

生物の流体数理

@ 数学カフェ

石本 健太

東京大学大学院数理科学研究科

ishimoto@ms.u-tokyo.ac.jp

2019年6月15日

目次

はじめに	1
第 1 章 変形物体の運動学	3
1.1 物体の変形	3
1.2 変形物体の運動	4
第 2 章 流体の運動方程式	9
2.1 連続体の基本法則	9
2.2 Navier-Stokes 方程式	12
2.3 Reynolds 数とスケーリング	17
第 3 章 微小遊泳の数理	19
3.1 微小遊泳の運動方程式	19
3.2 帆立貝定理	20
3.3 微生物の走流性	22
おわりに	24
参考文献	26

はじめに

本稿は、2019年6月15日に東京大学数理科学研究科棟で行った講演「第27回 数学カフェ」の補助資料である。講演では「生物の流体数理」と題して、Navier-Stokes 方程式の導出(第1部)、帆立貝定理の証明(第2部)、講演者の最近の研究の紹介(第3部)を話す予定であった。しかし、講演の準備を実際に始めると、全くもって講演時間内に全ての内容を扱うことが困難だとわかった。特に、Navier-Stokes 方程式の導出に関しては、流体力学(および連続体力学)に触れたことがある人とそうでない人で適切な講演内容の密度や進度が異なるように思われた。そこで、できるだけ丁寧にコンパクトなノートを作成し、講演時間に扱えないであろう計算の詳細等はそちらで補おうと考えた。その結果が本稿の補助資料である。

本文には多くの誤植や使用する記号が統一されていないなどの問題を含んでいることが予想されるので、十分注意して読んでいただくとありがたい。このように、内容や記述は精査されたものというには程遠く、筆者の理解不足による誤りを含んでいる可能性もある。近い将来には本稿の内容をきちんと書き直す予定であるので、それまではどうかご容赦願いたい。

第1章 変形物体の運動学

1.1 物体の変形

本稿で扱う物質とは、アボガドロ数オーダーの分子の巨視的な振る舞いに注目したマクロな対象である。固体・液体・気体など、原子や分子のスケールの性質が直接的には影響を与えない場合には、マクロな変数で閉じた理論体系（数理モデル）は良い記述を与える。このように、「どれだけ拡大していても全体と同じような構造を持つことを仮定した物質」を連続体と呼び、弾性体や流体という概念は連続体の範疇にある。連続体の運動を統一的に扱う理論体系が連続体力学であり、流体力学もこの中に含まれる。

例えば、空気であれば気体を構成する分子スケールよりも十分大きなスケールで物理量を平均化することで、このようなマクロな変数が得られる。この平均操作を行うスケールは平均自由行程の数倍程度は大きければよいことが知られている。気体の平均自由行程が $0.1\mu\text{m}$ 程度であり、水のような液体の場合より平均自由行程は短くなるであろう。これらのスケールは μm より小さいが、それでも十分大きな数の分子を含んでおり、 μm オーダーの細胞スケールの現象においても、連続体の記述は十分有効である。

連続体物質 (continuum body) は 3 次元ユークリッド空間 R^3 の滑らか* な開部分集合 B である。これが満たすべき法則を考えてゆく。 $x \in B$ を物質点 (material point) といい、集合 B のことを物質配置 (material configuration) という。

物質の体積と質量

B の開部分集合 Ω に対して、体積 $\text{vol}[\Omega]$ と質量 $\text{mass}[\Omega]$ を導入する。体積は、

$$\text{vol}[\Omega] = \int_{\Omega} dV_{\mathbf{x}} \quad (1.1)$$

であり、質量は質量密度場 (mass density field) $\rho : B \rightarrow R$ によって次のように表されると仮定する：

$$\text{mass}[\Omega] = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} . \quad (1.2)$$

ここで、 $\rho(\mathbf{x}) > 0$ であり、

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{mass}[\Omega_{\delta}(\mathbf{x})]}{\text{vol}[\Omega_{\delta}(\mathbf{x})]} \quad (1.3)$$

で定まるものである。ここで、 $\Omega_{\delta}(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} を中心とした半径 δ 未満の球領域である。

これより、重心 (質量中心) と体積中心は

$$\mathbf{x}_{\text{COM}}[\Omega] = \frac{1}{\text{mass}[\Omega]} \int_{\Omega} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{x}_{\text{COV}}[\Omega] = \frac{1}{\text{vol}[\Omega]} \int_{\Omega} \mathbf{x} dV_{\mathbf{x}} \quad (1.5)$$

*境界 ∂B は区分的に滑らかで向き付可能

で定まる .

物質配置 B は通常力を受けて変形する . 物質の変形は次のように与えられる .

物体の変形

物体の変形はもとの配置 B から B' への写像 , $\varphi : B \rightarrow B'$ として与えられる . この写像は変形写像 (deformation map) と呼ばれ , B は基準配置 (reference configuration) , B' は流通配置 (deformed configuration) と言う . 基準配置は例えば運動の初期時刻での配置を考えればよく , その物質点 $X \in B$ を $X = (X_1, X_2, X_3)$ と書いたとき , $X_i (i = 1, 2, 3)$ を物質座標あるいは Lagrange 座標という . X は変形によって B' の物質点 $x = \varphi(X)$ に移る . $x = (x_1, x_2, x_3)$ と書き , $x_i (i = 1, 2, 3)$ を空間座標あるいは Euler 座標という .

変形による変位 (displacement) は変位場 , $\xi : B \rightarrow V$ によって定まり ,

$$\xi(X) = \varphi(x) - X \quad (1.6)$$

で与えられる † .

通常の連続体力学では , 変形に対して次の条件 (admissible) を仮定する :

$$(1) \varphi : B \rightarrow B' \text{ は全単射} \quad (1.7)$$

$$(2) \text{ 任意の } X \in B \text{ に対して , } \det F > 0 . (\text{向き付けが不変}) \quad (1.8)$$

ここで , $F(X) = \nabla_X \varphi$ は変形勾配テンソル ‡ (deformation gradient tensor) と呼ばれる 2 階のテンソルである ($F_{ij} = \partial \varphi_i / \partial X_j$) . 本稿を通じて変形は十分滑らかと仮定する .

1.2 変形物体の運動

まずは , 連続体力学における運動とは何か確認しよう .

物体の運動

物体の運動 (motion) とは , 物体の時刻に沿った連続な変形 ,

$$\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow R^3 \quad (1.9)$$

のことであり , 時刻 t を止める毎に admissible な変形 $\varphi(\cdot, t) = \varphi_t : B \rightarrow R^3$ により各時刻の配置 $B_t = \varphi_t(B)$ が決まる . 以下 , φ_0 を恒等写像にとることにする .

これにより , $\psi_t = \varphi_t^{-1}$ が定まり , $\psi_t : B_t \rightarrow B$ により , 物体の Lagrange 座標 $X = \psi_t(x) = \psi(x, t)$ が得られる . 一方 , $x = \varphi(X, t)$ は物質点の軌道を表す .

実際の連続体物質は , 質量保存則や運動量保存則といった力学法則に基づいており , そこから得られる運動方程式に従って (一般には) 変形を伴って移動する . 特に , 重心の運動と重心周りの回転は Newton-Euler の運動方程式に従うことを思い出そう . すなわち , 物体の質量を $M = \text{mass}[B]$, 慣性モーメントテンソルを I とすると , 物体の重心の並進速度 U と重心周りの回転角速度 Ω に対して , それぞれ

$$\frac{d}{dt}(MU) = F , \quad (1.10)$$

†本稿では $V = R^3$ のことである . 以降 , 特にベクトル場であることを強調したい場合に V を用いている . 2 階のテンソル場は $V^2 = V \otimes V$ と表記する場合がある .

‡Lagrange 座標での微分は ∇_X で明示的に表す . 通常の Euler 座標での微分は単に ∇ と書くことにする . また , 勾配 (gradient) は右作用で定義する .

