　全微分と合成関数の微分

全微分可能

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは，$(x,y)\to(a,b)$ のとき，

$$f(x,y)-f(a,b)=m(x-a)+n(y-a)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$$

あるいは，$x=a+h$，$y=b+k$ とおくと

$$f(x,y)-f(a,b)=mh+nk+o(\sqrt{h^2+k^2})$$

となる m，n が存在することである．また，そのとき

$$m=f_x(a,b)\ \ ,\ n=f_y(a,b).$$

このことは，2 変数の（全）微分は関数が局所的に平面で近似できることを意味している．1 変数の微分では，微分可能性は関数が局所的に 1 次関数で近似できることを表していたことを思い出すと，多変数への拡張になっていることがわかる．n 次多変数関数への拡張も同様である．

一般にこの定義は確かめることが面倒であることが多い．実用的には，次の定理が便利である．

全微分可能性と連続性

$f(x,y)$ が点 (a,b) を含む開領域で，x,y について偏微分可能であり，f_x，f_y が点 (a,b) で連続なら $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能．逆に f が (a,b) で全微分可能ならば，(a,b) で連続．

さて，ここまで多変数関数の微分に関する一般的な性質を述べてきた．実際の偏微分については前の節で扱ったったように，1 変数の場合と本質的な違いはない．大きな違いが出てくるのは，以下に述べる合成関数の微分公式である．

合成関数の微分（パラメータによる微分）

関数 $z=f(x,y)$ が開領域 D で全微分可能のとき，関数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ が t の区間 I で微分可能であれば，合成関数 $z=f(x(t)),y(t))$ の t による微分は，

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

パラメータを t を微小変化させることで，t の関数である x，y の両方が微小変化する．それゆえ，z の変化は x 方向の変化と y 方向の変化の和になる．

問題 45

次の関数 $z=f(x(t),y(t))$ に対して，dz/dt を t の関数として求めよ．

(1) $z=xy^2-x^2y$, $x=t^2$, $y=e^t$ (2) $z=\mathrm{Tan}^{-1}xy$, $x=e^t+e^{-t}$ $,y=e^{2t}$

解答

(1)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(y^2-2xy)2t+(2xy-x^2)e^t=2e^{2t}(t^2+t)-e^t(t^4+4t^3)$$

.

(2)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{y}{1+x^2y^2}(e^t-e^{-t})+\frac{x}{1+x^2y^2}2e^{2t}\\&=\frac{e^{3t}-e^t+2e^{3t}+2e^t}{1+e^{2t}+2e^{4t}+e^{6t}}=\frac{3e^{3t}+e^t}{1+e^{2t}+2e^{4t}+e^{6t}}\end{aligned}$$

□

次に，x，y が別の 2 変数の組の関数 (u,v) として与えられている状況で，関数を u や v で偏微分する場合を考える．この場合の微分の公式は**連鎖律**（あるいはチェインルール）と呼ばれ，いろんな変数変換の場面で現れる．

合成関数の微分（連鎖律）

関数 $z=f(x,y)$ が開領域 D で全微分可能のとき，関数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ が微分可能であれば，合成関数 $z=f(x(u,v),y(u,v))$ の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

この公式はどの変数が何の関数だと考えて，どの変数で微分しているのかを確認しながら行う必要がある．いくつか練習をしてみよう．

問題 46

次の関数 $z=f(x(u,v),y(u,v))$ に対して，$\partial z/\partial u$ と $\partial z/\partial v$ を求めよ．ただし，(2) では $\partial z/\partial r$ と $\partial z/\partial\theta$．(3) では $\partial z/\partial x$ と $\partial z/\partial y$ を求めよ．

(1) $z=2xy$, $x=u+v$, $y=u-v$

(2) $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

(3) $z=f(r,\theta)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

解答

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2y+2x=2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=2y-2x=2v$$

(2) いわゆる極座標表示である．

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

ここで、$\partial r/\partial x$ は r を x,y の関数としたときの偏微分を考えているので，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ より，$\partial r/\partial x=x/\sqrt{x^2+y^2}=x/r$．同様に，$\partial\theta/\partial x$ も計算する．注意しないといけないのは，$\partial\theta/\partial x=1/(\partial x/\partial\theta)$ ではないことである．右辺は $1/(\partial x/\partial\theta)=1/\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}/y$ であるが，正しい計算は θ を $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$ と (x,y) の関数と見て偏微分して得られる．

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

よって，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{y}{x^2+y^2}$$

同様に，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

ここで，

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

を使った，□

この連鎖律の公式を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

となっている．右辺の行列をヤコビ行列という．今正方行列なのでその行列式が定まり，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

などと書いて，ヤコビ行列式（あるいは**ヤコビアン**）という．

より一般の，n 変数の変数変換の場合，$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ に対して，$x_i = x_i(X_1, X_2, \cdots X_m)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (j = 1, 2, \cdots m)$$

であり，ヤコビ行列は (i, j) 成分が $\partial x_i/\partial X_j$ の行列である．

ヤコビアンは多変数の変数変換による面積要素（体積要素）の比率を表すものである．多変数の積分の章で詳しく紹介する．ここでは，一つの応用例として，極座標変換の結果（問題 46(3)) をヤコビ行列で計算してみよう．連鎖律は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．ヤコビ行列の逆行列

