# はじめに

このモノグラフは「繰りこみ群」、あるいは multi-scale analysis と一般に言われる計算法を、数理科学(物理学から数学まで)を学ぼうという、あるいは専攻する大学の上級から院生を対象として書き下ろしたものである「繰りこみ群」というものは一種のプラグマティカルな計算技術であるが、研究対象によって千変万化に変わるので系統的な学問という訳にはいかない恨みがある。

しかもこの技法は計算技法としては、我々が直面する実解析的難問を解きうる最終兵器にも近い 重さをもっていて、それゆえに初心者を怖気づかせる響きをもっている. 実際我々もこの種の論文 を読むときには、大変な計算と評価がいるなと、一瞬身構えるのも確かである.

他方これが単なる計算技術であるというのも正しくない  $^{[57]}$  であろう.マクロな我々の系は,素粒子やストリング (正しいとして) を支配する微視的方程式から粗視化をへて(究極理論  $\to$  量子場の理論  $\to$  アンダーソン局在 + シュレディンガー方程式  $\to$  ボルツマン方程式,統計力学,etc. ) 得られると期待されるが,これは繰りこみ群の世界である. たとえば文献 [14] を見よ.

というわけで、このモノグラフをどのように構成するか、幾分悩んだのであるがここでは多種多様な側面、物理的な意図のはっきりしている問題と、数学的に面白そうな問題から題材をえらび、そこで使われるアイデアと典型的計算法を並べ、その「問題の所在地」、「計算の仕方」を身を持って感じてもらうことにした. ただ繰りこみ群を使って完了した仕事は少なくはないとしても、一つ一つが大掛かりな論文で簡単に紹介できるものは多くない. というわけで幾分表面的な紹介に終わったかも知れないことを危惧している. 又自分の関与した仕事のいくつは未完成なので、読者を迷路に迷い込ませないよう、教科書の枠を逸脱しないように気を配った(つもりである).

繰りこみ群はかなり昔から物理学のテキストには掲載されており、K . Wilson によれば、Bogolyubov-Shirkov の 有名な教科書 [4] の神秘的な章(第 8 章)が彼をしてその研究に当たらせたとそのノーベル賞記念講演 [80] の中で述べている.そこでは 4 次元の量子電気力学(これは摂動計算で発散が現れその処理に朝永先生が繰りこみ理論を開発されたので日本人もその名前を知っているが)における発散処理に導入される高運動量切断  $\Lambda$  と繰り込まれる前の裸の結合定数  $\alpha_0$  の関係が論じられ、この理論は結局高運動量切断  $\Lambda$  をはずす  $(\Lambda \to \infty)$  と破綻するという,すなわち裸の 電荷の 2 乗が負になってしまうという L . Landau の議論が与えられている.この議論は洗練されて Callan-Symanzik 方程式として,現在に伝わっている.

この議論は場の理論のモデルは後述する「漸近的自由な理論」しか存在しないという conventional wisdom (便宜的知恵) のはしりであろう.

これから暫くたって、L . Kadanoff や B . Widom 達の臨界現象のスケーリング則の分析やブロックスピン変換のアイデアを 1970 年代に K . Wilson  $[^{78}]$  が 統一的に分析、繰りこみ群の形にまとめたように思われる。すなわち相転移や臨界現象であらわれる物理量の発散のさまざまな指数をブロッ

クスピン変換の流れ,スケーリングという概念で総括的にまとめ,かつ当時問題になっていた色々な統計学的モデルに現れる臨界指数を数値的に計算してノーベル賞を受賞して,一般の人(物理学者や数学者)に知られるようになった.

ほぼ同じころ、量子色力学の研究から、この理論が今までのものと異なって「漸近的自由な理論」であり、Landau の否定的結論に対抗しうる少ないモデルのひとつであることが分かった.この研究は当時実験的に検証されていた、高エネルギーでは粒子の相互作用が自由場のように見える (実効的結合定数が零に見える) 深非弾性散乱の実験を説明するためには極めて有効なアイデアであった.

このころから繰りこみ群は数学者や数理物理学者の頭に「解析の道具に使えるもの」というような発想が過ぎるようになり、姿や形をさまざまに変えて使われてきた.

繰りこみ群とはなにかと一言で言うのは難しいかもしれないが結局、自然現象は同じ量でもいろいろなスケールからなり、それらが非線形にあらみあって変動することが多い。その分析のため一気加勢に積分できる例はまれで、一方のスケールの自由度から積分または計算していくことが多い。このときもしも、システムの変化を少ないパラメータの変化に入れ込み、その流れがコントロール可能なときシステムの全容が分かると期待される。これは筋書き通りいけば誠に素晴らしく、自由度が無限大の場の理論や統計力学モデルでは、厳密可解などのモデルを除けば、殆ど唯一無二の方法かもしれない。我々が十分賢く忍耐強ければ複雑な系に汎用的に使えるかもしれないが、いかんせんこの複雑さは人間の忍耐に挑んでいるかのようである(文献[62]、p. 290。)

読者は、この議論の進展にともなって、これら方程式の解は配意空間(座標空間)と運動量空間を変数からなる関数の積分を通して得られ、その計算を配意空間で局所化していて計算しやすい関数に分解して行っていることに気がつくだろう。これは wavelet の概念であり、Feffermann が微分方程式の固有値の漸近分布(Weyl の定理)に相空間の巧妙な分解を用いたことはよく知られる。これは繰りこみ群的発想である。

同じ発想で、この配意空間で積分するとき、 $\exp[-\beta H(\phi)]$  すなわち、エネルギーと、それを実現する空間の体積、すなわちエントロピーでその配位の寄与は決まるが、これも繰りこみ群的発想である。 たとえば J. Fröhlich と T. Spencer による難解にしてエレガントな二つの論文、Kosterlitz-Thouless 転移の存在証明 [16] [17] と ランダムポテンシャルが十分大きいときの Anderson 局在の証明 [18] はこの意味で、きわめて繰りこみ群的な哲学に基礎をおいている。さらに配位空間という概念から離れても、微分方程式や作用素論の中でも使われている  $^{[3]}$  [56]、 $^{[57]}$  .

数理物理学と異なって,物理学では上の一つ一つのスケールでの積分での代わりに,無限に薄いスライス(dt)で積分し,無限小のスケール変換を考え(非線形)漸化式にあたるものを微分方程式に変え,非線形方程式を研究する場面が多い.これはこの講義録でも扱うが,このようにして 25年以上も前に Friedan が 多様体上に値をとるスピン模型(シグマ模型)を考え,繰り込み群方程式を得た.これは Ricei Flow 方程式であった.Ricei Flow 方程式 [58], [59] は以下の非線形の発展方程式 (弱放物型である)

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2R_{ij}(g)$$

を意味する. ここで  $g_{ij}$  は 多様体 M の Riemann 計量,  $R_{ij}$  はあとで述べる Ricci テンソルである (原論文は [58], [59], 解説論文は [46]). いったい Ricci flow とは何か, なぜここに表われたか,

という疑問が出てくる. 我々はこれを d 次元の多様体に値をとるスピンモデルの繰りこみ群方程式をもとに分析し、Ricci flow の特異点が相転移点に他ならないことを示す. そしてスピン系の統計力学の視点からこの問題を再考したい.

さて繰り込み群が期待される分野は、前世紀からの難問である、Navier-Stokes 方程式が、定常流やある場合には乱流を、はたまた、乱流の場合のエネルギー拡散のコルモゴロフ則からのずれを記述できるかという問題や、物理学者は誰も疑わないクォーク粒子の幽閉問題や、低次元でのシグマ模型での粒子の質量の自発的生成の問題である.このクォーク粒子の幽閉やシグマ模型の質量の自発生成のドグマは余りに強いが上に、誰も「少し変わった人」を除いては反対を唱えないが、これらのドグマが非常に壊れやすい直感の上にしか成り立っていないのも確かである.これらの問題にこのモノグラフの中でけりがつけられれば素晴らしいのだが、それほど甘くないのも確かである.これらについては中途半端であるが、現状報告にとどまった.

結論的にいうと、繰りこみ群というのは、無限次元の空間や自由度が駆け巡る世界での計算法である. それは殆ど不可能であるが、システムがその中でどの方向を好むかに定めを着けてこつこつと流れからずれないように計算していくのである. その流れや計算法はモデルによって様相を変え、それを見極めるのがまず第一歩である. この講義録では幾つかの典型的モデルにおいてどう考察し、流れを見極めるかを紹介したい.

この分野の仕事は昔からかなりの量の計算を必要として、最近はとみにその傾向が強いかもしれない.いたずらに複雑な計算はしないとしても、「複雑難解な計算の果てに真理が見える」というのも否定し得ないことである「神は細部に宿る」ということであり、これに学問の真髄を見る方もおられ、美を感ずる方もおられることは確かである.私はこれは一つの哲学で素晴らしいと思う.