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\Omega) = \mathbf{T} \quad (1.11)$$

の式を書き下すことができる．ここで， \mathbf{F} と \mathbf{T} は物体にかかる力とトルクである．また，物体の質量は時間的に変化しないと仮定した．

ここで，これらの運動方程式に現れる変数を変形物体の文脈で考え直してみよう．上の Newton-Euler の運動方程式では，通常力やトルクは物体の外部からはたらいていることを想定している．しかし，一般の連続体物質を考える際には物体の内部にも力が働いていることに注意しないとイケない．このような内部力も変形を生み出しているからだ．力には，重力や電磁力のような接触を伴わない力があり，これらは体積力と呼ばれる．単位質量あたりの体積力場 $\mathbf{b} : B \rightarrow V$ をよく用いる．これは単位体積あたりの体積力場 $\hat{\mathbf{b}} : B \rightarrow V$ と $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \rho^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$ の関係がある．任意の B の開部分集合 Ω に対して体積力による力， $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$ まわりのトルクはそれぞれ

$$\mathbf{f}_b[\Omega] = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (1.12)$$

$$\boldsymbol{\tau}_b[\Omega] = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (1.13)$$

である．一方，接触を伴い，面に対してはたらく力を面積力という．これには流体抵抗も含まれる． Γ を B 内の任意の向き付き可能平面としたとき，法線ベクトル場 $\hat{\mathbf{n}} : \Gamma \rightarrow V$ が定まる．通常 $\hat{\mathbf{n}}$ は表面に対して外向きにとることが多い． $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} : \Gamma \rightarrow V$ は応力 (traction) と呼ばれ，表面 Γ に働く力を表す．これより， Γ にはたらく面積力による力とトルクは同様に，

$$\mathbf{f}_s[\Gamma] = \int_{\Omega} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} \quad (1.14)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s[\Gamma] = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} \quad (1.15)$$

となる．ここで， $dA_{\mathbf{x}}$ は微小な面積要素である．

後に見るように応力場が，連続体の性質を大きく左右する重要な量である．応力場が局所的な法線の情報だけで定まるという次の Cauchy の応力原理は連続体力学の出発点の一つである．

Cauchy の応力原理 (Cauchy's Postulate)

応力 $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} : \Gamma \rightarrow V$ は $\hat{\mathbf{n}}$ だけで定まり，

$$\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$$

を満たす， $\mathbf{t} : N \times B \rightarrow V$ が存在する．ここで， N は \mathbf{R}^3 の単位ベクトルの集合で， $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ は応力関数 (あるいは単に応力) と呼ばれる．

Cauchy の応力原理は，古典的な連続体力学では成り立つとして認めることになる「原理」ではあるが，運動量保存則と幾分かの滑らかさを仮定すれば成り立つことが知られている (Hamel-Noll の定理) [22]．

また，上の原理を認めると次の作用・反作用の法則に対応する性質が満たされる．

Cauchy の基本補題

$t: N \times B \rightarrow V$ を連続な応力関数とする . t が

$$\frac{1}{\text{area}[\Omega]} \int_{\partial\Omega} t(\hat{n}(x), x) dA_x \rightarrow 0 \quad (\text{vol}[\Omega] \rightarrow 0) \quad (1.16)$$

を満たすとき ,

$$t(-n, x) = -t(n, x) \quad (1.17)$$

証明

高さ δ の円柱に対して力の釣り合い (慣性項は高次量になる) を考えて , $\delta \rightarrow 0$ を考えることで示される . ■

この結果も , 運動量の保存則に整合的[§] である . 同様に , 次の Cauchy の基本定理が成り立つ .

Cauchy の基本定理 (Cauchy's Fundamental Theorem)

$t: N \times B \rightarrow V$ を連続な応力関数とする . t が条件 (1.16) を満たすとき , 各 $x \in B$ に対して

$$t(n, x) = \sigma(x)n(x) \quad (1.18)$$

を満たす 2 階のテンソル $\sigma \in V^2 = V \otimes V$ が存在する . σ は応力テンソル (stress tensor) と呼ばれる .

証明

$(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ を頂点とする微小な四面体にはたらく面積力のつりあい (慣性項は高次量になる) を考え , 四面体のスケール $\delta = \max\{a, b, c\}$ を小さくする . 原点を頂点に含まない面を Γ_δ としてその法線を n と書けば ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}[\partial\Omega]} \int_{\Gamma_\delta} \left[t(n, x) + \sum_{j=1}^3 t(-e_j, x)n_j \right] dA_x = 0 .$$

連続性より , 被積分関数が点 x でゼロになるので , ここで $\sigma = t(e_j, x) \otimes e_j$ とすれば ,

$$t(n, x) = t(e_j, x)n_j = \sigma(x)n$$

より , 応力テンソルで書くことができる . 成分で書けば , $t_i = \sum_j \sigma_{ij}n_j$ であり , $\sigma_{ij} = t_i(e_j)$. ■

これらを使って , 物体にはたらく力と (重心まわりの) トルクは ,

$$F = f[B] = f_b[B] + f_s[\partial B] \quad (1.19)$$

$$T = \tau[B] = \tau_b[B] + \tau_s[\partial B] \quad (1.20)$$

で表され , 変形物体は外場と周り (例えば流体) との相互作用により運動をする .

[§]むしろ , 運動方程式 (運動量保存則) から導く方が話の筋は良いと思う .

速度場の Lagrange 表示

ある物質点 $X \in B$ の軌跡は $\varphi(X, t)$ で与えられるので, その速度は

$$\mathbf{v}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(X, t)$$

で与えられる. 速度場の Lagrange 表示という. 同様に加速度は

$$\mathbf{a}(X, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(X, t)$$

で与えられる.

後に見るように, 流体の記述の場合, Lagrange 表示よりも Euler 表示の方が便利な場合が多い. すなわち, 速度場であれば,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi(X, t) \right]_{X=\psi(\mathbf{x}, t)}$$

と Euler 座標 \mathbf{x} と時刻 t で表したい. これは, 物質点 X を追った速度ではなく, ある空間上の点 $\mathbf{x} \in B'$ での流速を表現している. この座標系の取替は, 次の公式が便利である.

物質微分

連続体の運動 $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow R^3$ が与えられているときを考える. $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を速度場の Euler 表示とする. このとき, Euler 表現のスカラー関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ とベクトル値関数 $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ を用いて, Lagrange 表現の時間微分はそれぞれ次のように表される.

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \tag{1.21}$$

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} . \tag{1.22}$$

ここで, 記号 D/Dt は Lagrange 表現の時間微分を表す記号で, ϕ を X と t の関数と見たときの微分

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\varphi(X, t), t)$$

のことであり, Lagrange 微分や物質微分 (material derivative) などと呼ばれる.

証明

まず (1.21) を考える. $\mathbf{x} = \varphi(X, t)$ に注意して, 多変数の微分公式を使えば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\varphi(X, t), t) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{1.23}$$

が得られる. ベクトル値関数に関しても同じ. ■

変形物体の周りが真空でない限り, このような変形物体が存在すると, まわりの媒質から力を受けて移動する. 特に, 生き物の運動を考えた場合, 周りの媒質が水であれば遊泳, 空気であれば飛翔に対応し, 生き物はその表面からの抵抗を通じてまわりの流体と相互作用している. のちに述べるように, 空気や水のような流体 (Newton 流体という) の運動方程式は通常, 非線形偏微分方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式に従う. この方程式の境界条件として生物の変形が流体運動に影響を与えている. それゆえ, 上記の変形によって慣性座標系での表面の変形速度がどのように記述されるか調べる必要がある.

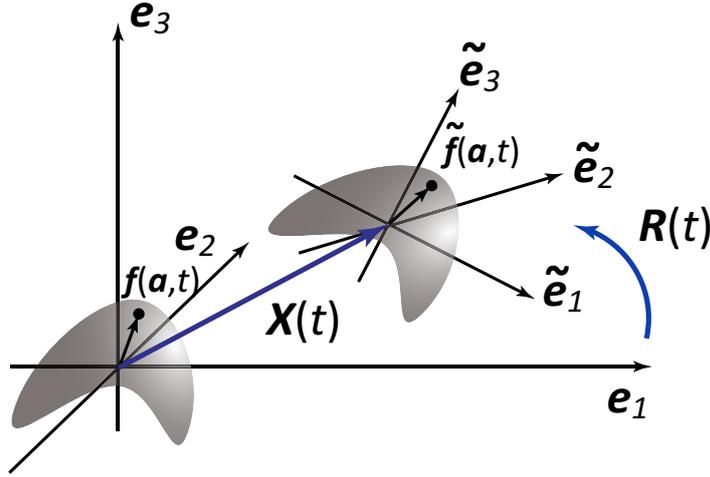


図 1.1: 生物 \mathcal{O} と $\tilde{\mathcal{O}}$ の座標系 $\{e_i\}$ と $\{\tilde{e}_i\}$

以下, [11] に沿って, 変形物体の表面速度を具体的に記述[¶] する. 生物のように変形によって自己推進する物体を記述する際, 物体の運動が物体の変形運動によるものか, あるいは全体としての剛体運動によるものかを区別する必要がある. 変形によって移動する生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ の運動を議論するため, 仮想的に周りに流体が無いとした生物 \mathcal{O} を考え, \mathcal{O} と $\tilde{\mathcal{O}}$ は (それら自身から見て) 同じ変形を行うとする (図 1.1). 特に, \mathcal{O} は運動量と角運動量を保存する.