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を右から乗じると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

となり，問題 46(3) の結果を得る．

1 変数の微分係数を用いて曲線の接線が求まったように，2 変数関数の場合はその微分係数を用いて接平面を記述できる．局面上のある点での接平面とは，その点を通る平面で，その点の近くで，その点以外の局面との交点を持たないものをいう．

接平面

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるとき，曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ で S の接平面が存在し，

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

5.3 多変数のテイラーの定理と極値問題

この章では，1 変数関数で学んだテイラー展開の多変数関数への拡張を行うとともに，多変数関数の微分法の応用として極値問題を取り扱う．

まず，1 変数関数の場合と同様に，高次の偏導関数を導入しよう．関数 $z = f(x, y)$ について，2 階の (2 次の) 偏導関数は 4 種類ある．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

これらは，f_{xx}，f_{yx}，f_{yx}，f_{yy} などと書くこともある．f_{yx} は x で偏微分した後に，y で偏微分する，という意味であり，f_{xy} とは微分する変数の順番が異なることに注意（教科書では f_{xy} は先に x で微分する場合に用いているが，それは記号の問題であり分かっていればどちらを用いても良い）．

問題 47

次の関数 $f(x, y) = x^2y^3$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ．

解答

$f_x = 2xy^3$ より，$f_{xx} = 2y^3$，$f_{yx} = 6xy^2$．$f_y = 3x^2y^2$ より，$f_{xy} = 6xy^2$，$f_{yy} = 6x^2y$．□

f_{xy} と f_{yx} は偏微分の順番が異なり，一般にその値は異なるが，応用上は同じになることがほとんどである．それは次の定理による．

偏微分の順序交換

f_{xy} と f_{yx} が連続ならば，この 2 つは等しい：$f_{xy} = f_{yx}$

2 階の偏導関数をさらに偏微分を施すことによって高階の偏導関数が得られる．例えば，$f_{xyx} = \partial^3 f/\partial x\partial y\partial x$．そこで，1 変数関数の場合と同じように，$C^n$ **級関数**を n 回偏微分でき，すべての導関数が連続である関数と定める．このとき，上の定理より，偏微分の順番によらず値が定まる．つまり，何回 x と y でそれぞれ偏微分したか，という情報だけで十分である．任意の n で C^n 級関数であれば，C^∞ **級関数**と呼ぶ．応用上はだいたいが C^∞ 級関数であるから，偏微分の順番はあまり気にする必要がない．例えば，

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y\partial y\partial x\partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}$$

であり，一般には n 階偏導関数は

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$$

の形でかける．

さて，ここまでの準備のもとで，多変数関数にテイラーの定理を拡張しよう．基本的には 1 変数のときと変わりない．証明は 1 変数のテイラーの公式からすぐに得られるが，ここでは結果を紹介するだけにしておく．

2 変数のテイラーの定理

$f(x,y)$ が開領域 D で C^{n+1} 級関数のとき，点 (a,b) のまわりで，

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

となる $0<\theta<1$ が存在する．

$(a,b) = (0,0)$ のとき，マクローリンの定理という．剰余項は $o(h^n,k^n)$ である．また，$h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ は**偏微分作用素**と呼ばれる，偏微分の操作をひとかたまりにしたもので，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

で定義される．今 C^{n+1} 級なので，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x,y) = \sum_{i=1}^{j} {}_jC_i h^i k^{j-i}\frac{\partial f^j}{\partial x^i\partial y^{j-i}} f(x,y)$$

例えば，$n=2$ のとき，

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2 f_{yy}(a,b)\right)+o(h^2,k^2)$$

偏微分作用素をそのまま一般の多変数に拡張することで，3 変数以上への定理の拡張も容易である．また，点 (a,b) のまわりで，と書いたが，実際には (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分上の点が D に含まれている状況で成り立つ．

例として $f(x,y)=e^{x+2y}$ のマクローリンの定理を $n=1$ に適用すると，

$$e^{h+2k}=1+h+2k+\frac{1}{2}(h^2+4hk+4k^2)e^{\theta h+2\theta k}$$

が得られる．

上のテイラーの定理から，十分滑らかな曲面 $z=f(x,y)$ は点 (a,b) のまわりで，

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)\\&+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2kf_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+k^2f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)\end{aligned}$$

と近似できることがわかる．$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ の場合を除いて，十分近くでは平面で近似できるので，その点で極値を取ることはない，逆に次のことが言える．

極値をもつ必要条件

$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を持つなら，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

そのとき，

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-a & y-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}$$

で表せることがわかる．

$$H=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

は**ヘッセ行列**と呼ばれる行列で，$X=(x-a,y-b)^T$ と書けば，この式は

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}X^THX$$

の形（**2 次形式**）で書ける．このとき，H が対称行列になっていることを使えば，線形代数の知識より，平方完成可能であることがわかる．

対称行列の対角化と 2 次形式の平方完成

n 次対称行列 H は直交行列 P を用いて対角化可能．H の固有値 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ はすべて実数で，固有関数が直交基底をなす．そのため，一般に 2 次形式は

$$X^THX=\lambda_1\tilde{x}_1^2+\lambda_2\tilde{x}_2^2+\cdots\lambda_n\tilde{x}_n^2$$