しかしながら他方、読者がこれをみて「こんな計算をしないと仕事ができないのはいやだな」と 思われるのも不本意である.そこでこの講義録では、できるだけ簡単な計算で済ませられるよう、流 れに必要な計算問題を文中に紛れ込まして、流し読みできるように書いたつもりである.

Richtiges Aufassen einer Sache und Missverstechen der gleichen Sache schliessen einander nicht vollständig aus . F. Kafka

#### 教科書若しくは参考書

この「前書き」の最後にこの分野での標準的な教科書を掲げる. この中のいくつかは本文中でも引用されている. この全てが繰りこみ変換(群)に直接関連している訳ではないが,基礎知識として重要と思われるものも含めてある. 非常にたくさんあるが,自分が目を通したものに限定した.直接に関連しているものは引用文献として最後に掲載してある.

#### 物理学的側面では

1. Constructive Quantum Field Theory, Springer Lec. Notes in Phys. 25, (1973). The 1973

- Ettore Majorana Intl. School of Math. Phys., ed. by G.Velo and A.S.Wightman
- J.Glimm and A.Jaffe, Quantum Physics, A Functional Integral Point of View, Springer Verlag (1981)
- 3. D.Ruelle, Statsitical Mechanics, Benjamin, (1969)
- 4. B.Simon, The  $P(\phi)_2$  Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press (1974)
- V.Rivasseau, From Perturbative to Constructive Renormalization, Princeton Univ. Press (1991)
- 6. Mathematical Quantum Field Theory I: Field Theory and Many-Body Theory, J.Feldman et al. eds., CRM Proceedings & Lecture Notes vol.7 (1993)
- Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories, Les Housches, Session XLIII, 1984, K.Osterewalder and R.Stora, eds. (Elsevier Sci. Publ., 1986)
- 8. E. Seiler, Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics, **159**(1982) Springer (Berlin)

#### 数学的側面では

- 1. B.Simon and R.Reed, Methods of Modern Mathematical Physics, vol.1–4, Academic Perss (1972)
- 2. B.Simon, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press (1979)
- 3. E.Lieb and M.Loss, Analysis, GSM vol. 14, (Amer. Math. Soc. 1997)
- 4. Inequalities, Selecta of H.Lieb, Ed. by M.Loss an M.Ruskai, (2002) Springer 上手に書かれた入手が容易な日本語の教科書もあって、このモノグラフを書くにあたって大変参考にさせていただいた.
- 1. ランダムウォークとくりこみ群, 服部哲弥, 共立出版, (2004)
- 2. 統計力学, 田崎晴明, 培風館, (2008)
- 3. ゲージ場の量子論 < 1 >, < 2 >, 九後汰一朗, 培風館, (2007)
- 4. 場の量子論と統計力学, 新井朝雄, 江沢洋, 日本評論社 (1988)
- 5. ゲージ場の量子論, 近藤慶一, サイエンス社, SGC ライブラリ, No.45
- 6. 超関数・フーリエ変換入門、磯崎洋、サイエンス社、SGC ライブラリ、No.77

これらは其々に良書であるが、特に物理学側面で引用した Les Housches 講義録 [7] の J.Fröhlich の講義は無限大自由度の系をいかに扱うかという点で、今でも新鮮な問題と発想を提起していて、「くりこみ群的発想」の自然さが理解できる.Lieb 先生の不等式の集大成の書は、これとは相補的であるが、物理学の研究から派生する問題の多様さと、それを解決する数学的発想の自由さは感動的である.数理物理学にも色々な流れがあるが、それらの原点ともいえるこの二人の碩学の書は古びることは無いと信じられる.

# 目 次

第1章	繰りこみ群の原型	1
1.1	イジングモデルまたは $\lambda\phi_d^4$ での繰りこみ群 $\dots\dots$	2
1.2	Dyson 近似	6
1.3	Dyson 近似と $N \to \infty$ 模型	10
	1.3.1 $d=2$ の場合	12
	1.3.2 $d=4$ の場合	13
	1.3.3 Dyson 近似における相関関数 $(d=4)$	15
1.4	弱結合領域での解析	18
1.5	強結合階層ボソン系	23
1.6	実際の $\phi_d^4$ 系の議論 $\dots$	27
1.7	その他の $\phi_d^{2n}$ 模型 $\dots$	29
第2章	微分方程式と繰りこみ群	31
2.1	微分方程式への展開	31
2.2	シュレディンガー方程式の低励起状態	32
2.3	微分方程式とブロックスピン変換	34
	2.3.1 Dyson 階層近似	36
2.4	シュレディンガー方程式の階層近似	37
	$2.4.1$ $a_0>0$ の場合	38
	$2.4.2$ $a_0 < 0$ の場合	40
	$2.4.3   \phi $ が大きい所での寄与 $\dots\dots\dots\dots\dots$	41
	2.4.4 遷移領域	42
	$2.4.5~~ \phi $ が小さい所での寄与 $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	42
	2.4.6 繰り返しと全体の流れ	43
	$2.4.7$ $E_2-E_1$ の評価 $\dots$	44
2.5	WHA 方程式の導出	44
第3章	乱流と繰りこみ群	49
3.1	どこでスケール不変性が・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
3.2	Navier-Stokes (NS) 方程式	
3.3	NS 方程式 の積分方程式化と漸化式	50
3.4	単純化	52

3.5	固定点の存在 58					
3.6	収束の証明					
第4章	ペレルマンの理論と統計力学 69					
4.1	曲面の繰りこみ理論					
4.2	スピン模型達とその連続極限 71					
4.3	発散項と繰り込み					
4.4	繰りこみ群方程式					
4.5	ペレルマン理論と統計力学82					
第5章	漸近的自由の起源: $\sigma$ モデル 91					
5.1	2 次元 σ 模型					
5.2	2 次元実 σ 模型の分析					
5.3	W <sub>1</sub> の導出の準備					
	5.3.1 φ と ψ のプロックスピン					
	5.3.2					
	$\hat{H}_0^{-1}$ の構造と積分可能性 $\dots \dots \dots$					
5.4	大場領域と大変動領域の処理					
	$5.4.1$ 小さい $arphi_1$ 領域での $\psi$ 積分 $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $112$					
	$5.4.2$ 大きい $\psi=\Psi_1+Q ilde{\psi}_0$ からの寄与 $\dots\dots\dots\dots\dots$ 113					
5.5	ポリマー展開と評価					
	5.5.1 行列式と: $arphi arphi$ :の展開					
	5.5.2 主要項					
5.6	ブロックスピン変換による流れ					
第6章	クォーク粒子幽閉:未解決問題を考える 129					
6.1	クォーク粒子粒子の幽閉とは					
6.2	繰りこみ群でどう扱うか131					
6.3	階層模型近似と実際の系132					
6.4	desperate physicists					
	6.4.1 Tomboulis 氏のシナリオ					
	6.4.2 間違いは直せるか					
	6.4.3 解決策?					
6.5	何が問題なのか $\dots$ $147$					
第7章	おわりに 149					
参考文南	$^{\dagger}$ 151					

索 引 156

# 第 1 章

# 繰りこみ群の原型

いわゆる「場の理論」や「統計力学模型の相転移」などを研究する場合,対象すなわち場の変数  $\phi(x)$  やスピン  $s_x$  の配置空間 x は無限に広がり,かつ物理法則によって相互に関係している.すなわち  $(\phi(x)-\phi(y))^2$  とか  $s_xs_y$  というように.これは粒子達がエネルギーを交換すること,または運動量を交換することになり,結局これらの系では広大無辺に広がった相空間で相互作用が絡み合って起こり,そこで議論する必然性が生じてくる.

例えばイジングモデル (Ising model) は強磁性体あるいはフェロマグネテット (ferromaget) のモデルで

$$\langle s_{\zeta} s_{\xi} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_x = \pm 1} s_{\zeta} s_{\xi} \exp[-\beta H(s)],$$

$$H(s) = -\sum_{|x-y|=1} s_x s_y,$$

$$Z = \sum_{s_i = \pm 1} \exp[-\beta H(s)]$$

で定義される. パイ中間子の相互作用を記述すると想定される d 次元の  $\phi_d^4$  模型は形式的に,以下の汎関数積分で定義される:

$$S(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \frac{1}{Z} \int \prod \phi(x_i) \exp \left[ -\frac{1}{2} Z_0 \langle \phi, (-\Delta) \phi \rangle - \int \left( \frac{1}{2} m_0^2 : \phi^2 : (x) + \lambda_0 \int : \phi^4 : (x) \right) dx \right] \times \prod d\phi(x).$$

(  $E=R^d$  の各点 x に対しスピン変数  $s_x=\pm 1$  の代わりに , 積分変数  $\phi(x)\in R$  が対応していると考えている .) 我々はイジングモデルでは  $|\xi-\zeta|\to\infty$  での振る舞いを ,  $\varphi^4$  模型では相関関数といわれる  $S(x_1,\cdots,x_n)$  の存在や振る舞いを知りたい . イジングモデルでは温度  $T=\beta^{-1}$  が高かったり . 場の理論では

結合定数  $\lambda_0$  が小さければ,比較的簡単にこれらは指数的に減少することが示される.(ただし場の理論の場合には,単純ではない).これは高温展開と言われる標準的方法である.他方  $\varphi^4$  模型のほうは連続時空の上では処理が難しく最初から発散があるので,統計力学モデルのように格子点の上で考えるのが分かり易いと思われる.