\mathcal{O} の質量中心を原点とする静止座標系を考え, その正規直交基底を $e_i (i = 1, 2, 3)$ とおく. 同様に, $\tilde{\mathcal{O}}$ の質量中心を原点とする正規直交基底 $\tilde{e}_i(t) (i = 1, 2, 3)$ を, $\tilde{e}_i(t) = R(t)e_i$, $R(t) \in \text{SO}(3)$ とする. ここで $R(t)$ は \mathcal{O} と $\tilde{\mathcal{O}}$ の質量中心を平行移動によって一致させたとき, \mathcal{O} を $\tilde{\mathcal{O}}$ に重ねる回転である. さらに \mathcal{O} の時刻 t における形状を Lagrange 座標 $a = (a_1, a_2, a_3)$ を用いて $f(a, t)$ と表し ($f(a, 0) = a$), \mathcal{O} の形状変化の速度を

$$u' = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right) e_i$$

で定義する. 生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ の質量中心を $X(t)$ とし, $\tilde{\mathcal{O}}$ の並進速度を

$$U = \frac{dX}{dt}, \quad (1.24)$$

そして, $\tilde{\mathcal{O}}$ の回転角速度 Ω を

$$\frac{d\tilde{e}_i}{dt} = \Omega \times \tilde{e}_i, \quad (1.25)$$

すなわち $\Omega = (1/2) \sum_i \tilde{e}_i \times \dot{\tilde{e}}_i$ で定義する. このとき, 物体の表面の速度は

$$U + \Omega \times \tilde{f} + \tilde{u}' \quad (1.26)$$

となる. ただし, $\tilde{f} = R(t)f$, $\tilde{u}' = R(t)u'$ とした. 境界の速度 (1.26) が流体方程式の境界条件を通じてまわりの流体に流れを誘起する. 生じた流れは, 表面の流体抵抗 F や M として, 生物の運動方程式にフィードバックされ運動 U と Ω が定まっている.

[¶]この部分と後述の帆立貝定理の部分は用いる記号が異なっているので注意. 例えばラグランジュ座標を a , 重心の位置座標 X をなどとしている.

第2章 流体の運動方程式

2.1 連続体の基本法則

この章では、連続体の運動の時間発展を記述する基本法則についてまとめておく。質量保存則、運動量保存則、角運動保存則、エネルギー保存則の4つである。いずれも連続体力学(有理力学)における公理とみなす。

それぞれの保存則から得られる時間発展方程式を導くために次の定理を準備しておこう。

Reynolds の輸送定理 (Reynolds transport theorem)

連続体の運動 $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を速度場の Euler 表示とする。時刻 t での任意の開領域 $\Omega_t \subseteq B_t$ で、任意のスカラー場 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ に対して、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_{\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial \Omega_t} \Phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA_{\mathbf{x}}. \quad (2.2)$$

ここで、 \mathbf{n} は $\partial \Omega_t$ の外向き法線ベクトルである。

証明

$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ を変数 \mathbf{X} から \mathbf{x} への変数変換だと見なせば、式 (2.1) の左辺は基準配置 B での積分に置き換えられる。 $dx_i = (\partial \varphi_k / \partial X_i) dX_k$ と変換できるので、変形勾配テンソル $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi$ を用いれば、その成分表示が $F_{ij} = \partial \varphi_i / \partial X_j$ であるので、

$$\int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F} dV_{\mathbf{X}}. \quad (2.3)$$

すなわち、 $\det \mathbf{F}$ は Jacobi 行列式である。(2.3) の両辺を t で微分すれば、右辺は領域 Ω_0 が時間に依存しないので時間微分を積分の中に入れることができ、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi dV_{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F} dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \det \mathbf{F} + \Phi(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) dV_{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、行列式の微分公式

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{F}) \operatorname{tr} \left(\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right) = (\det \mathbf{F}) \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (2.5)$$

を使う。

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = \frac{\partial v_j}{\partial X_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_i}$$

より、 $\partial \mathbf{F} / \partial t = \nabla \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \cdot \mathbf{F}$ であるから、これを (2.5) に用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{F}) \operatorname{tr} (\nabla \mathbf{v})_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = (\det \mathbf{F}) (\nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \quad (2.6)$$

を得る．(2.4) の最後の式に (2.6) を用いれば，結局，(2.1) 式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi dV_x &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \det \mathbf{F} + \Phi(\mathbf{X}, t) (\det \mathbf{F}) (\nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \right) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \Phi(\mathbf{X}, t) (\nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \right) \det \mathbf{F} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\Phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \Phi(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の等式は積分変数の変換を行っている．Lagrange 微分の公式を使えば，

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \Phi (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}}$$

Gauss の公式を用いれば，これは (2.2) 式

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial \Omega_t} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}}$$

に一致する．■

ここから保存則から得られる時間発展方程式を導く．本稿では流体の記述を最終的な目標としているので，Euler 表示で導出を行う．固体 (弾性体) の場合には Lagrange 表示の方が便利なが多い．

質量保存則

連続体の運動に対して，時刻 t での任意の開領域 $\Omega_t \subseteq B_t$ での，質量は保存する：

$$\frac{d}{dt} \text{mass}[\Omega_t] = 0 \quad (2.7)$$

この式から，次の連続方程式，あるいは連続の式，と呼ばれる時間発展方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

あるいは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.9)$$

が得られる．

証明

Reynolds の輸送定理 (2.1) に $\phi = \rho(\mathbf{x})$ を適用すれば， $\text{mass}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}$ なので，

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] dV_{\mathbf{x}} = 0$$

となる． ρ が連続であるならば，局所化定理 (localization theorem) より，被積分関数は常にゼロ出ないといけない．ここで，局所化定理とは「関数 $\phi : B \rightarrow \mathbf{R}$ が連続な場合， $\int_{\Omega_t} \phi dV = 0$ が任意の $\Omega_t \subseteq B$ について成立するならば，任意の $\mathbf{x} \in B$ で $\phi(\mathbf{x}) = 0$ が成り立つ」ことである．背理法を使えば次のように示される．「ある \mathbf{x}_0 で $\phi(\mathbf{x}_0) = 2\delta \neq 0$ ，が成り立つと仮定すれば， Ω_t を \mathbf{x}_0 まわりの半径 δ の球で取れば，そこでの積分は $\delta[\Omega_t] > 0$ となり，仮定に矛盾する．」これを用いれば，任意の $\mathbf{x} \in B_t$ で

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

が成り立つ．これは Lagrange 微分の公式から (2.8) に他ならない．(2.9) は $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ より直ちにに従う．■

運動量・角運動量保存則

連続体の運動に対して，時刻 t での任意の開領域 $\Omega_t \subseteq B_t$ での，運動量と角運動量はそれぞれ

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}[\Omega_t] = \mathbf{F}[\Omega_t], \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L}[\Omega_t] = \mathbf{T}[\Omega_t] \quad (2.10)$$

運動量保存則より，次の運動方程式と呼ばれる時間発展方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.11)$$

が得られる．また，角運動保存則から応力テンソルが対称であること， $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ ，がわかる．

証明

Reynolds の輸送定理は，ベクトル値関数にもすぐに拡張できる． $\Omega_t \subseteq B$ の運動量は

$$\mathbf{P}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}$$

であるからこれを Reynolds の輸送定理に用いる．すると，連続の式 (2.8) を使えば，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_t} \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{v} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Omega_t} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

一方， $\mathbf{F}[\Omega_t]$ は面積力と体積力の和であるから，(1.19) より

$$\mathbf{F}[\Omega_t] = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}] dV_{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

となる．ここで，Cauchy の基本定理 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ と Gauss の定理 (発散定理) を用いた．ナブラ記号とテンソルの積は $[\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}]_j = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ を表していることに注意．ここでも被積分関数の連続性を仮定すれば，局所化定理より

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.14)$$

を得る．

角運動量 $\mathbf{L}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) dV_{\mathbf{x}}$ に対しても同様に計算すれば，Reynolds の輸送定理より，

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\mathbf{x}}{Dt} \times (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{x} \times \frac{D(\rho \mathbf{v})}{Dt} + \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] dV_{\mathbf{x}} \quad (2.15)$$

となるが，(2.15) 右辺 2 項目と 3 項目は (2.12) を見れば， $\rho D\mathbf{v}/Dt$ に等しい．Lagrange 速度の定義 $D\mathbf{x}/Dt = \mathbf{v}$ より， $D\mathbf{x}/Dt \times \mathbf{v} = 0$ ．以上より (2.15) は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV_{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}[\Omega_t] = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV_{\mathbf{x}}. \quad (2.16)$$

一方，トルクの表式は表面力と体積力によるトルクの和になっているので，

$$\mathbf{T}[\Omega_t] = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV_{\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

ここで，(2.17) の最後の式の表面積分を発散定理を用いて，体積積分に変換することを考える．表面積分の被積分関数の成分表示は $\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l$ なので，発散定理で体積分にしたときの被積分関数の成分表示は

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) = \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \quad (2.18)$$

となるので,

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV_{\mathbf{x}}. \quad (2.19)$$

ここで, $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}$ は (2.18) の意味での内積である. (2.15), (2.16), (2.19) より, $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{T}$ の角運動保存則は

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV_{\mathbf{x}}$$

に帰着される. ここでも連続性を仮定すれば, 局所化定理より, $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = 0$. 成分で直接書けば, $(\sigma_{32} - \sigma_{23}, \sigma_{13} - \sigma_{31}, \sigma_{21} - \sigma_{12})^T = 0$ であるから, これは $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$, すなわち応力テンソルが対称テンソルであることに他ならない. ■

エネルギー保存則は, 上記の保存則と同様, 時刻 t での任意の開領域 $\Omega_t \subseteq B_t$ に対するエネルギー収支を課すものである. 一般にはエネルギー保存則, 及び状態方程式が無いと連続体の運動は記述されない. 状態方程式は熱力学的な量の間の関係として与えられ, 例えば, 圧力 p , 密度 ρ , 温度 T の間の関係式 $f(p, T, \rho) = 0$ の形で与えられる. しかし, 温度の変化が無視できる場合 (isothermal) の場合には, $p = p(\rho)$ と表される. この場合エネルギー保存則はその他の時間発展方程式と分離されている.