のように平方完成できる．

これから，極値の候補点付近での近似された曲面の様子がわかり，その点が極値かどうかがヘッセ行列の固有値の符号に判断できる．一般には，

ヘッセ行列と極大・極小

ヘッセ行列の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ がすべて正のとき，その点は極小値．また，固有値がすべて負のとき，その点は極大値．正の固有値も負の固有値もある場合，その点は極値にならない（**鞍点**という）．それ以外で，固有値にゼロが含まれる場合，この方法では極値の判断ができない．

ヘッセ行列 H の固有値は λ は $\det(\lambda E - H) = 0$ の解であるから，今考えている $n = 2$ のときは $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(H)\lambda + \det(H) = 0$ を満たす．2 つの固有値 λ_1，λ_2 の積 $\lambda_1\lambda_2 = \det(H) = |H|$ より，極大・極小の判断は H の行列式（**ヘッセ行列式，ヘッシアン**）を用いて，次のようにまとめられる．

ヘッセ行列と極大・極小

2 変数関数 $f(x, y)$ の極値問題において，$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす (a, b) でのヘッシアン $|H|$ が，

(i) $|H| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ のとき，　点 (a, b) で $f(x, y)$ は極小値

(ii) $|H| > 0$ かつ $f_{xx} < 0$ のとき，　点 (a, b) で $f(x, y)$ は極大値

(iii) $|H| < 0$ のとき，　点 (a, b) で $f(x, y)$ は極値をとらない（鞍点）

(iv) $|H| = 0$ のとき，　この方法では極値の判断ができない．

以上を踏まえて，多変数関数の極値問題を解いてみよう．

問題 48

次の関数の極値をすべて求めよ．

$$(1)\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad (2)\ f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

解答

(1) $f_x = 3x^2 - 3y = 0$，$f_y = 3y^2 - 3x = 0$ の解は $(0, 0), (1, 1)$ の 2 つである．$f_{xx} = 6x$，$f_{xy} = f_{yx} = -3$，$f_{yy} = 6y$ より，ヘッシアンは $|H| = 36xy - 9$．極値を持つ可能性があるのは，$(1, 1)$ のときで，$f_{xx} > 0$ より，極小値-1 をとる．

(2) $f_x = 6x^2 + 10x + y^2 = 0$，$f_y = 2(x + 1)y = 0$ の解は，$(0, 0), (-5/3, 0), (-1, 2)$ の 3 つ．$f_{xx} = 12x + 10$，$f_{xy} = f_{yx} = 2y$，$f_{yy} = 2(x + 1)$ より，まず，$(0, 0)$ でのヘッセ行列は，

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

より，$|H| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ より，極小値をとる．$(-5/3, 0)$ でのヘッセ行列は，

$$H = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

より，$|H| > 0$ かつ $f_{xx} < 0$ より，極大値をとる．最後に，$(-1, 2)$ でのヘッセ行列は，

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

は $|H| < 0$ なので鞍点になっていて，極値でない．以上より，$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極小値 0，$(-5/3, 0)$ で極大値 125/27．□

次の場合には，ヘッセ行列では簡単に極値の判断ができない例である．工夫をして判断してみよう．

問題 49

次の関数の極値をすべて求めよ．

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$$

解答

$f_x = 2x - 2y - 4x^3 = 0$，$f_y = -2x + 2y - 4y^3 = 0$ となる (x, y) を探そう．2 式を足し合わせることで，まず $x = -y$ がわかる．これを代入することで，$(x, y) = (1, -1), (-1, 1), (0, 0)$ の 3 つが解であることがわかる．

$f_{xx} = 2 - 12x^2$，$f_{xy} = f_{yx} = -2$，$f_{yy} = 2 - 12y^2$ より，ヘッシアンは $|H| = 4\left[(1 - 6x^2)(1 - 6y^2) - 1\right]$．$(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$ のとき，$|H| = 96 > 0$ かつ $f_{xx} = -10 < 0$ より，この 2 点で極小値 $f(1, -1) = f(-1, 1) = 2$ をとる．

$(x, y) = (0, 0)$ では，$|H| = 0$ となり，この方法では極大・極小が判断できない．しかし，$x = y$ とすると，$f = -2x^4 < 0$．一方 $x = -y$ とすると，$f = 4x^2 - 2x^4$ となり，$x = y = 0$ の近くで，$f < 0$ となるから，極値はとらない．

以上より，極値は 2 点であり，$(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$ のとき，極小値 $f(1, -1) = f(-1, 1) = 2$ をとる．□

5.4 陰関数定理とラグランジュの未定乗数法

x, y の関係を表す式 $y = \varphi(x)$ と違い，$f(x, y) = 0$ の形で表すこともある．前者を陽的な関数と呼ぶのに対して，後者は陰的な関数（あるいは**陰関数**）という．しかし，$f(x, y) = 0$ の形からいつでも，$y = \varphi(x)$ の形に書き直すことができるか訳ではない．