広大無辺の相空間でと言ったけれども、そこで積分を一気に行うのは厳密可解モデルでない限りはほぼ不可能であり、実際には逐一段階的に行うことになる.しかしこれも計算が次々込み入ってくれば、ある段階で壁にあたることは容易に想像がつく.

ではいかなる場合にこれが可能かというと,ある一段の計算の後にあるスケール変換を行えば,系が類似性を保つような場合には,この相空間上での積分が厳密に遂行できる.別の言葉で言えば,有限個のパラメータに系の変化が押し込められるような場合である.

実際私たちは後で述べるよう長距離まで相関が残るような臨界的な状況に興味がある.  $\xi$  と  $\zeta$  が遠く離れていれば、この計算は格子空間  $Z^d$  を一辺の長さが L である立方体で覆い、不用な自由度を積分して落とす変換でなされる.これは decimation (相互作用の消去)でありブロックスピン変換に他ならない.

繰りこみ群の出自からいえば、場の理論における発散とその処理から始めるべきかもしれないが、ここでは数理科学一般への応用を目的とするので、比較的分かり易い統計物理や格子上の場の理論の構成法への応用から始めたい.

# 1.1 イジングモデルまたは $\lambda \phi_a^4$ での繰りこみ群

 $\phi_d^4$  模型を考えよう . 勿論時空は連続であるが今述べた理由で , ここでは全てを格子の上に乗せて  $x_\mu$  での偏微分を  $\mu$  方向差分で置き換える:

$$R^d \to Z^d$$
,  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x) \to f(x + e_\mu) - f(x)$ ,  
 $e_\mu = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $((e_\mu)_i = \delta_{i,\mu})$ 

そして

$$\frac{1}{Z} \int \exp\left[-\sum_{x \in Z^4} \left(\frac{1}{2} m_0^2 \phi^2(x) + \lambda_0 \phi^4(x)\right)\right] d\mu_0(\phi),$$

$$d\mu_0(\phi) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} (\phi(x + e_\mu) - \phi(x))^2\right] \prod_{x \in Z^d} d\phi(x)$$

$$\equiv \exp\left[-\frac{1}{2} \langle \phi, (-\Delta) \phi \rangle\right] \prod_{x \in Z^d} d\phi(x)$$

の積分で , 連続時空になるように極限を考えるのが普通である . ここで  $(-\Delta)_{ij}=2d\delta_{ij}-\delta_{1,|x-y|}$  は格子空間  $Z^d$  上のラプラシアンで ,  $d\geq 3$  ならば

$$\int \phi(x)\phi(y)d\mu_0(\phi) = \frac{1}{-\Delta}(x,y)$$

$$= \int \frac{e^{ip(x-y)}}{\sum 2(1-\cos p_i)} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sim \frac{1}{(d-2)|S_d|} \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}},$$

ここで

$$\alpha = (d-2)/2, \quad S_d = \{x \in \mathbb{R}^d; ||x|| = 1\}$$

である. ゆえに

$$|S_d| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = \begin{cases} 4\pi & d = 3\\ \pi^2 & d = 4 \end{cases}$$

である.これは d 次元格子空間上の Poisson 方程式の基本解であり,クーロンポテンシャル又は重力ポテンシャルである. $|x-y| \to \infty$  で, $R^d$  上の普通の基本解に戻る.

問題  ${f 1.1.1}$  ポアッソン方程式  $(-\Delta)f=u$  の基本解が前式で与えられることを示せ.

単位格子空間  $Z^d$  の中に任意に大きな正方領域  $\Lambda_0$  をとり,これを格子点  $LZ^d$  を中心に  $L imes \cdots imes L$  のブロック  $\square$  に切りわけ,

$$\Lambda_1 = \frac{1}{L} \left( \Lambda_0 \cap LZ^d \right)$$

としておく. これは  $\Lambda_0$  を L だけスケールダウンした単位格子空間である. この操作は続けられて  $\Lambda_2, \cdots$  が得られる .

 $\Lambda_0\supset\square$  内の  $L^d$  個のスピンの重み付き平均を  $\phi_1(x)$  に固定し、残りの自由度で積分、この手続きを n 回繰り返し続けていくと , 距離が  $L^n$  での作用 (action) が得られる . すなわち

$$\phi_1(x) = (C\phi)(x),$$

$$(Cf)(x) = \frac{1}{L^{d-\alpha}} \sum_{\zeta \in \sqcap} f(Lx + \zeta)$$

とする . ただし  $\zeta$  は原点中心 , 大きさ  $L^d$  の立方体  $\square$  の内の点である. ブロックスピン変換作用素 C は  $\phi(x)$  をブロック内で一種の平均操作をおこない , 座標のスケーリングをおこなうが , これはクーロンポテンシャルを , つまりガウス測度  $d\mu_0$  を ( ほぼ ) 不変にする:

$$\int \phi_1(x)\phi_1(y)d\mu_0 \sim \sum_{\zeta,\xi} \frac{1}{L^{2d-2\alpha}} \frac{1}{|Lx - Ly + \zeta - \xi|^{2\alpha}}$$
$$\sim \frac{1}{|x - y|^{2\alpha}}$$

ここにある精神は,スケール変換に対して規則的に(共変的に)かわる系を 基準にして,そこからのずれを摂動的に処理しようということである.今の系

1.1 イジングモデルまたは  $\lambda\phi_d^4$  での繰りこみ群 3

では,現実の系はガウス的な自由場の近傍にあり,ガウスからの摂動によって得られるとの期待である.

しかし残念ながら事実はこれほど甘くなく,これが成り立つのは物理的には あまり面白くない系に限ることが理解されてきた.これについては後で述べる.

逆に  $\phi(x)$  はブロックスピン  $\phi_1(x)$  とその周りの揺れ (fluctuation)  $z_0(x)$  の一次結合で記述される:

$$\phi(x) = (A_1\phi_1)(x) + (Qz_0)(x)$$

ここで  $\{z_0(x); x \in \Lambda_0 \backslash L\Lambda_1\}$  は  $Z^4 \backslash LZ^4$  に生きているガウス分布に従う揺動場 (fluctuation field) で,短い相関をもつ(相関長  $\sim L$ ).  $A_1,Q$  は、

$$A_1: R^{\Lambda_1} \to R^{\Lambda_0}, \quad Q: R^{\Lambda_0 \setminus L\Lambda_1} \to R^{\Lambda_0}$$

である写像で

$$(CA_1)(x) = \sum_{y} \frac{1}{L^{d-\alpha}} A_1(x, y) = 1, \quad (CQ)(x) = 0$$

を満たせばいいことが分かる.Q の性質は,揺動場はそのブロック内の平均が零であることを保障する.これらの表現は一意的ではないが,K.Wilson のブロックスピン変換を文字通りに踏襲すれば, $\square_{x_1}$  を  $x_1\in L\Lambda_1$  を中心とするブロックとして,z と  $\phi$  が局所的に関連するよう

$$(Q)_{xy} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & x=y \in \square_{x_1}, x_1 \in L\Lambda_1 \\ -1 & x,y \in \square_{x_1}, x=x_1 \in L\Lambda_1 \\ 0 & \text{上以外} \end{array} \right.$$

と取る  $(Q:R^{\Lambda \setminus L\Lambda_1} \to R^{\Lambda}$  なので  $y \notin L\Lambda_1)$ . 実際

$$\langle A_1 \phi_1 + Q z_0, (-\Delta)(A_1 \phi_1 + Q z_0) \rangle$$
  
=  $\langle A_1 \phi_1, (-\Delta) A_1 \phi_1 \rangle + \langle Q z_0, (-\Delta) Q z_0 \rangle$ 

を要求すれば

$$A_1 = G_0 C^+ G_1^{-1}, \quad G_1^{-1} = [Q^+ (-\Delta)Q]^{-1}$$

が得られる.これは継続して計算できて ,  $\phi_1,\cdots,\phi_n$  達も同様にガウス変数への分解を持つ:

$$\phi_n(x) = (A_{n+1}\phi_{n+1})(x) + (Qz_n)(x) \tag{1.1.1}$$

$$A_{n+1} = G_n^{-1} C^+ G_{n+1} (1.1.2)$$

すなわち  $\phi$  は短距離相関をもつ独立なガウス変数  $\{z_n(x)\}$  に分解される:

$$\phi_0(x) = \sum (\mathcal{A}_n Q z_n)(x), \quad \mathcal{A}_n = A_n \cdots A_1$$