2.2 Navier-Stokes 方程式

前節で連続の式, 及び運動方程式を導出した. しかし, これだけでは連続体の運動を具体的に求めることはできない. それは流体や弾性体といった物質固有の性質を反映させなければならないからである. それは, 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ がどのような性質を持っているか, ということに他ならない. $\boldsymbol{\sigma}$ を定める関係式のことを構成方程式 (constitutive equation) という. あるいは単に構成式 (constitutive relation) や構成則 (constitutive law) ということもある.

この章では非圧縮 Navier-Stokes 方程式を導出することを目指す. 構成方程式が満たすべき条件を有理力学 [21, 22, 26, 32] の視点で示すことで, 流体とは何かを議論し, Navier-Stokes 方程式で記述される Newton 流体の適応範囲に注意を向ける. また, この観点で流体力学の教科書を見直すと, Navier-Stokes 方程式がいかに数理モデルとして成功しているか, そして方程式の適応可能な現象の多様性と複雑さを理解することができるはずである.

Noll は構成方程式として次の原理を導入した.

Noll の原理

構成式は次の3つの原理に従わなければならない.

- 1) 応力決定の原理 (principle of determinism):
物体中の応力は物体の運動履歴のみで決定される.
- 2) 局所作用の原理 (principle of local action):
物質点 X の応力は X の近傍の運動のみで決定される.
- 3) 物質客観性の原理 (principle of material frame indifference/ principle of material objectivity):
構成式は座標系の回転・平行移動に対して不変である.

1) は古典力学の因果律を表している. 1), 2) をまとめた数学的な表現は, 次のようになる. すなわち, $s \geq 0$ として, $\chi = \chi(\bar{X}, t - s)$ を B の履歴関数とする. ここで, 物質点 $X \in B$ の近傍 B_X を考え, $\bar{X} \in B_X$ とする. 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は X の近傍のすべての履歴関数で決定されるわけだから, \mathcal{F} を汎関数として

$$\boldsymbol{\sigma}(X, t) = \mathcal{F}_{s \geq 0, \bar{X} \in B_X}[\chi^t; \mathbf{X}]$$

と表せる．3) の物質客観性の原理は，直交行列 $Q \in O(3)$ によって座標系 \mathcal{O} を別の座標系 \mathcal{O}^* に

$$x^* = c(t) + Q(t)x$$

と座標変換したとき，応力テンソルが

$$\sigma^* = Q(t) \sigma Q(t)^T$$

を満たすことを要求する．汎関数 \mathcal{F} の言葉で表現すれば，

$$Q(t) \mathcal{F}_{s \geq 0, \bar{X} \in B_X}[\chi; X] Q(t)^T = \mathcal{F}_{s \geq 0, \bar{X} \in B_X}[c(t-s) + Q(t-s)\chi; X]$$

となる．

この表現は一般の連続体物質を表現しているが，我々が通常興味のある対象はもう少し，特徴を持っている．応力テンソル $\sigma(X, t)$ が X 近傍の相対的な運動履歴にのみよって定まるものを考える．それは， \bar{X} の X まわりでの Taylor 展開を考えると，一般に変形勾配テンソル $F = \nabla_X \varphi$ とその高次の微分での関数で表現できることを意味している．特に，高次項を無視し，応力テンソル $\sigma(X, t)$ が変形勾配テンソル F の履歴のみで定まるとした物質を単純物質 (simple material) という．すなわち，

$$\sigma(X, t) = \mathcal{F}_{s \geq 0}[F(X, t-s); X].$$

単純物質が Noll の原理 1) と 2) を満たしているのは明らかであるが，3) も満たしていることは確認できる．以下，単純物質について考える．

物質対称性と等方物質

基準配置 B に依存する．基準配置の間の変換を 2 回テンソル P で表し，それによって構成式が不変であることは，

$$\mathcal{F}_{s \geq 0}[F(X, t-s)] = \mathcal{F}_{s \geq 0}[F(X, t-s)P].$$

が成り立つことと同値である．このとき， P は対称変換という． P がなす変換の集合を対称群 (symmetry group) といい，以下 G で表すことにする．

基準配置 B に対して $\rho: B \rightarrow R$ が定まるので，あらゆる基準配置の取替を考えたとしても，これは体積を保存しないといけない．すなわち，対称群 G は $\det P = \pm 1$ となるものに限られる，すなわち $G \subseteq U = \{P \mid \det P = \pm 1\}$ となるものに限られる．

直行変換によって構成式が不変な場合，すなわち $G \supseteq O(3)$ のとき，等方物質 (isotropic) という．

† ‡ §

対称群 G を使って物質の分類の定義を与えることができる．

* 通常の意味での剛体回転では， $\det Q = 1$ をみたく回転行列 ($SO(3)$) のみを考える．以下の議論を $Q \in SO(3)$ に限っても良い．本稿では， $Q \mapsto -Q$ としてもすぐに同様の議論が成り立つため，[22] に従って， $\det Q = -1$ の場合も同時に扱うことにする．

† 変換を表すテンソル P は 2 つの基準座標の間の座標変換 $dX' = PdX$ で定める．

‡ 有理力学の教科書 [21, 22, 32] では， U はユニモジュラー群と呼ばれている．

§ 任意の物質点 X で構成式が別の物質点 Y の構成式に一致するような基準配置の変換が存在するとき，その物質を一様 (uniform) という．すなわち，

$$\mathcal{F}_{s \geq 0}^{\kappa}[F(X, t-s); X] = \mathcal{F}_{s \geq 0}^{\kappa}[F(Y, t-s); Y]$$

となる基準配置 κ が X, Y を選ぶこと存在すること，である．物理的には 1 種類の物質で記述できるもの，と理解できる．ある基準配置における構成式が X に依存しない場合に均質 (homogeneous) という．均質な物質は一様であるが，その逆は成り立たない．例えば，欠陥や不純物を含んでいる場合がそれに相当する．

固体と流体

$G \subseteq O(3)$ のとき, その物質を固体 (solid) といい, $G = U$ のとき, その物質を流体 (fluid) という. 等方物質は $G = O(3)$ あるいは $G = U$ に限られる (Noll の定理 [17]) ので流体の定義は「固体でない等方物質」と同値である.

この定義のもとでの一般の流体の構成方程式は,

$$\sigma = -p(\rho) + \mathcal{F}_{s \geq 0}[E(X, t - s); \rho], \quad \mathcal{F}[O_t; \rho] = O$$

と表される [22, 32]. 第 2 式の O_t は過去の時間にわたって常にゼロテンソルであることを意味している. ここで, E は右 (Green-Lagrange) 歪みテンソル (ひずみテンソル, strain tensor) と呼ばれるもので, $E = (1/2)(C - I)$ で定義される. C は右 Cauchy-Green テンソル $C = F^T F$ である. 線要素に関する変換則 $dx = F dX$ より, 微小な長さの変換則は, $dx \cdot dx = dX \cdot F^T F dX = dX \cdot C dX$ となるので, φ による変換の前後で各物質点での長さ要素が不変, すなわち変形がない剛体運動には, $E = O$ となり, これは (相対的な) 変形がなくても流れることのできる流体の特徴を示している.

変形勾配テンソル F の瞬時的での値のみによって応力定まる物体は弾性体と呼ばれ, 構成方程式は

$$\sigma(t) = f(F(t))$$

で与えられる. 微小変形 (線形化) を考えると Hook の法則

$$\sigma = \lambda(\text{tr} E_L) I + 2\mu E_L$$

を得る. ここで, $E_L = (1/2)(\nabla_X \xi + (\nabla_X \xi)^T)$ は微小変形に対する変位勾配テンソル (歪みテンソルに線形では一致) であり, λ と μ は Lamé 定数と呼ばれる物質固有定数である.

Stokes の粘性流体のモデルを, このこの文脈に翻訳すると, 「構成方程式が E の瞬時的の時間変化量だけで与えられる流体」と言い換えることができる. 以下, E の時間微分を考えよう. 変形勾配テンソル F の Euler 座標での微分は速度勾配テンソル (velocity gradient tensor), $G = \nabla v$ であり, $d\dot{x} = G dx$ を満たす. すると, $d\dot{x} = \dot{F} dX$ であるから, $G = \dot{F} F^{-1}$. これより, E の時間微分は, $\dot{E} = (1/2)\dot{C} = (1/2)(\dot{F}^T F + F^T \dot{F})$. ここで, $F^T G F$ を計算すれば, $F^T G F = F^T \dot{F}$. 同様に, $F^T G^T F = \dot{F}^T F$ となるので,

$$\dot{E} = F^T D F.$$

ここで, G の対称成分 $D = (1/2)(\nabla v + (\nabla v)^T)$ は変形速度テンソル (deformation velocity tensor) という. 今, 流体の定義より基準座標の任意の取替に対して, 構成式が変化しないので, 基準配置を現時刻 t の配置に取れば, $F(t) = I$ となる. 以上より, 流体の一般的な構成方程式から, 瞬時の変形速度テンソル $D = (1/2)(\nabla v + (\nabla v)^T)$ のみの連続な関数として,

$$\sigma = -pI + f(D), \quad f(O) = O \tag{2.20}$$

となる.