例えば，$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を考えてみよう．これは原点中心の半径 1 の円を表すから，$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ となるが，y の値によって符号を決める必要がある．また，$(\pm 1, 0)$ では微分が不可能になることはすぐにわかるであろう．そこで，陰的な関係式から陰関数 $y = \varphi(x)$ が解ける十分条件を与える次の定理を理解しよう．

陰関数定理

$f(x, y)$ が C^1 級の関数で，$f(a, b) = 0$，$f_y(a, b) \neq 0$ を満たす (a, b) を含む近くの領域（近傍）で，

(1) $f(x, y) = 0$ かつ $y = \varphi(x)$ で $\varphi(a) = b$ を満たす陰関数 $\varphi(x)$ が存在する．
(2) さらに，$y = \varphi(x)$ は微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

先の $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ に当てはめると，$f_y = 0$ となる $(\pm 1, 0)$ を除けば，その点の近くで逆関数が決まり（すなわち関係が一意に定まる），しかも微分可能である．実は，f が C^r 級なら φ も C^r 級であり，関数の滑らかさの性質も引き継ぐことに注意したい．

また，$f(x, y) = 0$ は $z = f(x, y)$ の等高線を表していることから，等高線が $y = \varphi(x)$ の形で書けることに対応する．滑らかな等高線が書けるのならば，等高線に沿ったパラメータ表示 $f(x(t), y(t))$ を考えれば，t による微分が，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

となることより，$f_y \neq 0$ を使って，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{f_x}{f_y}$$

となることが納得できるであろう．

問題 50

$x^3 + xy^2 - 2 = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ に対して，y' と y'' を x と y を使って表せ．

解答

$f_x = 3x^2 + y^2$，$f_y = 2xy$ より，$f_y \neq 0$ で陰関数は存在し，$dy/dx = -f_x/f_y = -(3x^2+y^2)/2xy$. あるいは，高校数学で学んだように， $x^3 + xy^2 - 2 = 0$ の両辺を x で微分して，$3x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$ から，$y' = -(3x^2+y^2)/2xy$．もう一度 x で微分すれば，

$$y'' = -\frac{-(2y+2xy')(3x^2+y^2) - (6x+2yy')(2xy)}{(2xy)^2} = -3\frac{3x^4+2x^2y^2-y^4}{4x^2y^3}. \square$$

陰関数定理は，分かってしまうと別になんか新しいことを言っているわけではないような気がしてくる．実際に，陰関数定理の応用としては，(1) の存在性を定理の証明などに用いることが多いように思う．そこで，制限条件付きの極値問題を解くためのラグランジュの未定乗数法の証明を通して，陰関数定理がどのように使われるのかを見てみよう．

ラグランジュの未定乗数

$g(x,y) = 0$ の条件下で，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をもつならば，

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

に対して，$g_x = g_y = 0$（**特異点**）でなければ，

$$F_x(a,b,\alpha) = F_y(a,b,\alpha) = F_\lambda(a,b,\lambda) = 0$$

を満たす α が存在する．

あるいは同じことだが，$f(x,y)$ の極値の候補は，$g_x = g_y = 0$，もしくは

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

を満たす点に限られる．

証明

条件より，$g_x(a,b) \neq 0$ または，$g_y(a,b) \neq 0$．一般性を失わず $g_y(a,b) \neq 0$ としてよい．このとき，陰関数定理より (a,b) の近くで $g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ と書ける．$f(x,\varphi(x))$ は $x = a$ で極値になっている：

$$0 = \left(\frac{d}{dx} f(x,\varphi(x))\right)_{x=a}$$

右辺は，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x,\varphi(x)) &= f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx} \\ &= f_x(x,\varphi(x)) - f_y(x,\varphi(x))\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}\end{aligned}$$

となるので，結局

$$f_x(a,b)g_y(a,b) - f_y(a,b)g_x(a,b) = 0$$

あるいは，

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}. \qquad \cdots (*)$$

これより，$F_x = F_y = 0$．$F_\lambda = 0$ は $g = 0$ なので自明．$\square$

$(*)$ に注目すると，これは，２つの関数 f と g の傾きが同じになることを言っている．今，等高線 $g=0$ に沿って x，y を動かしていき，$f(x,y)$ の値を見ていくと，極値をとるのは２つの f と g の等高線が接するときであることがわかる．

問題 51

次の条件付き極値問題を解け．

$$(1)\ x^2+y^2=2 \text{ でのもとで } e^{-x-y}(xy+1) \qquad (2)\ x^3+y^3-3xy=0 \text{ でのもとで } xy$$