4 第1章 繰りこみ群の原型

長さ  $L^n$  以下の自由度を全て考慮して得られたシステムは、以下の実効的相互作用を持つ:

$$\exp[-V_n(\phi_n)] = \int \exp[-V_{n-1}(A_n\phi_n + Qz_{n-1})]d\mu_{\Gamma_{n-1}}(z_{n-1}),$$

$$d\mu_{\Gamma_{n-1}}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, \Gamma_{n-1}^{-1}z \rangle\right] \prod dz(x),$$

$$\Gamma_{n-1} = Q^+G_{n-1}Q.$$

各ステップにおいて, $z_n(x),x\in\Lambda_n\backslash L\Lambda_{n+1}$  は 2 点相関が指数的に減少するガウス確率変数となるが,これは  $Q^+G_n^{-1}Q$   $(G_n^{-1}\sim-\Delta)$  が零固有値を有しない正の演算子で,最低固有値が  $1/L^2$  程度であることによる.実際そのフーリエ変換を見れば,その関数は運動量空間では,実軸を含んだ細い複素領域で解析的であることが証明される.以下の問題を解いてみよ. $(G_m$  の場合, $L\to L^m$ とすればよい. $\Gamma_m$  も同様である.)

問題  ${\bf 1.1.2}$   $G_1$  のフーリエ変換  $\tilde G_1(p)$  を求め,次式で与えられることを示せ. ただしここではブロックのサイズ L を奇数にとり,微小な質量項  $m_0^2$  があるとしている( $m_0^2>0$  は考えている空間  $\Lambda$  のサイズの逆数ほどである.)

$$\tilde{G}_1(p) = \sum_{n} \frac{1}{L^2 m_0^2 + \sum_{i} 2L^2 (1 - \cos((p_i + 2\pi n_i)/L))} \times \prod_{i=1}^{d} \frac{\sin^2 p_i/2}{L^2 \sin^2((p_i + 2n_i\pi)/2L)}, \quad p_i \in [-\pi, \pi)$$

ただし, $n=(n_1,\cdots,n_d)$ , $n_i=0,1,\cdots,L-1$ .これから得られる  $G_1(x,y)$ は( $m_0^2\to 0$  として),ほぽ

$$G_0(x,y) = \int \frac{e^{ip(x-y)}}{m_0^2 + \sum 2(1-\cos p_\mu)} \prod \frac{dp_i}{2\pi}$$

に等しいことを確かめよ (これを自己相似性 (self-similarity) という.)

問題 1.1.3  $\Gamma_0(x,y), \, x,y \in \Lambda_0' \equiv \Lambda_0 \backslash L\Lambda_1$  についてその性質、そのフーリエ変換が以下のようになることを示せ .

$$\Gamma_0^{-1} = Q^T G_0^{-1} Q, \quad \Gamma_0 = G_0 - G_0 C^T G_1^{-1} C G_0.$$
 (1.1.3)

さらに

$$\begin{split} &\Gamma_0(x,y) = \\ &\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{G}_0(p) e^{ip(x-y)} - \sum_{|r_i| < L/2} \frac{\tilde{G}_0(p) \tilde{G}_0(p + 2\pi r/L)}{L^2 \tilde{G}_1(Lp)} \right. \\ &\times \left. \prod_{\kappa=1}^d \left( \frac{\sin(Lp_\kappa)}{L \sin p_\kappa/2} \times \frac{\sin(Lp_\kappa)}{L \sin(p_\kappa + 2\pi r_\kappa/L)} \right) \right] \end{split}$$

1.1 イジングモデルまたは  $\lambda\phi_d^4$  での繰りこみ群  ${f 5}$ 

ただしフーリエ変換では単純のため, $\Lambda_0$  を無限に広がった単位格子  $Z^d$  とした. $y\in \Box_0$  として

$$\tilde{\Gamma}_0(p,y) = \sum_{r \neq 0} \frac{\tilde{G}_0(p)\tilde{G}_0(p+2\pi r/L)}{L^2\tilde{G}_1(Lp)} \prod_{\kappa=1}^d \left[ \frac{\sin(p_{\kappa}/2)}{L\sin(p_{\kappa}/2+\pi r_{\kappa}/L)} \times \left( \frac{\sin(Lp_{\kappa}/2)}{L\sin(p_{\kappa}/2)} e^{-2\pi i r y/L} + \frac{\sin(p_{\kappa}/2)}{L\sin(p_{\kappa}/2+\pi r_{\kappa}/L)} \right) \right]$$

を示せ、ただし  $r_{\kappa}=0,1,\cdots,L-1$  . さらに

$$\frac{\tilde{G}_0(p)\tilde{G}_0(p+2\pi r/L)}{\tilde{G}_1(Lp)}$$

が  $r\neq 0$  ならば , 実軸を含む幅  $O(L^{-1})$  の複素領域で解析的であり ,  $\{(p_1,\vec{p})\in C\times R^{d-1}; |{\rm Im}\,p_1|< c, |p_i|\leq \pi\}$  で一様に有界であることを示せ .

問題 1.1.4  $V_0=0$  として  $Z^d$  から始めてブロックスピン変換を繰り返せば,ガウス測度  $d\mu_0(\phi)$  はガウス測度  $d\mu_\infty(\phi)$  に収束する.ただし  $d\mu_\infty$  は平均 0,そして以下の共変で定義されるガウス測度である.

$$\int \phi(x)\phi(y)d\mu_{\infty} = \kappa_d \int_{\square_{\pi}} \int_{\square_{\pi}} \frac{1}{|x+\zeta-y-\xi|^{2\alpha}} d\zeta d\xi$$

ただし  $\Box_x$  は  $x\in Z^d$  を中心とする一辺の長さが 1 の立方体であり, $\kappa_d$  は前述の (d-1) 次元球面の表面積  $|S_d|$  で記述される定数である.

## 1.2 Dyson 近似

前述の述べたブロックスピン変換と呼ばれる変換(半)群は、見かけは単純に見えるが、その解析ははるかに難しく、多くの場合完成していない。この分野で仕事してみようという方向けの、細かい議論はこの章の最後にその一部を記述するとして、まず「階層模型」またはヒエラルキカル模型(hierarchical model)といわれる繰りこみ変換が比較的容易に遂行される系を導入する。これは当初F.Dyson が 1 次元で相転移が起こり、かつ厳密に解けるモデルを考えるために導入した[12]。ちなみに Dyson 先生は込み入った問題の本質を見抜き単純化できる天才である。

この系では d 次元の格子ラプラシアン

$$\langle f, (-\Delta)g \rangle = \sum_{x,e_{\mu}} (f(x+e_{\mu}) - f(x))(g(x+e_{\mu}) - g(x))$$

を以下のように置き換える.まず $x \in Z^d$ に対して、

$$x_n = [x/L^n] = \{[x_\mu/L^n]\}_{\mu=1}^d$$
  $[x_\mu/L^n] = x_\mu/L^n$  に最近接の整数  $\alpha = (d-2)/2$ 

と定め、Q 作用素を  $[-L/2,L/2)^{\times d} \cap \Lambda_0$  の上で

$$Q(x) = \pm 1, \quad \sum_{x \in \square} Q(x) = 0$$

として、前式に習って  $\phi(x)$  を独立なガウス確率変数  $\{z^{(n)}(x); x \in Z^d\}$  で表すことができる.

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-n\alpha} Q(Lx_{n+1} - x_n) z^{(n)}(x_{n+1})$$
$$\int z^{(m)}(x) z^{(n)}(y) d\mu_0(\phi) = \delta_{mn} \delta_{xy}$$

この表記でわかることはスケール  $L^n$  での単位ボックス  $\square$  には 一自由度のガウス変数  $z^{(n)}(x_{n+1})$  が乗っていて、それが  $\pm 1$  で加わっているのである.これから形式的に

$$d\mu_0(\phi) = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \exp\left[-\frac{1}{2}z^{(n)}(x)^2\right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

であり、これは今の場合簡単に示される

$$z^{(n)}(x) = L^{-d} \sum_{y} Q(y - Lx)(C^{n}\phi)(y)$$

を用いて  $d\mu_0(\phi)$  は

$$\exp\left[-\frac{L^{-d}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}L^{-n(d+2)}\sum_{x\in\Lambda_n}\left(\sum_{y\in\Box_{Lx}}Q(y-Lx)(\sum_{z:z_n=y}\phi(z))\right)^2\right]$$

$$\times\prod d\phi(x) \tag{1.2.1}$$

と表されることがわかる.これは,Q は一辺の長さが L の箱の中で,+1 と -1 の値を同じ数だけ取るので,その形は  $\exp[-\sum_{|x-y|=1}(\phi(x)-\phi(y))^2/2]$  と極めてよく似ているが,長距離相互作用を含んでいる点が異なる.しかし繰り込み変換の骨格を取り出しているので,プロトタイプとしては便利である.これは開発者の名前を冠して,Dyson 型階層模型,またそのあと Wilson が彼のモデルをもとに繰りこみ理論の研究をしたこともあり  $^{[78],[80]}$ ,Dyson-Wilson 型階層模型とも呼んでいる.Dyson はイジングモデルでこれを導入したが,そこでは  $\phi(x)=\pm 1$  である.Dyson の元々のハミルトニアンは以下のようで,一次元格子を  $L=1,2,4,\cdots,2^n,\cdots$ ,と入れ子のように区切ってグループ内で和をとっている.