Newton 流体と Navier-Stokes 方程式

Newton 流体 (線形粘性流体) とは式 (2.20) において, σ が D の 1 次関数であるものを言う. Newton 流体の構成方程式は

$$\sigma = (-p + \lambda(\nabla \cdot v)) I + 2\mu D \tag{2.21}$$

となる. λ と μ はそれぞれ体積粘性率 (bulk viscosity), 剪断粘性率 (shear viscosity) という. いずれも一般に ρ の関数である. また, この構成方程式で得られる運動方程式を (圧縮性) Navier-Stokes 方程式という.

(2.22) を導くにあたって、次の等方テンソル関数の表示定理が便利である。

表示定理

任意の直交テンソル $Q \in O(3)$ に対して、

$$f(QVQ^T) = Qf(V)Q^T$$

を満たす関数 $f(V)$ を等方テンソル関数という。 $T = f(V)$ に対して、 V と T が対称テンソルならば、

$$T = f(V) = \phi_0 I + \phi_1 V + \phi_2 V^2$$

が成り立つ。ここで、 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 はいずれも V の主不変量 I_V, II_V, III_V のスカラー関数である。

主不変量はそれぞれ

$$I_V = \text{tr}V, \quad II_V = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}V)^2 - \text{tr}(V^2) \right], \quad III_V = \det V$$

である。固有値 (主値) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ で書けば、

$$I_V = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad II_V = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad III_V = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

であり、Cayley-Hamilton の式

$$V^3 - I_V V^2 + II_V V - III_V I = O$$

を満たしている。証明は [22],[25], [26], [32]などを参考にせよ。以下、これを証明なしに用いて、(2.22) を導く。

証明

物質客観性の原理より、任意の直交テンソル $Q \in O(3)$ に対して、

$$f(QDQ^T) = Qf(D)Q^T$$

が成り立たなければならない。これより、 σ は D に関する等方テンソル関数である。 σ も D も対称テンソルなので、表示定理を用いることができる。

$$\sigma = (-p + \phi_0)I + \phi_1 D + \phi_2 D^2$$

ここで、Newton 流体の仮定は「 σ は D の 1 次関数」である。すぐに D^2 の項はゼロでないといけないことがわかる。 ϕ_0 と ϕ_1 も

$$\phi_0(I_D, II_D, III_D) = \lambda I_D + c$$

$$\phi_1(I_D, II_D, III_D) = \mu$$

となる。ここで、 λ, μ, c は p だけの関数である。(2.20) の 2 つ目の式より $c = 0$ でなければならない。 $I_D = \text{tr}D = \nabla \cdot v$ より、(2.22) が示される。■

熱力学的な圧力 p は密度と温度の関数である。通常、圧力の決定には状態方程式が必要であり、温度変化はエネルギーの保存則に従う。温度変化が無視できる場合、あるいは一般に圧力が密度だけで決定される場合 (バロトロピー流と呼ばれる) にはエネルギー方程式と分離することができる。粘性係数 λ, μ も密度と温度の関数となっており、流体力学的圧力 $p - \lambda(\nabla \cdot v)$ は一般に熱力学的圧力 p と異なる。

ここで、非圧縮な流体を考えることにより、音速より十分遅い日常レベルでの水や空気のような流体運動を非常によく記述する(非圧縮)Navier-Stokes 方程式を導こう。

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

非圧縮条件 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ が成り立つとき、連続の式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ となり、Newton 流体の運動は次の非圧縮 Navier-Stokes 方程式に従う。

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \quad (2.22)$$

ここで、密度 ρ は定数、 μ は粘性係数と呼ばれる定数である、 p は圧力である。

証明

Lagrange 微分 $D\rho/Dt = 0$ の条件より、 $\rho(\mathbf{X}, t)$ は t に依らず一定である。連続の式 (2.8) より、 $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ なので、結局連続の式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ に帰着される。これを (2.22) に代入すれば、 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ 、 ρ が時間に依らない定数なので、 μ は定数である。 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v}$ となるので、これを運動方程式 (2.11) に代入すれば、(2.22) が得られる。■

偏微分方程式 (2.22) を解くにあたっては、初期条件と境界条件が必要である。固体壁面での境界条件は通常、滑りなし境界条件(粘着境界条件)を採用する。すなわち、境界での速度場 \mathbf{v} は壁面の速度 \mathbf{u} に一致している：

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_t .$$

粘性係数がゼロの流体、すなわち構成式が $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ となっているものを非粘性流体といい、その運動方程式は Euler 方程式という。これは、1750 年代に Euler が数学的にはじめて流体の運動を数学的(本稿と同様に)に定式化したことに由来する。粘性の効果は Newton 流体に名を残す Newton がその考察のはじまりだとも言われているが、現在 Navier-Stokes 方程式として知られているこの粘性流体の方程式は 1840 年代に Stokes によって導かれた(発見したのは Navier(1827) ということになっている)。しかし、Navier-Stokes 方程式が粘性流体の良い数理モデルあることは、19 世紀後半に Reynolds を始めとした実験や理論が進むことで認識されたといってもよい。実際、流体力学の古典的な教科書(例えば [27]) は非粘性流体を教科書の前半に添えている。現代的な教科書(例えば [1]) では Navier-Stokes 方程式を流体の基礎方程式とも言える位置に添えている。

非圧縮 Navier-Stokes 方程式は細胞スケールから大気スケールまで幅広い現象に現れる水や空気の運動を非常に良く記述する。しかし、これまでの導出過程で見えてきたように、Navier-Stokes 方程式は極めて限定的な構成式をもつ Newton 流体にしか適用できない。Newton 流体でない流体はまとめて非 Newton 流体と呼ばれるが、それには例えば、粘性係数を $\mu = \mu(\mathbf{D})$ のように、変形速度テンソルの関数として非線形性を導入した数理モデルである一般化 Newton 流体や、弾性体のように構成式に歪み E による遅延の効果(過去の履歴)をもつ粘弾性流体などがあり、流体に限っても数理モデルの研究は終わったわけではない。また、一般の連続体に拡張した場合にも、本稿で触れる生き物のような変形による自己推進物体や、基準座標が時間によって変化するような生物の成長を含んだ連続体の理論 [8]、あるいは群れの運動のような集団運動を記述する有効理論、など連続体の数理モデルとしての活躍の幅は、現代でも拡大し続けている。

2.3 Reynolds 数とスケーリング

非圧縮 Newton 流体は次の Navier-Stokes 方程式 (2.22) を考える。以降、速度場を \mathbf{u} と書く。

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.24)$$

非圧縮条件 (2.24) は連続の式という。今の場合、外力 \mathbf{b} としては重力や電磁力といった流体を經由しない力であることに注意しよう。具体的な状況として、流体中に表面が S で与えられる生物 O が自己推進している系を考えよう。生物 O の代表的な長さ（ここでは生物を特徴づける長さスケール）を L 、代表的な速度（例えば並進の速度）を U 、代表的な時間スケール（生物の自己推進運動の周期）を T とする。方程式 (2.23) をこのスケールを用いて無次元化しよう。今、外力 \mathbf{b} がない ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) とする。ストレステンソルの項が $\mu U/L$ のスケールであることに注意して、(2.23) は無次元物理量に $*$ をつけて表記すると、

$$\frac{\rho U}{T} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho U^2}{L} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = \frac{\mu U}{L^2} \nabla^* \cdot \boldsymbol{\sigma}^*$$

を得る。整理すれば、

$$\frac{L^2}{\nu T} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{UL}{\nu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = \nabla^* \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \quad (2.25)$$

となり、Reynolds 数 $Re = UL/\nu$ と Strouhal 数 $St = L/UT$ を定めると、(2.25) は、

$$Re St \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = \nabla^* \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \quad (2.26)$$

となる。

先程と同様に生物 O に対する運動方程式をスケールすれば (1.10) は、

$$\frac{MU}{T} \frac{d}{dt^*} \mathbf{U}^* = \mu UL \mathbf{F}^*$$

となる。今、我々は（後述の）帆立貝定理が成り立つような Reynolds 数の小さな流体を考えているので、力のスケーリングに際して力が速度に比例するという Stokes 則を用いた。回転の運動方程式も同様にスケールされ、(1.10)~(2.30) はまとめて、

$$\frac{M}{\mu TL} \frac{d}{dt^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^* \\ \boldsymbol{\Omega}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{T}^* \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

と書ける[¶]。ここで、水中の生物などのように生物の密度と流体の密度が同じオーダーの場合 $M \sim \rho L^3$ と表せるので、(2.27) は、

$$Re St \frac{d}{dt^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^* \\ \boldsymbol{\Omega}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{T}^* \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