解答

(1) 制約条件により，点は円上を動く．特異点はない．$F=e^{-x-y}(xy+1)-\lambda(x^2+y^2-2)$ として，$F_x=F_y=F_\lambda=0$ となる点を探す．$F_x=e^{-x-y}(y-xy-1)-2\lambda y=0$，$F_y=(x-xy-1)e^{-x-y}-2\lambda x=0$．前 2 式より，$2\lambda xye^{-x-y}=y^2-xy^2-y=x^2-x^2y-x$ なので後ろの等式を因数分解すれば $(x-y)\{xy+1-(x+y)\}=0$．$x=y$ のとき，$(x,y)=(\pm1,\pm1)$（複合同順）が極値の候補で $f(1,1)=2/e$，$f(-1,-1)=2e$．$xy+-(x+y)=1$ のとき，制約条件 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2$ と連立すれば，新たに $(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ も解となることがわかる．その時，$f(1,-1)=f(-1,1)=0$ も極値の候補．円周上で $f(x,y)$ は滑らかに変化するので，$(1,1),(-1,-1)$ で極大値 $2/e,2e$，$(1,-1),(-1,1)$ で極小値 0 をとる．

(2) 制約条件を与える曲線は，問題 48(1) でも扱ったデカルトの正葉線である．$g_x=3(x^2-y)$，$g_y=3(y^2-x)$ より，$(x,y)=(0,0)$ は特異点になっていることに注意．それ以外での極値の候補は $F=xy-\lambda(x^3+y^3-3xy)$ について，$F_x=y-3\lambda(x^2-y)=0$，$F_y=x-3\lambda(y^2-x)=0$，$F_\lambda=x^3+y^3-3xy=0$ の解．$3\lambda=y/(x^2-y)=x/(y^2-x)$ より，$y^3-xy=x^3-xy$．よって $x=y$ であり，これを $F_\lambda=0$ に代入すれば，$(x,y)=(3/2,3/2)$．このとき，$f(3/2,3/2)=9/4$，$f(0,0)=0$ だが，xy は第 1・3 象限で負，第 2 象限で正なので極値ではない．よって，$(x,y)=(3/2,3/2)$ で極大値 $9/4$ をとり，これは最大値．□

ちなみにラグランジュの未定乗数法は多変数関数における多数の拘束条件のもとの極値問題でも同様に成り立つ．結果のみを紹介しておこう．

ラグランジュの未定乗数（多変数関数）

n 変数関数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ が $m(<n)$ 個の拘束条件 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ $(i=1,2,\cdots.m)$ をもつとき，極値問題は

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n;)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

の条件なし極値問題と同じ．

第6章　多変数の積分

6.1　重積分

多変数関数の積分を**重積分**や多重積分と呼ぶ．基本的な仕組みは1変数のときと変わらない．1変数の積分では，区分求積的に積分区間を分割し，細かな長方形の足しあわせ（これを**リーマン和**といった）が分割を細かくする極限である値に収束するとき，その値を積分の値としたことを思い出そう．

1変数での積分のアナロジーから，2変数関数 $f(x,y)$ を積分するときは，領域を長方形で分割して足し合わせれば良いだろう．集合

$$D = \{(a,y) \in \boldsymbol{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

を**長方形領域**という．区間 $[a,b]$ を n 分割，$[c,d]$ を m 分割し，長方形の分割（**長方形分割**）

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\ ,\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

を考える．その幅 $|\Delta|$ は1次元のときと同様に，$|\Delta| = \max(|x_i - x_{i-1}|, |y_i - y_{i-1}|)$ で定義され，これらの分割をどんどん細かくしていき $|\Delta| \to 0$ の極限でリーマン和が収束すればよいであろう．

それぞれの小さな長方形領域

$$\Delta_{ij} = \{(x,y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i,\}$$

での上界，$M_{ij} = \sup_{\Delta_{ij}} f(x,y)$ と下界 $m_{ij} = \inf_{\Delta_{ij}} f(x,y)$ の足しあわせを

$$S(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=i}^{m} M_{ij}(x_i - s_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$s(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=i}^{m} m_{ij}(x_i - s_{j-1})(y_i - y_{j-1})$$

と書く．分割を細かくすれば，S は小さく，s は大きくなる．ここで，

$$S(f) = \inf_{\Delta} S(f,\Delta) \quad , \quad s(f) = \sup_{\Delta} S(f,\Delta)$$

は $s(f) \leq S(f)$ を満たすが，$s(f) = S(f)$ が成り立つとき，f は長方形領域で**積分可能**といって，その値を

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と書く．一般の有界な集合 $\tilde{D}$ の場合，十分大きな長方形領域 D を考えると $\tilde{D} \subset D$ となるから，

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (s,y)) \notin D \end{cases}$$

として関数を拡張すれば，同様に積分を定義できる．

また，3次元空間の有界集合 V に対して，同様に3変数の関数 $f(x,y,z)$ の積分

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

が定義できる．

$f(x,y)=1$ とした積分，平面の有界集合 D に対して $\iint_D dxdy$ は我々の素朴な面積の概念と一致する．そのためこの積分が存在するとき，D は**面積**をもつといい，その積分値 $S(D)$ は D の面積という．3 次元の有界集合 V についても同様に，$v(V)=\iiint_V dxdydz$ が存在するとき，V の体積という．$n(>3)$ 次元に対しても同様で，n **次元の体積**という．

ここまで，1 次元のときと素朴な拡張として重積分の積分の定義を述べてきた．しかし，具体的な積分に対してこの積分が可能かをいちいち問うことはあまりない．実用上は次の定理の内容でその多くがカバーできる．