問題  ${\bf 1.2.1}$  上のハミルトニアンは組み変えることによって、正定数  $K_n>0$  が存在して、次式のような 1 次元格子上の強磁性体相互作用 (フェロマグネティック相互作用) の系に変換出来ることを示せ .

$$\exp\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k} K_n \left(\sum_{i=0}^{2^n - 1} \phi_{k2^n + i}\right)^2 - K_0 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^2\right]$$
 (1.2.2)

さて 2 点間の相関関数は  $(-\Delta)^{-1}(x,y)\sim |x-y|^{-2\alpha}$  に似ている. 実際 k を  $x_k=y_k$  である最小整数とし,  $d(x,y)=L^k$  をこの 2 点の階層的距離 (x,y) を共に含む最小のブロックのサイズ) とすれば

$$G(x,y) \equiv \int \phi(x)\phi(y)d\mu_0(\phi) = \pm L^{-2\alpha(k-1)} + \sum L^{-2n\alpha}$$

ここで右辺に  $\pm$  があるが,右辺は全体として正である.これは系が強磁性的であることの反映である(これは Griffiths 不等式と言われる.問 1.2.1 から明らかである.)さらに階層近似ではあるが,グリーン関数の減少に関しては,階層的距離について確かに  $\sim |x-y|^{-2}$  を表している.次の問題をみよ.

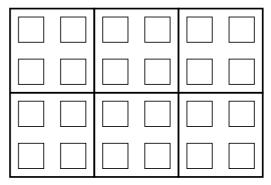


図 1.1 2 次元格子に描かれた階層格子

問題 1.2.2 Dyson 近似は上述のように長距離相互作用をもっている.Dyson 近似を行った Gauss 系 (自由場の系,V=0) では d=4 で

$$G(x,y) \sim \begin{cases} d(x,y)^{-2}, & m_0^2 = 0\\ d(x,y)^{-4}, & m_0^2 > 0 \end{cases}$$

となることを示せ、

さてこの近似ではブロックスピン変換は閉じた形に求まる.

$$\phi^{(n)}(x) = L^{-\alpha}\phi^{(n+1)}(x_1) + Q(x - Lx_1)z^{(n)}(x_1)$$
$$= L^{-\alpha}\phi^{(n+1)}(x_1) \pm z^{(n)}(x_1).$$

ゆえに

$$\exp[-v_{n+1}(\phi)] = \int f(\phi, z) \exp[-z^2/2] dz,$$

$$f(\phi, z) = [g(L^{-\alpha}\phi + z)g(L^{-\alpha}\phi - z)]^{L^d/2}$$

$$g(\phi) = \exp[-v_n(\phi^2)]$$

と閉じた形で漸化式が得られる . これを  $\phi^4$  模型 (又はイジング模型) の Dyson 階層近似という . 出発点をここでは

$$v_0 = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \lambda_0\phi^4$$

と取っておこう.この積分変換は,次元 d によって様相が極めて異なる.ここでは d=4 と d=2 をもっぱら扱うが,d=4 の場合には,大雑把に言って,二つのパラメータ  $m^2$  と  $\lambda$  に押し込められることが分かる.

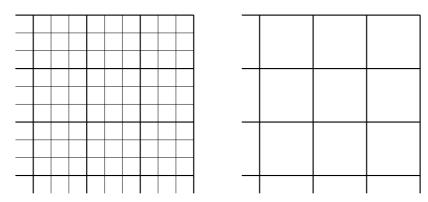


図 1.2 元の格子とブロック, 消去 (decimation) の過程

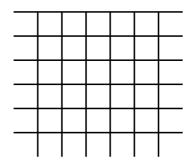


図 1.3 消去されたブロックを元サイズにスケール

注意  ${\bf 1.2.1}$  ここで紹介した方法は , K.Gawedzki と A.Kupiainen が 1980 年代に K.Wilson のブロックスピン変換に基ずく繰りこみ変換法を文字通り厳密にしたものである . 文献 [19] が最初である . 連続空間で行う方法は V.Rivasseau

とそのグループ [62] が開発したが,ここで紹介したものの方が分かり易いと思われる.

## 1.3 Dyson 近似と $N \to \infty$ 模型

さて前節の関数の漸化式を分析するが,一般に  $v_n$  は  $\phi$  に解析的に依存するわけではない. $\phi_n$  が大きいとき, $v_n$  がいかなる領域で解析的かという問題,その領域から外れたところでの振る舞い,それが全体の流れに与える影響の評価を避けるのは難しい.これは large field 問題(large field problem)といって,一般物理学者は余り興味を示さない部分であるが,数学的には避けて通れない部分でもある.この仕事が上手く行くためには,この部分は大変起こりにくいことが示されなければならない.

この部分は込み入った計算になるので後回しにして,積分の労をせずして話の流れを理解できるよう,ここでは(少し胡散臭い)トリックを使う.ここで紹介するのは  $N=\infty$  模型と称するもので,S.K.Ma や 't Hooft によって導入された.上記のモデルで,

$$\phi(x) \to \vec{\phi}(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_N(x)),$$

$$g(\phi) \to \exp\left[-\frac{N}{2}v\left(\frac{\vec{\phi}^2}{N}\right)\right]$$

として以下の漸化式が得られる:

$$\exp\left[-\frac{N}{2}v_{n+1}\left(\frac{\vec{\phi}^2}{N}\right)\right] = \int f_n(\vec{\phi}, \vec{z}) \exp\left[-\sum_{i=1}^N z_i^2/2\right] \prod dz_i.$$

ここで

$$f_n(\vec{\phi}, \vec{z}) = \left[g_n(L^{-\alpha}\vec{\phi} + \vec{z})g_n(L^{-\alpha}\vec{\phi} - \vec{z})\right]^{L^d/2},$$
  
$$g_n(\vec{\phi}) = \exp\left[-\frac{N}{2}v_n(\frac{\vec{\phi}^2}{N})\right]$$

である.回転対称性から

$$\vec{\phi} = \sqrt{N}(\varphi, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{z} = \sqrt{N}(s, \zeta_1, \dots, \zeta_{N-1})$$

として  $u=\sum_{i=1}^{N-1}\zeta_i^2$  とすれば ,  $arphi^2=ec{\phi}^2/N$  に留意して

$$\exp\left[-\frac{1}{2}Nv_1(\varphi^2)\right]$$

$$= \text{const.} \int \exp\left[-\frac{N}{2}\left\{\frac{L^d}{2}v(L^{-2\alpha}\varphi^2 + 2L^{-\alpha}s\varphi + s^2 + u) + \frac{L^d}{2}v(s \to -s) + s^2 + u + (3N^{-1} - 1)\log u\right\}\right] ds du$$

が得られる .N が大変大きいとして一番寄与の大きい点の周りで評価する steep-est descent 法 (鞍点法) に頼れば ,

$$v_1 = \frac{L^d}{2}v(L^{-2\alpha}\varphi^2 + 2L^{-\alpha}s\varphi + s^2 + u) + \frac{L^d}{2}v(s \to -s) + s^2 + u - \log u$$

を最小にする  $s=s_0, u=u_0$  を求め , 代入すればよい

補題  ${f 1.3.1}$  もし v(x) が x>0 で下に凸で ,  $x\to\infty$  で  $v(x)\to\infty$  ならば ,

$$v_1(0, u_0) \le v_1(s, u)$$

である. ただし u<sub>0</sub> は

$$L^{d}v'(L^{-2\alpha}\varphi^{2} + u) + 1 - u^{-1} = 0$$

の一意的な解である.

証明 実際,  $\psi_+ = L^{-2\alpha}\varphi^2 \pm 2L^{-\alpha}s\varphi + s^2 + u$  とすれば,  $u_0$  は

$$\frac{\partial v_1}{\partial u}\bigg|_{u=u_0} = \frac{L^d}{2} [v'(\psi_+ + v'(\psi_-))]_{u=u_0} + 1 - u_0^{-1} = 0$$

を満たすので、

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial s} \right|_{u=u_0} = s \left[ \frac{1}{u_0} + 1 + L^{d-\alpha} \frac{\varphi}{s} [v'(\psi_+) - v'(\psi_-)]_{u=u_0} \right]$$

である.ここで  $(\varphi/s)[v'(\psi_+)-v'(\psi_-)]$  は v が凸であることから正なので,s=0 は一意的な解になる.s=0 とおけば  $L^dv'(L^{-2\alpha}\varphi^2+u)+1-u^{-1}$  はu について単調増加であり, $u_0$  は一意的である.