となる。

方程式 (2.26) と (2.27) で表されるような系を考える。以下では無次元物理量を表す $*$ の記号を省略することにする。

[¶] 重力の影響が小さいことが非常に大事である。というのも重力による力と流体の粘性による力の比の値は、 $(M - \rho L^3)g/\mu UL = (\rho_M - \rho)L^2g/\mu U = (Re_S - Re_\omega)gT/U$ となる。地球上では $g = 10^3 \text{ cm/sec}^2$ と大きな値になるので、 $Re_S \sim Re_\omega$ の中立浮力 (neutral bouyancy) の条件がなければ、重力の効果は無視できない。問題は、重力と生物の推進力のスケールが分離できるかである。一般に重力が卓越している系では、流体の抵抗（今考えている系では Stokes 力）が働き、運動は定常的になる。この状態で生物が運動するとき、等速直線運動をしている座標系でものごとを考えることで、場合によっては、重力のかからない系に移ることができるだろう。しかし、重力と浮力の作用線が異なる場合は、浮力と重力のダイナミクスが非常に重要になりうる。例えば、クラミドモナスやボルボックスといった鞭毛藻の仲間が該当する [18, 6]。

系の無次元量は $Re = \rho_F LU / \mu$, $ReSt = Re_\omega = \rho_F L^2 / \mu$ の他に^{||}, もうひとつ (2.27) の左辺の係数 $Re_s = \rho_M L^2 / \mu T$ があり, これは Stokes 数 (粒子 Reynolds 数) と呼ばれる. ここで, ρ_F と ρ_M はそれぞれ流体と物質の密度を表す. これから, $Re, Re_\omega, Re_s \ll 1$ の状況で, 方程式 (2.26) と (2.27) で支配される系の運動を議論したい.

さて, 参考までにこれらの無次元量の程度をいくつかの生物系を例にとって示そう [14]. 物体の大きさのスケールが小さくなるとこれらの無次元量も小さくなることから, 微小生物の運動が今の系に対応する. 大腸菌 (*Escherchia coli*) で $Re \sim 10^{-4}$, ヒトの精子で $Re \sim 10^{-2}$, ゾウリムシ (*Paramecium caudatum*) では $Re \sim 10^{-1}$ 程度となり, 1mm 程度の大きさのミジンコになると $Re \sim 10^1$ 程度となり, 慣性の効果は無視できなくなってくる.

Reynolds 数が大きな慣性支配的な流れの場合でも同様のスケールリングが可能である. その際には, 圧力項が慣性項と釣り合うような $p \sim \rho U^2$ のスケールであることに注意が必要である. その場合 (無次元量の * の記号を省略して),

$$St \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.29)$$

となる. 振動現象などの特徴的な時間スケールがない場合など, 時間スケールは T は流れ速度で定まるので $T = L/U$ とすれば, $St = 1$ となり,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.30)$$

と書かれることが多い. 粘性項が慣性項に比べて非常に小さい場合には Re は十分大きくなり, 式の上では $Re \rightarrow \infty$ で Navier-Stokes 方程式は非粘性流体の Euler 方程式になる. ただし, $Re \rightarrow \infty$ で最高階微分の係数が小さくなる特異摂動問題になっていることに注意しなければならない. 生き物の運動のように境界がある場合には, 急激な流速勾配をもつ領域 (境界層) が境界付近の薄い層として存在し, 粘性の効果は単純には無視できない. 特に, 流れの剥離と呼ばれる複雑な渦構造の生成を伴う場合には, 注意が必要である.

^{||}無次元量 $ReSt$ は振動 Reynolds 数 (oscillatory Reynolds number) と呼ばれる

第3章 微小遊泳の数理

3.1 微小遊泳の運動方程式

Reynolds 数の小さな遅い流れは Stokes 方程式に従う．Stokes 方程式とは Navier-Stokes 方程式の移流項を落とした形をした方程式のことで，外力を無視して書けば，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.1)$$

で表される．定常状態では

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \quad (3.2)$$

となる．以下，(3.1) を非定常 Stokes 方程式，(3.2) を定常 Stokes 方程式と呼ぼう．変形物体の運動を考える今の系では，系を指定する 3 つの無次元パラメータのうち，(3.1) は Navier-Stokes 方程式の $Re \rightarrow 0$ の極限に，(3.2) は $Re, Re_\omega \rightarrow 0$ の 2 つのパラメータのゼロ極限に対応する．この定常 Stokes 流では，次の Lorentz の相反定理 [16] が成り立つ．

Lorentz の相反定理 (the reciprocal theorem, Lorentz)

流体方程式 (3.2) の 2 つの解を用意する．速度場をそれぞれ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ をと書く．閉じた領域 S を考え，表面でのストレステンソルをそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ とする．このとき，

$$\int_S \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 dS = \int_S \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 dS$$

が成り立つ．

証明:

[9] を参考に，定理の証明を与えよう．外力が無い定常 Stokes 流れは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

となる．ここで応力テンソル σ_{ij} は， $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\mu D_{ij}$ である．ただし， D_{ij} は変形速度テンソル，

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

である．以下，1 つ目の解に対してプライムを 1 つ，2 つ目の解に対してプライムを 2 つつける約束にしよう．応力テンソル σ'_{ij} に対して，両辺に D''_{ij} で縮約を取れば，

$$\sigma'_{ij} D''_{ij} = -p' \delta_{ij} D''_{ij} + 2\mu' D'_{ij} D''_{ij}$$

を得る．非圧縮の条件より

$$\delta_{ij} D''_{ij} = \frac{\partial u''_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \mathbf{u}'' = 0$$

が成り立つので、これを用いれば、 $\sigma'_{ij}D''_{ij} = 2\mu' D'_{ij}D''_{ij}$ を得る。プライムとダブルプライムを入れ替えても同様の式が成り立つので、 $\sigma''_{ij}D'_{ij} = 2\mu'' D'_{ij}D'_{ij}$ 。以上から、

$$\mu'' \sigma'_{ij} D''_{ij} = \mu' \sigma''_{ij} D'_{ij} \quad (3.3)$$

が得られる。ここで、ストレステンソルの対称性 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) を用いると、

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} D''_{ij} &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma'_{ji} \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} = \sigma'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma'_{ij} u''_i) - u''_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma'_{ij} u''_i) \end{aligned}$$

よって (3.3) は

$$\mu'' \nabla \cdot (\sigma' u'') = \mu' \nabla \cdot (\sigma'' u')$$

となり、これを体積積分*して Gauss の公式を用いれば、求めたい表式、

$$\mu'' \int_S dS \cdot \sigma' u'' = \mu' \int_S dS \cdot \sigma'' u'$$

を得る。■

一方、微生物の重心の運動方程式は (2.27) より、

$$Re_s \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

である。

3.2 帆立貝定理

この節では、[29] に従って、帆立貝定理を解説する。

Purcell の帆立貝定理 (saclop theorem) とは、(1) 生物の変形が往復運動 (2) $Re = R_\omega = 0$ (3) $Re_s = 0$ のとき、変形の 1 周期 T ののちに $R = 1$ かつ $X = 0$ が成立することを言う。ただし、このままでは「往復運動」という述語は明確な意味を持たない。そこで、生物の往復運動を次のように定義する。

定義 (往復運動)

生物 \tilde{O} が $[0, T]$ で周期 T の往復運動をするとは、連続関数 $g(t)$ が存在し、 $f(t) = f(g(t))$, $g(0) = g(T) = 0$ を満たすことである。

注意:

まず、real swimmer の変形は virtual swimmer の形状だけで決定されていることに注意すべきである。関数 $g(t)$ は「行き」の時刻 t の形状と帰りの時刻 t' の間の対応付けを表している。この定義では、virtual swimmer の形状が「行き」と「帰り」で回転を含めて一致することを仮定しているように見えるが、次に示すように virtual swimmer の角運動量保存則より回転の自由度を残す必要がないことが分かる。

*任意の境界 S の外流の問題を考えると、Stokes 流の無限遠での速度場は一様流が無ければ、 $u \sim O(1/r)$ であり、 $n \cdot \sigma \sim O(1/r^2)$ なので、全体として $dS \cdot \sigma \cdot u \sim O(1/r^3)$ となる。このため無限遠での表面積分は 3 次元では消える。境界として、静止した固体壁を考えれば、境界で速度場が 0 になるので、そこでの積分が消えるのは明らかである。

実際，往復運動を上関数 $g(t)$ に対して回転行列 $S(t)$ が存在して $f(t) = S(t)f(t')$ が成り立つものとした場合，virtual swimmer の角運動量 M^V が保存することから，

$$\mathbf{M}^V = \int \rho_m \mathbf{f}(\mathbf{a}, t) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} = \int \rho_m \mathbf{S} \mathbf{f}(\mathbf{a}, g(t)) \times \frac{\partial \mathbf{S} \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{a}, g(t)) d\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