連続関数の積分存在性

平面の有界閉集合 A が面積をもつとする．f が A 上の有界で連続な関数なら積分可能

1 次元の積分の計算は，結局のところ微分積分学の基本定理から原始関数を探すことに帰着された．重積分の場合も実質的な計算は 1 次元ずつ積分するしかない．これを累次積分という．これが可能なのは次の単純領域と呼ばれる領域での重積分である．

累次積分

$\{(x,y)\mid a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ を x に関して**単純な領域**という．このとき，D で連続な関数 $f(x,y)$ の積分は

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

同様に，$\{(x,y)\mid c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$ を y に関して単純な領域というこのときは先に x の積分をすれば良い．

問題 52

次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dydx$, $D=[0,1]\times[1,2]$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, y\le x^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2, y\ge 0\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$. $D=\{(a,y)\mid 0\le x\le y^2, 1\le y\le 2\}$

(5) $\displaystyle\iiint_V z\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x+1,\ 0\le z\le x+y\}$

解答

(1)

$$\int_0^1 dx\int_1^2(x^2+y^2)dy=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_1^2 dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{7}{3}\right)dx=\frac{8}{3}.$$

(2)

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} xydy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^5dx=\frac{1}{12}.$$

(3)

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 y dy = \int_{-a}^{a} \left[\frac{1}{2}x^2 y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}x^2(a^2-x^2)dx = \frac{2}{15}a^5.$$

(4) y に関する単純領域なので，x から先に計算すればよいであろう．

$$\int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y} dx = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2y}\right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 \frac{1}{2}y^3 dx = \frac{15}{8}.$$

(5) 見づらいが 3 次元の積分も順に累次積分をして計算する．

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \int_0^{x+y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} \frac{1}{2}(x+y)^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{6}\left[(x+y)^3\right]_0^{x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{6}\left((2x+1)^3 - x^3\right) dx$$
$$= \frac{1}{24}\left[\frac{1}{2}(2x+1)^4 - x^4\right]_0^1 = \frac{13}{8}. \ \square$$

x についても y についても単純な領域の場合積分の順番を入れ替えてももちろん値は変わらない．計算が簡単になる順番で積分を行えばよい．

積分の順番を変えるということは 2 つの積分の操作を入れ替えることにな対応する．では，微分と積分の記号の入れ替えは可能なのであろうか．以下に，結果だけをまとめておこう．

微分と積分の順序交換

(1) （微分と微分の順序交換） f_{xy} と f_{yx} は連続ならば一致する．（前の章でやった）

(2)（積分と積分の順序交換）$f(x,y)$ が $D=[a,b]\times[c,d]$ で連続なら，

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

(3) （微分と積分の順序交換）$f(x,y)$，$f_y(x,y)$ が $D=[a,b]\times[c,d]$ で連続なら，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

6.2 重積分の変数変換

1 変数の積分において積分を実行する際のテクニックとして置換積分があった．すなわち変数変換である．重積分においても変数変換は非常に強力な手法である．

1 変数の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ で，$x = x(t)$ という変数変換を行うと，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

と変形され，積分区間 $[a,b]$ は対応する（すなわち，$x(t_a)=a$，$x(t_b)=b$ を満たす）t_a，t_b を用いて，$[t_a,t_b]$ と変更される．また，x の積分 dx を t の積分 dt とみなしたときに，dx/dt の項が出てきたことを思い出そう．

重積分においての変数変換は次の公式で与えられる．

重積分の変数変換

D を xy 平面の領域とする．1 対 1 の変数変換 $x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$ で uv 平面の領域 E に移ったとする．このとき，

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

ここで，D，E の境界は有限個の点を除き滑らかで，$x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$ は C^1 級でヤコビアン $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ は E でゼロにならないとする．ただし，E，D の対応が 1 対 1 でなくても，ヤコビアンがゼロになる点があっても，それらの点の集合が面積ゼロであれば上の公式は成り立つ．

ヤコビアンには絶対値がつくことに注意.

これを踏まえて，いくつか計算練習をしてみよう．

問題 53

次の積分を変数変換公式を用いて求めよ．

$$(1)\quad \iint_D (x - y)e^{x+y}\, dydx \quad , \quad D = \{0 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x - y \leq 2\}$$

$$(2)\quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy \quad , \quad D = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

$$(3)\quad \iint_D (x^2 + y^2)\, dydx \quad , \quad D = \{(x, y)|\ (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

解答

(1) $u = x + y$，$v = x - y$ として変数変換を行う．積分領域は $E = \{0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\}$ となる．ヤコビ行列は $x = (u + v)/2$，$y = (u - v)/2$ より．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

これより，ヤコビアンは $-1/2$ となる．よって，求める積分は，

$$\iint_E ve^u \frac{dudv}{2} = \int_0^2 du \int_0^2 \frac{v}{2} e^u dv = \int_0^2 e^u du = e^2 - 1.$$

(2) 極座標 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を用いて計算してみる．新しい積分領域は $E = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ であり，ヤコビ行列は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となるので，ヤコビアンは r．すなわち，$dxdy = rdrd\theta$．よって求める積分は，

$$\iint_E \frac{1}{r}\, rdrd\theta = \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi(b - a). \ \square$$