補題 1.3.2 もし v(x) が x>0 で下に凸で ,  $x\to\infty$  で  $v(x)\to\infty$  ならば ,  $v_1(x)$  もそうである .

証明 まず上で述べたことから

$$v_1(x) = L^d v(L^{-2\alpha}x + u_0) + u_0 - \log u_0 + \text{const.},$$
 (1.3.1a)

$$L^{d}v'(L^{-2\alpha}x + u_0) + 1 - u_0^{-1} = 0. {(1.3.1b)}$$

が成り立つ . (1.3.1b) を微分して

$$L^{d}(L^{-2\alpha} + u_{0}')v'' + (u_{0})^{-2}u_{0}' = 0.$$

これから  $v^{\prime\prime}>0$  ,  $u_0>0$  なので

$$-L^{-2\alpha} \le u_0' \le 0.$$

また (1.3.1a),(1.3.1b) から

$$v_1'(x) = L^{d-2\alpha}v'(L^{-2\alpha}x + u_0). (1.3.2)$$

1.3 Dyson 近似と  $N \to \infty$  模型 11

が得られるので

$$v_1'' = L^{d-2\alpha}(L^{-2\alpha} + u_0')v''(L^{2\alpha} + u_0) \ge 0$$

である . 最後に  $v_1'(x) \geq L^{d-2\alpha}v'(L^{-2\alpha}x)$  なので  $x \to \infty$  のとき  $v_1(x) \to \infty$  .

上記の証明から次のことも明らかである.

補題 1.3.3 もし  $u_0(x)$  が

$$L^{d}v'(L^{-2\alpha}\varphi^{2} + u) + 1 - u = 0$$

の解ならば

$$-1 \le u_0'(x) \le 0$$

である.

これらの結論は  $N o \infty$  の極限では次から次へと , steepest descent の解 , すなわち  $v_n$  を最小にする値を次々代入していけるということである . すなわち

$$v_n(\varphi^2) = L^d v_{n-1} (L^{-2\alpha} \varphi^2 + u_{n-1}) + u_{n-1} - \log u_{n-1} + \text{const.},$$
(1.3.3a)

$$L^{d}v'(L^{-2\alpha}\varphi^{2} + u_{n-1}) + 1 - u_{n-1}^{-1} = 0.$$
(1.3.3b)

かくして

$$v_n'(\varphi^2) = L^{d-2\alpha}v_{n-1}'(L^{-2\alpha}\varphi^2 + u_{n-1})$$

が成り立つ .  $v_n'(x)$  は単調増加なので逆関数  $t_n( au)$  が定義され

$$\tau = v'_n(x) = L^{d-2\alpha} v'_{n-1}(L^{-2\alpha}x + u_{n-1}),$$
  
 $x = \varphi^2 = t_n(\tau).$ 

最初の式から, $L^{-2\alpha}x+u_{n-1}=t_{n-1}(L^{2\alpha-d} au)$ ,さらに  $u_{n-1}=(L^{2\alpha} au+1)^{-1}$ なので漸化式

$$t_n(\tau) = L^{2\alpha} \left[ t_{n-1} (L^{2\alpha - d} \tau) - \frac{1}{L^{2\alpha} \tau + 1} \right]$$

が得られる.これは次元 d,スケールパラメータ  $\alpha=(d-2)/2$  および初期条件  $m_0^2$  にきわめて敏感に依存する.しかもこれは目の子で解けそうである.

1.3.1 d=2 の場合

d=2 ならば  $\alpha=0$  で , 一番単純なケースである . この場合

$$t_n(\tau) = t_{n-1}(L^{-2}\tau) - \frac{1}{\tau+1}$$

$$= t_0(L^{-2n}\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{L^{-2k}\tau+1}$$

$$= m_0^2 + L^{-2n}\tau/2\lambda - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{L^{-2k}\tau+1}$$

が成立する.ここで  $v_0(x)=\lambda(x-m_0^2)^2$  の初期のポテンシャルに対しては,  $au=v_0'(x)=2\lambda(x-m_0^2)$  なので  $x=t_0(\tau)=m_0^2+\tau/2\lambda$  とおいた.最後の式で  $\tau=0$  の近傍をしらべれば,

$$t_n(\tau) = m_0^n - n + (1 + L^{-2} + \dots + L^{-2(n-1)} + L^{-2n}/\lambda)\tau$$

なので,これから

$$\tau = v'(x) = \frac{1}{1 + L^{-2} + \dots + L^{-2(n-1)} + L^{-2n}/\lambda} (x - m_0^2 + n)$$

すなわち、ワインボトル(2 重井戸)型の底の周辺  $x=m_0^2$  にある凹みのの位置が初期条件に関係なく, $x=m_0^2-n$  と漸次縮んでいくのがわかる.このことは 2 次元で O(N) 対称ハイゼンベルグ模型には相転移が無いことを示しているが,これは近似解なので確たることはいえない.この問題は後で詳細に論じたい.

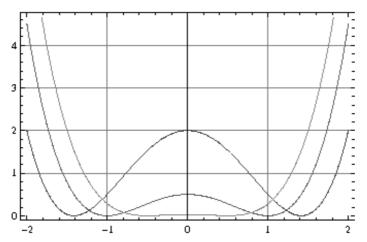


図 1.4 ワインボトル (2 重井戸) 型ポテンシャルと変換

#### 1.3.2 d=4 の場合

d=4 ならば  $\alpha=1$  でる.この場合

$$\hat{t}_n(\tau) = t_n(\tau) - t_n(0) - \tau t_n'(0)$$

$$= t_n(\tau) - [L^{2n}(t_0(0) - \mu_0^2) + \mu_0^2] - \tau (nL^4 + t_0'(0)),$$

$$\mu_0^2 = L^2/(L^2 - 1)$$

と置くのが便利で,このとき漸化式は以下のように求まる.

$$\hat{t}_n(\tau) = L^{2n}\hat{t}_0(L^{-2n}\tau) - L^6\tau^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L^{-2k}}{1 + L^{2-2k}\tau}.$$

すなわち

$$t_n(\tau) = m_n^2 + (nL^4 + \frac{1}{2\lambda})\tau - L^6\tau^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L^{-2k}}{1 + L^{2-2k}\tau}$$
$$m_n^2 = L^{2n}(m_0^2 - \mu_0^2) + \mu_0^2$$

であって,  $\tau = 0$  のワインボトル (2 重井戸) の底の近傍では

$$v_n'(x) = \frac{2\lambda}{2\lambda nL^4 + 1}(x - m_n^2)$$

である.  $m_n^2$  の形から、もし  $m_0^2$  がうまく選ばれていれば、そのあとの漸化式で、 $\lambda_n, m_n$  は収束する流れの上に乗るが、わずかでもずれると差異は指数的に拡大していくことがわかる.このパラメーターの決定理論を、Bleher-Sinai 型議論 と呼んでいる.これは相転移のある系ではいつでも起る現象である.(2 次元モデルでは起っていない.)

今の例では初期パラメータ  $m_0^2$  によって流れが決定され,  $m_0^2=\mu_0^2$  のときには  $v_n(x)$  は x のコンパクトな領域で零に収束する.これは「 $\phi_4^4$  模型の自明性」と言われる現象である.

定理  ${\bf 1.3.4}$   $\ (1)$   $v_n(x)$  は正であり,  $x=m_n^2$  でのみ零になる . さらに  $x\in R$  で下に凸である .

(2)  $m_0^2 = \mu_0^2$  に対して,  $v_n(x)$  は  $x \in R$  の任意のコンパクト集合上で零に収束する .

(3) 
$$\pm U \ \varepsilon = |(x - m_n^2)/nL^4| << 1 \ \text{abif}$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2}(nL^4 + (2\lambda)^{-1})(x - m_n^2)^2 + O(\varepsilon^3)$$

注意 1.3.1 現実問題として,  $N=\infty$  極限での議論はいかほど現実に近いかという問題があって, 通常物理学者は胡散臭いと思っても, あまり考えないところである.上の議論からわかるように, この議論は, 熱力学極限 (無限体積極限  $\Lambda \to Z^d$ ) をとる前に,  $N\to\infty$  をとるのが要点なので, この二つが可換に近ずく(らしい) 高温領域または, 小結合定数領域では妥当性があると思われる.