ここで， $\rho_m = \rho_m(\mathbf{a}, t)$ は生物の質量密度である．式 (3.5) の3項目は，

$$\int \rho_m \mathbf{S} \mathbf{f}(\mathbf{a}, g(t)) \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} \mathbf{f}(\mathbf{a}, g(t)) + \frac{dg}{dt} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{a}, g(t)) \right) d\mathbf{a} = \mathbf{I}^V(t) \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{dg}{dt} \mathbf{S} \mathbf{M}^V$$

と変形できる．ここで， S に対する角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を $dS/dt = \boldsymbol{\omega} \times S$ で導入した．また， \mathbf{I}^V は virtual swimmer の慣性モーメントテンソルである．すると式 (3.5) は，

$$\mathbf{I}^V \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

となり，3次元の生物 \mathcal{O} に対して \mathbf{I}^V が逆行列を持つことから $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ，従って $g(0) = g(T) = 0$ から $S(t) = 1$ が示される．以上より，帆立貝定理の内容は次のようにまとめられる．

帆立貝定理 (the scallop theorem, Purcell)

$Re = R_\omega = R_S = 0$ とき，生物 $\tilde{\mathcal{O}}$ が周期 T の往復運動をすれば， $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{R}(T) = \mathbf{1}$ が成り立つ．

証明: 証明は [29, 11] による．まず，仮定の $Re = R_\omega = 0$ より流体方程式は定常の Stokes 方程式である．[20] や [23] に従ってこの定常 Stokes 方程式を解くことを考える．定常の Stokes 方程式に関して，先の Lorentz の相反定理を思い出そう：

$$\int_{\tilde{S}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS = \int_{\tilde{S}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \quad (3.6)$$

ここで， $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ と $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ は同じ形状 \tilde{S} の任意の異なる2つの境界条件の方程式の解である．ここでは，方程式の境界条件として $\tilde{\mathbf{u}}$ は real swimmer のそれを， $\hat{\mathbf{u}}$ として変形速度の無い仮想的な物体のそれを考える．(1.26) より，これらの解は境界 \tilde{S} で，

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{u}}' \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{U}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{f}} \end{cases}$$

を満たす．また，剛体運動の場合ストレステンソル $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は並進運動部分と回転運動部分に分解できる [9]: $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T \cdot \hat{\mathbf{U}} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}$ ．ここで， $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T$ と $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R$ は形状 \tilde{S} に依存した3階のテンソルである．これらを相反定理の表式 (3.6) に代入すれば，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} = \int_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T \\ \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS$$

となる．6行6列の抵抗テンソル $\tilde{\mathbf{K}}$ を

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T & \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R \\ \tilde{\mathbf{f}} \times (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T) & \tilde{\mathbf{f}} \times (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R) \end{pmatrix} dS$$

のように定義し， $\hat{\mathbf{U}}$ と $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ の任意性より，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} + \int_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T)^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \\ (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R)^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \end{pmatrix} dS \quad (3.7)$$

を得る．式 (3.7) の左辺の力とトルクは Newton の運動方程式と結びついている．すなわち，

$$R_S \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} + \int_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_T)^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \\ (\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R)^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \end{pmatrix} dS .$$

これは real swimmer の物理量で表された生物 \tilde{O} の運動方程式である．左辺が生物の慣性項，右辺 1 項目は生物の重心並進と剛体回転からの流体の抵抗力，右辺 2 項目は生物の変形から生じる推進力を表している．今，往復運動の定義は virtual swimmer の形状 f で定まっているので， R を対角的に 2 つ並べた 6 行 6 列の行列 R を用いて virtual swimmer の物理量の式に書き換える．

$$R_S \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{R} \mathbf{I}^V \mathbf{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} + \mathbf{R} \int_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_T)^T \cdot \mathbf{u}' \\ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_R)^T \cdot \mathbf{u}' \end{pmatrix} dS .$$

$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{U}$ と $d\mathbf{R}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ を併せると，これらの式から，virtual swimmer の 1 周期の形状 $f(t)$ あるいは $\partial f/\partial t = \mathbf{u}'$ を与えたとき，流体中の real swimmer の並進・回転が得られる．

次に $R_S = 0$ の仮定より，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = -\mathbf{R}(t) \mathbf{K}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \int_S dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_T^T(t) \cdot (\partial f_i/\partial t) \mathbf{e}_i \\ \int_S dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_R^T(t) \cdot (\partial f_i/\partial t) \mathbf{e}_i \end{pmatrix}$$

を得る．

さらに，生物の形状に関する往復運動の仮定より，時刻 t と時刻 $t' = g(t)$ で

$$\mathbf{R}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \boldsymbol{\Omega}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1}(g(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{U}(g(t)) \\ \boldsymbol{\Omega}(g(t)) \end{pmatrix} \frac{dg}{dt} \quad (3.8)$$

の関係をj得る．ここで， $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}(d\mathbf{R}/dt)$ という新たな行列 \mathbf{A} を導入すると，

$$A_{ij}(t) = -\epsilon_{lkp} R_{li} R_{kj} \Omega_p(t) = -\epsilon_{ijk} (\mathbf{R}^{-1}(t) \boldsymbol{\Omega}(t))_k$$

と変形できる．ここで，行列式の定義より， $\epsilon_{lkp} R_{li} R_{kj} R_{pq} = \det(\mathbf{R}) \epsilon_{ijq}$ となることと，回転行列の性質を用いた．式 (3.8) より $\mathbf{A}(t) = (dg/dt) \mathbf{A}(g(t))$ となることがわかり， $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{R} \mathbf{A}$ を直接 t で変形の 1 周期積分すれば，1 周期での生物の回転 $\mathbf{R}(T)$ について，

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0) \overline{\mathbf{T}} e^{\int_0^T \mathbf{A} dt} = \mathbf{1}$$

を得る．ここで， $\overline{\mathbf{T}}$ は反時間順序積[†]を表す記号である．さらに，(3.8) 式から $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ がわかり，帆立貝定理が証明される[‡]．■

3.3 微生物の走流性

微生物の走流性を記述する単純な数理モデルとして，風見鶏モデルとして知られる軸対称な物体の一樣シア中の運動を考える．この節の内容は [10] によるが，数理モデルは [13] で導かれているものである．

[†]時間順序積 $\overline{\mathbf{T}}$ は次の級数

$$\overline{\mathbf{T}} \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t) dt \right] = \mathbf{1} + \int_{t_1 < t < t_2} \mathbf{A}(t) dt + \int_{t_1 < t < t' < t_2} \mathbf{A}(t) \mathbf{A}(t') dt + \dots$$

で定義されている．

[‡]微小生物の流体数理の背景には，ゲージ理論の数学的構造があることが知られている [19] が，現実的な生物学の問題に取り組む際は，Stokes 方程式の直接数値計算 (あるいは近似計算) を用いることが最近では主流である．

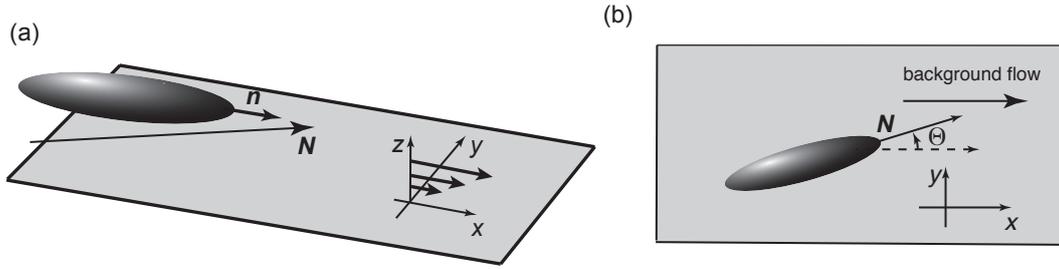


図 3.1: 一様シア流中で壁面に対する迎角が固定された回転楕円体 . (a) 3 次的に見た場合 . (b) xy 平面への射影 .

アスペクト比が $c \leq 1$ の回転楕円体を考えその長軸方向を n とする (Fig. 3.1) . 図 3.1(a) に示されているように , 無限平面の固定境界を $z = 0$ に置き , シア流として $u^\infty = \dot{\gamma} z e_x$ を考える . xy 平面に射影した物体の向きを N とする . すなわち ,

$$N = \frac{n - (n \cdot e_z) e_z}{|n - (n \cdot e_z) e_z|}$$

であり , xy 平面内での角度 θ を図 3.1(b) のように定める .

シア流中の回転楕円体の向きの時間発展は Jeffery の解 [12] として知られ ,

$$\frac{dn}{dt} = \omega^\infty \times n, \quad (3.9)$$

で表される . ここで , ω^∞ は

$$\omega^\infty = \frac{1}{2} \nabla \times u^\infty + G n \times (E^\infty \cdot n), \quad (3.10)$$

で与えられる . 定数 G は Bretherton 定数 [4, 3] として知られる形状によって定まる定数で回転楕円体の場合には , $G = (c^2 - 1)/(c^2 + 1)$ で与えられる . E^∞ は背景流れ場による変形速度テンソルで $E^\infty = (\nabla u^\infty + (\nabla u^\infty)^T)/2$ である . 一様シア流 u^∞ の表式を代入すると ,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} G n_z (1 - 2n_x^2) + n_z \\ -2G n_x n_y n_z \\ G n_x (1 - 2n_z^2) - n_x \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

を得る .