(3) 同様に極座標を導入すると，$r = 2a\cos\theta$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ であり，

$$2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr = 8a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\pi a^4 \square$$

特に極座標を用いた重積分は応用上重要である．以下に 2 つの例をあげよう．まずは，高校数学で学んだ極座標で表される関数の面積の公式である．

極座標で表される関数の面積

極座標表示された曲線 $r = f(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ で囲まれる図形 D の面積は

$$S(D) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(\theta)\}^2 \, d\theta.$$

これは，重積分を極座標で表し，累次積分の形に直すだけで良い．すなわち，

$$S(D) = \int_D dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{f(\theta)} r' dr' = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(\theta)\}^2 \, d\theta.$$

2 つめの例はガウス積分と呼ばれる定積分で，特に統計学で頻出する公式である．

問題 54

次の積分を求めよ．

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解答

a を正の数として，2 種類の領域での $e^{-x^2-y^2}$ の重積分を考える：正方形の領域 $D(a) = \{0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq a\}$ と円の一部 $E(a) = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$．$D(a)$ での積分は

$$\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2,$$

$E(a)$ での積分は，極座標に変換すれば，

$$\iint_{E(a)} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

素朴には $a \to \infty$ で 2 つの積分は第 1 象限全体での重積分となり一致するはずである．実際 $E(a) \subset D(a) \subset E(\sqrt{2}a)$ より，

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right) \leq \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2a^2}\right)$$

左右 2 つは $a \to \infty$ で $\pi/4$ に，中央の積分は I^2 に収束する．よって，$I = \sqrt{\pi}/2$．□

6.3 体積と曲面積

重積分を用いて，空間内の図形の体積や曲面の面積を求めてみよう．すでに学んだように，3 次元空間内の領域 V の体積は，

$$\iiint_V dxdydz$$

で表される．これは平面内の領域 S の面積の定義

$$\iint_S dxdy$$

と同様である．領域 V を $V = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a\}$ とすれば，これは半径 a の球を表す．球の体積の公式を重積分を使って求めてみよう．

問題 55

半径 a の球の体積を重積分を使って求めてみよう．そのために，このような球対称の領域での計算に便利な球座標系を導入する．3 次元の球座標系は直交座標系 (x, y, z) から同径 $r > 0$ と 2 つの角度，θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と ϕ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ を用いて得られる次の変数変換である：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

2 つの角，θ は極角，ϕ は方位角と呼ばれる．

(1)　この変数変換のヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}\right|$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iiint_V dxdydz$$

を計算すること球の体積を求めよ．ただし，$V = \{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a\}$ とする．

解答

(1) 定義に従って計算する．

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

サラスの公式を使って，行列式を求めると，

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| &= r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin^3\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + r^2\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = r^2\sin\theta. \ \square \end{aligned}$$

(2) 求めたヤコビアンを使って変数変換を行うと，

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3. \ \square$$

一方で，高校数学で行ったように，断面の面積が求めれば，それを積分することで体積を求めることができる．これは重積分を累次的に積分していることに他ならない．これはカバリエリの原理として次のようにまとめることができる．

カバリエリの原理

平面 $x = a$ と $x = b$（$a < b$）の間にある図形 V を点 $(x, 0, 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積が x の連続関数 $S(x)$ として与えられているならば，V の体積は，

$$\int_a^b S(x)\,dx$$

で求められる．

実際，

$$\iint_V dxdydz = \int_a^b dx \int_S dydz = \int_a^b S(z)\,dz$$

と累次積分をしているだけにすぎない．

高校数学でも多くの訓練を積んでいることであろうから，次の練習問題を扱うだけにしておく．

問題 56

先ほどの問題 55 の球の体積をカバリエリの原理を使って求めよ．

解答

z 軸に垂直な平面での切り口を考えると，半径 $\sqrt{a^2-z^2}$ の円になっているのでその断面積は $S(z)=\pi(a^2-z^2)$．よって，体積 V は

$$V=\int S(z)\,dz=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-z^2)dz=\pi\left[a^2z-\frac{z^2}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi a^3.\ \square$$

曲面積

$f(x,y)$ が C^1 級ならば，$(x,y)\in D$ での $z=f(x,y)$ の曲面積は

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

点 $\mathrm{P}(a,b,f(a,b))$ での接平面の方程式

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

から P での接平面に対する法線が $(f_x(a,b),f_y(a,b),-1$ であることがわかる。xy 平面への射影を考える。xy 平面と接平面のなす角を θ とすると曲面の面積要素は

$$\frac{1}{\cos\theta}dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

この公式を使って，円の表面積の公式を導いてみよう．

問題 57

半径 a の球の円の表面積を求めよ．

解答

半球 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ を円領域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$ で積分し，その 2 倍が円の表面積である．$f_x=-x/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$f_x=-y/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ より，

$$S=2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

極座標で積分を実行すれば，

$$S=2a\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}\int_0^{\pi}d\theta=4\pi a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a=4\pi a^2.\ \square$$