#### 14 第1章 繰りこみ群の原型

#### 1.3.3 Dyson 近似における相関関数 (d=4)

さてこのモデルでは相関関数  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  なども計算可能である . d=2 モ デル や, d=4 の  $m_0^2>\mu_0^2$  の場合には系の相関関数は質量をもつ自由な階 層モデルのそれに収束し、 $m_0^2<\mu_0^2$  では相関関数は存在しないことが示され る .  $\Lambda=[-L^M/2,L^M/2)^d\cap Z^d$  ,  $\Lambda_n=[-L^{M-n}/2,L^{M-n}/2)^d\cap Z^d$  とすれ ば,  $x_M=[x/L^M]=0, \, \forall x\in\Lambda, \,$ よって  $\Lambda_M=\{0\}$ . おのおのの  $\phi_i(x)$  は  $\phi(x) = \phi^{(0)}$   $\mathcal{O} \exists \mathcal{L} - \mathcal{T}$ 

$$\phi^{(\ell)}(x_{\ell}) = L^{-\alpha}\phi^{(\ell+1)}(x_{\ell+1}) + Q(x_{\ell} - Lx_{\ell+1})z^{(\ell)}(x_{\ell+1})$$

であり、 $\phi^{(M)}=0$  となる.

 $v(x) = \lambda(x - m_0)^2$  から O(N) 不変理論を  $Nv((\vec{\phi})^2/N)$  として定義する. ガウス測度は  $\mathrm{Dyson}$  近似のそれで、-つ-つの  $\phi_i$  のガウス測度の N 個の積

$$d\mu(z^{(k)}) = \prod_{j=1}^{N} \left( \prod_{x \in \Lambda_{k+1}} \exp\left[ -\frac{1}{2} z_j^{(k)}(x)^2 \right] \frac{dz_j^{(k)}(x)}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

である. かくして

$$d\nu_k = \frac{1}{N} \exp\left[-\frac{N}{2} \sum_{x \in \Lambda_k} v_k(\vec{\phi}^{(k)}(x)^2/N)\right] \prod_{i=k}^{M-1} d\mu(z^{(i)})$$

が定義されるが、これは 偶の確率測度で、 $\langle \cdots \rangle_k$  をこの測度に関する期待値と する. とくに  $\langle \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle_0$  である .

M は大きく, k を  $x_k = y_k$  となる最小整数とする . ゆえに  $d(x,y) = L^k$  で ある(階層的距離と言う場合がある).以下 d=4,  $\alpha=1$  とし、

$$\omega_k = \frac{1}{N} \langle (\vec{z}^{(k)})^2 \rangle_k$$

と定義すれば

$$G(x,y) \equiv \frac{1}{N} \langle \vec{\phi}(x) \vec{\phi}(y) \rangle = \pm L^{-2(k-1)} \omega_{k-1} + G_k$$
$$G_k \equiv \sum_{\ell=k}^{M-1} L^{-2\ell} \omega_{\ell}$$

この  $\pm$  は x,y を含む最小の階層ボックスのなかでの符合の違いから来るだけ である (G(x,y) > 0 である.)

この有限サイズボックスに対して  $N \to \infty$  とすれば、前と同様に z を  $\sqrt{N}(s,\zeta_1,\cdots,\zeta_{N-1})$  で置き換えて,  $\sum_{i=1}^{N-1}\zeta_i^2=u$  とすれば前と同様にして

$$\omega_k = \langle u \left( L^{-2} (\vec{\phi}^{(k+1)})^2 / N \right) \rangle_{k+1}$$

が得られる.ここで再び $u_k(x)$  は $L^4v_k'(x+u)=u^{-1}-1$ の解である.ゆえに

$$\omega_k = u_k \left( \sum_{\ell=1}^{M-k-1} L^{-2\ell} \omega_{k+\ell} \right) = u_k (L^{2k} G_{k+1}),$$

$$\cdots = \cdots,$$

$$\omega_{M-1} = u_k(0)$$

が得られる.

補題  ${\bf 1.3.5}$   $\ (1)$  もし,  $m_0^2 = \mu_0^2$  ならば, 全ての n < M について , M に一様に

$$1-\varepsilon < \omega_n < \mu_0^2$$

かつ $\varepsilon \to 0$   $(n \to \infty)$ .

(2) もし,  $m_0^2<\mu_0^2$  ならば, 全ての  $n\geq n_0$  に対して , 定数  $c_1,c_2,c$  が存在して

$$c_1 L^{-2n} \le \omega_n \le c_2 (cL)^{-2n}$$

ここで c < 1 は  $c \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$  のとき)である.

証明 (1)  $u_n(x)$  は x について単調減少:  $\omega_n \leq u_n(0)$ . しかし  $v_n'(u) \geq 0$ )が  $u \geq \mu_0^2(>1)$  で成立するので  $u_n(0) \leq \mu_0^2$ .逆に  $L^4v_n'(x+u) \sim n^{-1}(x+u-\mu_0^2)$  であり, $u_n(x)$  は任意のコンパクト集合上で 1 に収束するので,

$$\omega \ge u_n(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0^2 L^{-2i}) = u_n(L^2(L^2 - 1)^{-2}) \ge 1 - \varepsilon$$

が成立する

(2)  $M>n\gg 1$  なので, $-m_n^2={
m const.}L^{2n}$  (  ${
m const}=\mu_0^2-{
m m}_0^2>0$  ).この場合  $u_n(0)\ll 1$  であり,そこで  $u\sim (L^4v_n'(0))^{-1}=(L^4\tau_c)^{-1}$  が成り立つ.ここで  $t_n(\tau_c)=0$  すなわち  $v_n'(x)=0$  を満たす量,すなわちワインボトル型ポテンシャルの底の位置に対応するものだが,

$$au_c \sim \left\{ egin{array}{ll} -(nL^4)^{-1}\mu_0^2, & m_0^2 = \mu_0^2 \; {
m O}$$
とき  $-L^{-2}, & m_0^2 > \mu_0^2 \; {
m O}$ とき

であり, $m_0^2 < \mu_0^2$ では

$$-m_n^2(nL^4 + (2\lambda)^{-1})^{-1} \le \tau_c \le -2\lambda m_n^2$$

であることが容易にわかる.このことから上限が出る.下限も同様.

このことから

定理  ${\bf 1.3.6}$  もし  $m_0^2 \le \mu_0^2$  ならば,  $O(\infty)$  不変  $\phi_4^4$  模型は存在し,2 点相関関数  $G_k$  は以下の不等式を満す:

$$c_1 L^{-2k} \le G_k \le c_2 L^{-2k}, \quad m_0^2 = \mu_0^2,$$
  
 $c_1 L^{-4k} \le G_k \le c_2 L^{-4k}, \quad m_0^2 < \mu_0^2.$ 

16 第1章 繰りこみ群の原型

証明

$$G_{\ell}^{(1)} = \sum_{k=\ell}^{M} L^{-2k} u_k (L^{2k} G_{k+1}^{(1)}), \quad \ell = 0, 1, \dots, M$$

$$G_{\ell} = \sum_{k=\ell}^{M-1} L^{-2k} u_k (L^{2k} G_{k+1}), \quad \ell = 0, 1, \dots, M-1$$

とし,  $G_M^{(1)}=L^{-2M}u_M(0),\ G_{M+1}^{(1)}=0$  および  $G_{M-1}=L^{-2(M-1)}u_{M-1}(0),$   $G_M=0$  と定める.故に

$$G_{\ell}^{(1)} - G_{\ell} = L^{-2M} u_M(0) + \sum_{k=\ell}^{M-1} L^{-2k} \left( u_k(L^{2k} G_{k+1}^{(1)}) - u_k(L^{2k} G_{k+1}) \right).$$

前の補題によれば, $L^{2k}G^{(1)}_{k+1}$  および  $L^{2k}G_{k+1}$  は k と M に一様に有界である. さらに次の不等式をがが十分大きな  $k>k_0\gg 1$  と  $|x|\le 1$  に対して成立することが容易に示せる:

$$\begin{split} |u_k'(x)| &\leq \frac{c}{1+k}, \quad m_0^2 = \mu_0^2 \\ |u_k'(x)| &\leq \frac{c}{L^{3k}}, \quad m_0^2 < \mu_0^2 \end{split}$$

これから  $m_0^2=\mu_0^2$  の場合には

$$|G_{\ell}^{(1)} - G_{\ell}| = L^{-2M} u_{M}(0) + \sum_{k=\ell}^{M-1} \frac{c}{k+1} |G_{k+1}^{(1)} - G_{k+1}|$$

$$\leq \left(1 + \sum_{n=1}^{M-\ell} \sum_{k_{1} < k_{2} < \dots < k_{n} < M-1} \prod \frac{c}{k_{i}+1} \right) L^{-2M} u_{M}(0)$$

$$\leq \text{const.} \left(\frac{M}{\ell}\right)^{c} L^{-2M}$$

ここで

$$\sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n < M-1} \prod \frac{c}{k_i + 1} \le \frac{1}{n!} \prod \left( \sum_{\ell < k_i < M-1} \frac{c}{k_i + 1} \right)$$

$$\le \frac{1}{n!} (c \log(M/\ell))^n$$

が使われた.これは  $m_0^2=\mu_0^2$  の場合には  $G_\ell$  が  $M\to\infty$  で収束することを示す. $m_0^2<\mu_0^2$  の場合も同様である.残りも明らかであろう.