次に , この物体が壁面の近傍に閉じ込められており , 次の 2 つの条件満たすと仮定する . (i) 壁面に対する迎角が時間的に一定 , すなわち $n_z = \text{const.}$. (ii) 流体相互作用及び接触による , 壁と物体間の相互作用は物体の方向は , n と e_z で貼られる平面内でのみ変化させる . これらの条件が成り立てば , 物体の向きは xy 平面内でしか変化しない . それゆえ , (3.11) は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} G n_z (1 - 2n_x^2) + n_z \\ -2G n_x n_y n_z \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

と書き直せる . ここで , C は条件 (i) から定まる . すなわち , $n_x^2 + n_y^2 = 1 - n_z^2$ が時間変化しない , という条件より

$$C = \frac{\dot{\gamma}}{2} \frac{n_x n_z}{1 - n_z^2} [G(1 - 2n_x^2) - 1]. \quad (3.13)$$

以上から , 2 次元の方向に関する式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = -\frac{\dot{\gamma}}{2} (G + 1) \frac{n_z}{1 - n_z^2} \begin{pmatrix} -n_y^2 \\ n_x n_y \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

を得る． N の表式を使えば，

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = -\frac{\dot{\gamma}}{2}(G+1)n_z \begin{pmatrix} -N_y^2 \\ N_x N_y \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

となる．これはさらに簡単化できて，最終的に

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\alpha \sin \Theta \quad (3.16)$$

を得る．ここで， $\alpha = (\dot{\gamma}/2)(G+1)n_z$ である．この式は2つの固定点を持っており， $\Theta = 0, \pi$ はそれぞれ流れの下流方向と上流方向に対応する．ここで， $G \geq 0, \dot{\gamma} > 0$ より，係数 α の符号は n_z の符号で定まる．球の場合には $G = 0$ であり，同じ結論を得る．以上より， $n_z < 0$ のとき上流方向が安定であり，下流方向は不安定である．また， $n_z > 0$ の場合には安定性が逆転する．

おわりに

おわりに、本稿を書くにあたって参考にした著書やさらに学びたい人のための文献をまとめておく。

本稿での連続体力学の導入やテンソル表記の多くの部分は、

[7] Gonzalez & Stuart, *A First Course in Continuum Mechanics* (Cambridge University Press, 2008)

に従っている。流体と弾性体を含む連続体力学の理論体系をまとめた教科書で、数学サイドの人にも読みやすくかかれていると思う。もう少し、物理的な入門書としては

[28] 佐野理, *連続体の力学* (裳華房, 2000)

がバランスが良い。

一方、構成方程式に関する有理力学の議論では、本稿では

[22] Trudell, *A First Course in Rational Continuum Mechanics* (Academic Press, 1990) を基にしている。また、その日本語の解説書とも言える

[26] 久田俊明, *非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎* (丸善出版, 1992)

[32] 徳岡辰雄, *有理連続体力学の基礎* (共立出版, 1999)

を大いに参考にした。有理力学の詳細に関心がある人は、この分野の大著

[21] Trudell & Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics* (Springer-Verlag, 2004)

を参考にされたい。

本稿ではあまり触れることのできなかった多様な流体現象については、標準的な流体力学の教科書を参考にされたい。古い方から並べると

[27] 今井功, *流体力学* (前編) (裳華房, 1973)

[30] 巽友正, *流体力学* (培風館, 1982)

[33] 日野幹雄, *流体力学* (朝倉書店, 1992)

となるが、下にゆくほど話題が豊富で、上に行くほど数学的な議論がきっちりしている印象がある。また、和書ではないが、イギリスの応用数学のコースで使用されるテキストである

[1] Acheson, *Elementary Fluid Dynamics* (Oxford University Press, 1990)

は、乱流に関する内容が少ないものの理学系の流体力学の教科書としてお薦めしたい。非線形偏微分方程式としての Navier-Stokes 方程式の数学解析については、本稿ではほとんど触れることがなかった。関心のある読者は、数理流体力学の画期的な著書

[24] 岡本久, *ナビエ ストークス方程式の数理* (東京大学出版, 2009)

を参考にされるとよいだろう。

本稿後半の微小スケールの流体力学については最近の成書

[2] Barthes-Biesel, *Microhydrodynamics and Complex Fluids* (CRC Press, 2012)

がわかりやすい。生物流体力学については、応用数学者による

[15] Lighthill, *Mathematical Biofluidynamics* (SIAM, 1975)

がある．最近の研究を概観するには，

[31] 谷下一夫 & 山口隆美, 生物流体力学 (朝倉書店, 2012)

がわかりやすい．特に微小生物の流体力学については，

[5] Duprat & Stone, *Fluid-Structure Interactions in Low-Reynolds-Number Flow* (Royal Society of Chemistry, 2016)

が最新の書籍であろう．また，レビュー論文

[14] E. Lauga & T. R. Powers, The hydrodynamics of swimming microorganisms, *Reports on Progress in Physics*, 72 (2009) 096601

がよく書かれている．

参考文献

- [1] ACHESON, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [2] BARTHES-BIESEL, D. *Microhydrodynamics and Complex Fluids*. CRC Press, 2012.
- [3] BRENNER, H. The stokes resistance of an arbitrary particle - iii shear fields. *Chemical Engineering Science* 19 (1964), 631–651.
- [4] BRETHERTON, F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* 14 (1962), 284–304.
- [5] DUPRAT, C., AND STONE, H. A. *Fluid-Structure Interactions in Low-Reynolds-Number Flow*. Royal Society of Chemistry, 2016.
- [6] GOLDSTEIN, R. E. Green algae as model organisms for biological fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics* 47 (2015), 343–375.
- [7] GONZALEZ, O., AND STUART, A. M. *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [8] GORIELY, A. *The Mathematics and Mechanics of Biological Growth*. Springer, 2017.
- [9] HAPPEL, J., AND BRENNER, H. *Low Reynold number Hydrodynamics*. Engelwood Cliffs, 1965.
- [10] ISHIMOTO, K. Guidance of microswimmers by wall and flow: Thigmotaxis and rheotaxis of unsteady squirmers in two and three dimensions. *Physical Review E* 96 (2017), 043101.
- [11] ISHIMOTO, K., AND YAMADA, M. A coordinate proof of the scallop theorem. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 72 (2012), 1686–1694.
- [12] JEFFERY, G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society A* 102 (1922), 161–179.
- [13] KANTSLER, V., DUNKEL, J., BLAYNEY, M., AND GOLDSTEIN, R. E. Rheotaxis facilitates upstream navigation of mammalian sperm cells. *eLife* 3 (2014), e02403.
- [14] LAUGA, E., AND POWERS, T. R. The hydrodynamics of swimming microorganisms. *Reports on Progress in Physics* 72 (2009), 096601.
- [15] LIGHTHILL, J. *Mathematical Biofluidynamics*. SIAM, 1975.
- [16] LORENTZ, H. A. Ein allgemeiner satz, die bewegung einer reibenden flüssigkeit betreffend, nebst einigen anwendungen desselben. *Abhandl. theoret. Phys.* 1 (1906), 23–42.
- [17] NOLL, W. Proof of the maximality of the orthogonal group in the unimodular group. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 18 (1965), 100–102.

- [18] PEDLEY, T. J., AND KESSLER, J. O. Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms. *Annual Review of Fluid Mechanics* 24 (1992), 313–58.
- [19] SHAPER, A., AND WILCZEK, F. Geometry of self-propulsion at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 557–585.
- [20] STONE, H. A., AND SAMUEL, A. D. Propulsion of microorganisms by surface distortions. *Physical Review Letters* 77 (1996), 4102–4104.
- [21] TRUSDELL, C., AND NOLL, W. *The Non-linear Field Theories of Mechanics, Third Edition*. Springer-Verlag, 2004.
- [22] TRUSDELL, C. A. *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Second Edition*. Academic Press, 1991.
- [23] YARIV, E. Self-propulsion in a viscous fluid: arbitrary surface deformations. *Journal of Fluid Mechanics* 550 (2006), 139–148.
- [24] 岡本久. ナヴィエ・ストークス方程式の数値. 東京大学出版, 2009.
- [25] 岡本久・中村周. 関数解析. 岩波書店, 2006.
- [26] 久田俊明. 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎. 丸善出版, 1992.
- [27] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 1973.
- [28] 佐野理. 連続体の力学. 培風館, 2000.
- [29] 石本健太-山田道夫. 微生物の運動と流体力学：帆立貝定理とその破れ. 数理解析研究所講究録 1796 (2011), 15–21.
- [30] 巽友正. 流体力学. 培風館, 1982.
- [31] 谷下一夫-山口隆美. 生物流体力学. 朝倉書店, 2012.
- [32] 徳岡辰雄. 有理連続体力学の基礎. 共立出版, 1999.
- [33] 日野幹雄. 流体力学. 朝倉書店, 1992.