回転体の曲面積

C^1 級の曲線 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面の面積 S は，

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

問題 58

半径 a の球の円の表面積を求めよ．

解答

関数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$（$0\le x\le a$）を公式に従って計算し，その 2 倍を求める．$y'=x/\sqrt{a^2-x^2}$ より．

$$S=4\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=4\pi a\int_0^a dx=4\pi a^2.\ \square$$

6.4 広義の重積分

これまで，有界な領域に対して，有界な関数の重積分を行ってきた．非有界な領域での積分や非有界な関数の積分でも定義することが可能な場合がある．その場合に，1 変数の積分と同様に，広義の重積分を考えることができる．1 変数の積分との大きな違いは，極限の値の時に生じたように，近づけ方が無数にあることである．例えば非有界領域 D での積分が広義積分可能であるとは，有界閉領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)dxdy$$

がいろんな $\{D_n\}$ に対して同じ値に収束するときをいう．正確には $\{D_n\}$ は次の 3 つの条件を満たす有界閉領域であるが，ここでは深入りはしない．

(条件 1) $D_1\subset D_2\subset D_3\subset\cdots\subset D$

(条件 2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=D$

(条件 3) D に含まれる有界閉領域は D_nのいずれかに含まれる

積分を行う領域の境界で非有界な関数になる場合には，同様にあらゆる近づけ方に対して極限が一致する場合に広義積分可能といい，その極限値を広義積分の値と定義する．

ところが，負にならない関数 $f(x,y)\ge 0$ $((x,y)\in D)$ の非有界領域の場合には，実数の連続性から，あるひとつに近づけ方で極限 $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)dxdy$ が定まれば，広義積分可能で，その値が積分の値になる．

問題 59

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の広義積分が可能な α の範囲を求めよ．

$$(1)\quad \iint_D r^{\alpha}\,dxdy\quad,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 1\}$$

$$(2)\quad \iint_D r^{\alpha}\,dxdy\quad,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

解答

(1) 極座標 $dxdy=rdrd\theta$ より，

$$\iint_D r^{\alpha}\,dxdy=2\pi\int_1^{\infty}r^{\alpha+1}dr$$

1 変数の広義積分の際に調べたように，これは $\alpha+1=-1$ を境に積分の可能不可能が分かれる．結局，$\alpha<-2$ で広義積分可能．同様に n 重積分の場合には $\alpha<-n$． $\square$

(2) 同様に，

$$\iint_D r^\alpha \, dxdy = 2\pi \int_0^1 r^{\alpha+1} dr$$

となるので，$\alpha + 1 > -1$，すなわち，$\alpha > -2$ で広義積分可能．同様に n 重積分の場合には $\alpha > -n$．
□

積分の存在を調べたいとき，一般には 1 変数のときと同様に優関数の定理を用いる．

広義積分の存在（優関数定理）

D は $\boldsymbol{R}^2$ の領域で $f(x, y)$ は D で連続な関数とする．同じく D で連続な関数 $g(x, y)$ で

$$(i)\ |f(x,y)| \le g(x,y) \qquad (ii)\ \iint_D g(x,y) dxdy \text{ が積分可能}$$

の両方を満たすとき，$f(x, y)$ も積分可能．特に $|f(x, y)|$ が積分可能なら，$f(x, y)$ も積分可能．

いくつか，実際に手を動かすことで慣れてみよう．

問題 60

次の積分を計算せよ．

$$(1) \quad \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3} \, dxdy \quad , \quad D = \{(x,y) \mid x, y \ge 1\}$$

$$(2) \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} \, dxdy \quad , \quad D = \{(0,0), (1,0), (1,1) \text{ を頂点とする三角形 }\}$$

$$(3) \quad \iint_D (x^2 - y^2) e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy \quad , \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x\}$$

（ヒント：(3) では $u = x + y$，$x = xy$ という変数変換を行う.）

解答

(1) まず，y から積分すると，

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3} \, dxdy &= \int_1^\infty x dx \int_1^\infty \frac{y}{(x^2+y^2)^3} dy = \int_1^\infty x dx \left[\frac{-1}{4(x^2+y^2)^2} \right]_1^\infty \\
&= \int_1^\infty \frac{x}{4(x^2+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{8(x^2+1)} \right]_1^\infty = \frac{1}{16} \square
\end{aligned}$$

(2) (0, 0)，(1, 0)，(1, 1) を頂点とする三角形での積分を逐次積分する．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} \, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x+y}} \, dy = \int_0^1 \left[2\sqrt{x+y} \right]_0^x \, dx = 2(\sqrt{2}-1) \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) \square$$

(3) $u = x + y$，$x = xy$ という変数変換を考えると，積分領域は $H = \{(u, v) | \ 0 \le v \le u^2/4\}$ に変換される．またヤコビアンは $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = x - y$ より，$(x - y)dxdy = dudv$．よって求める積分は，

$$\int_0^\infty (ue^{-u^2}) du \int_0^{u^2/4} (e^{-v}) dv = \int_0^\infty ue^{u^2} \left[-e^{-v} \right]_0^{u^2/4} = \int_0^\infty ue^{-u^2} \left(1 - e^{-u^2/4} \right) du = \frac{1}{10}. \square$$