この証明は読者に演習として残しておきたい。この階層模型は  $v(x)=m_0^2x$  の時には,ガウスになるので相関関数はあらわに求められるが,このことは  $m_0^2=\mu_0^2$  ならば,結局 v(x)=0 の質量の無い自由場理論に, $m_0^2>\mu_0^2$  ならば 質量のある自由場理論に収束することを述べている(ガウスなので,O(N) 対

称性はあまり意味を持たなくなる.)同様に以下のことも容易に示される.

定理 1.3.7 もし  $m_0^2>\mu_0^2$  ならば,  $O(\infty)$  不変  $\phi_4^4$  模型は存在しない. すなわち、2 点相関関数  $G_k$  は  $M\to\infty$  (無限体積極限)で発散する.

問題 1.3.1 上の定理を証明せよ.

#### 1.4 弱結合領域での解析

 $N=\infty$  での解析は large field problem は回避できたが,実際の系との解離はいいさかか心もとないので,実際どう行うか,N=1 として議論してみよう.d=4 では  $\alpha=1$  であるが,このとき  $\phi_n(x)=L^{-1}\phi(x_1)\pm z(x_1)$  であり

$$\exp[-v_{n+1}(\phi)] = \int f(\phi, z) d\mu(z),$$

$$f(\phi, z) = [g(L^{-1}\phi + z)g(L^{-1}\phi - z)]^{L^{d}/2},$$

$$g(\phi) = \exp[-v_n(\phi^2)],$$

$$d\mu(z) = \exp[-z^2/2] \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

である。 さて  $\phi_n$  が大きいとき, $v_n$  が  $\phi$  のいかなる領域で解析的かという問題,解析的でない領域での評価 (large field problem) を帰納的に判断し,それが漸化式で保存されることを示す仕事が残る.当初の  $\lambda_0>0,\ m_0^2$  は十分に小さく取られていると仮定しよう. $\phi\pm z$  のなかで

- $1. |\phi|$  が小さくかつ, |z| も小さい,
- $2. |\phi|$  が小さくかつ, |z| は大きい,
- $3. |\phi|$  が大きい,

という状況が起こる.何を基準に大きいか小さいかは想定される  $v_n$  の形  $\sim \lambda_n \phi^4 + m_n^2 \phi^2/2$ ,  $\lambda_n \sim (n+n_0)^{-1}$  から逆算して, $|\phi|<(n_0+n)^{\alpha}$ , $\alpha<1/4$  ということになる.

 $\lambda_0 = rac{1}{n_0+1}$  ,  $n_0 >> 1$  とおき , 帰納法の仮定として

$$\frac{C_{-}}{n_0 + 1 + n} \le \lambda_n \le \frac{C_{+}}{n_0 + 1 + n} \tag{1.4.1}$$

とし, さらに以下使うパラメータを導入する.

$$B_n = (n_0 + n)^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{10}$$
 (1.4.2)

さらに  $\phi^2$  の係数の 1/2 (質量) に対応する

$$m^2 = m^2(c)$$
, c の連続関数 (1.4.3)

で c が  $[\alpha_n, \beta_n]$  の中を動いたら

$$m^2 \in [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n]$$

となるものとする.

$$g_n(\phi) = \exp[-v_n(\phi)]$$

とおいて,以下の仮定が漸化式で保たれることを示す:

- (i)  $\phi_n$  が大きい時
- 1.  $g_n(\phi)$  は帯状領域  $|\operatorname{Im} \phi| < B_n$  で解析的
- 2. 実の  $\phi$  に対して,  $g_n$  は正であり,  $g_n(0) = 1$ ,  $g_n(-\phi) = g_n(\phi)$
- 3.  $|\operatorname{Im} \phi| < L^{-1}B_n$  かつ  $|\phi| > B$  に対しては,  $|g_n(\phi)| < \exp[-(1/2)\lambda_n(\operatorname{Re}\phi)^4]$
- (ii)  $\phi_n$  が小さい時
- $\phi_n$  が小さいときの仮定として
  - 1.  $|\phi_n| < B_n$  で  $v_n(\phi)$  は解析的,
  - $2. v_n(\phi)$  は  $|\phi_n| < B_n$  で

$$v_n(\phi) = \frac{1}{2}m_n^2\phi_n^2 + \lambda_n\phi_n^4 + \tilde{v}_n(\phi)$$

と表される. ここで  $\tilde{v}_n$  は  $\phi_n$  の 6 次項 以上の集まり.

- 3.  $\tilde{v}_n(0)=0$  ,  $(d^2/d\phi^2)\tilde{v}_n(0)=0$  ,  $(d^4/d\phi^4)\tilde{v}_n(0)=0$  ,
- 4.  $|\tilde{v}_n| < \lambda_n^2$

をおく、これらが漸化式の間中保存されることを示すことが必要になる、

初期には高次の項  $\tilde{v}_0$  は 0 だが ,  $\tilde{v}_n$  は  $\lambda_n^2$  ほどの大きさを仮定する . この仮 定の下に(すなわち  $m_{n-1}$  ,  $\lambda_{n-1}$  ,  $\tilde{v}_{n-1}$  , etc. が十分小さいとき) $\phi_n$  が小さ いならば , すなわち  $|\phi_{n-1}| < B_{n-1}$  ならば ,

$$\exp[-v_n(\phi_n)] = \exp\left[-\frac{L^2}{2}m_{n-1}^2\phi_n^2 - \lambda_{n-1}\phi_n^4 - L^4\tilde{v}(L^{-1}\phi_n)\right] \times \frac{1}{\mathcal{N}} \int \exp\left[-\frac{L^4}{2}m_{n-1}^2z^2 - \lambda_{n-1}(6L^2\phi_n^2z^2 + L^4z^4) + \delta v_{n-1}(z)\right] d\mu(z)$$
(1.4.4)

が得られる . ここで  $v_{n-1}$  を テーラー 展開し , コーシー評価を用いて  $\delta v_{n-1}(z)$ の寄与を計算できる. 定数  $\mathcal N$  は,  $v_n(0)=0$  と選ぶ.

ゆえにガウス積分で評価できるわけだが,厳密にいうとz変数は $-\infty$ から  $+\infty$  まで変われる訳ではなく ,  $v_{n-1}(L^{-1}\phi\pm z)$  が解析性を保障されるレンジ に無くてはいけない. すなわち,

$$|z| < B_{n-1} - L^{-1}|\phi_n|, \quad |\phi_n| < B_n = (n_0 + n)^{\alpha}$$

でなくてはいけない、これがこの種の計算を複雑にし、摂動計算の限界を与えて いる部分である. すなわち正確には z 積分はこの内部の z に制限する特性関数

$$\chi_n(z) = \chi_{|z| < B_n}(z)$$

を乗じて考えなければならない.

 $1=\chi_n(z)+(1-\chi_n(z))$  であるが,この計算は  $\lambda_{n-1}$  が十分小さいとすれば, $(1-\chi_n(z))$  からの寄与は指数的に小さく,ガウス部分が全体を支配できる.実際  $1-\chi_n(z)$  での寄与は,大きい  $|\phi|$  の領域に関する仮定から評価される.ここでは

$$0 \le g_n(\phi) \le \exp[-\lambda_{n-1} B_{n-1}^4/2] \le O(1)$$

であり、他方

$$\int (1 - \chi_n(z)) d\mu(z) \le \exp[-\text{const.}B_{n-1}^2]$$

すなわち寄与は指数関数的に小さく,この寄与を無視できる. $\tilde{v}_{n-1}(L^{-1}\phi_n\pm z)$ は,解析性から展開されて

$$\tilde{v}(L^{-1}\phi_n \pm z) = \tilde{v}_n(L^{-1}\phi_n) \pm \tilde{v}'_n(L^{-1}\phi_n)z + \frac{1}{2}\tilde{v}''_n(L^{-1}\phi_n)z^2 + \delta\tilde{v}_{n-1}$$

となり,展開係数は

$$\frac{1}{2!}v_{n-1}''(L^{-1}\phi_{n-1}) = \int_C \frac{v_{n-1}(L^{-1}\phi_{n-1} + \zeta)}{\zeta^3} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

で C を原点を中心とする半径  $B_{n-1}$  の円に取ることが出来て, $O(\lambda_{n-1}^2)$  となり, $d\mu(z)$  の中に入り込むことになるが,その  $\phi^2$ , $\phi^4$  への寄与は  $\lambda_{n-1}^3$  以上になる. $\delta \tilde{v}_{n-1}$  は  $O(\lambda_{n-1}^3)$  で, $\tilde{v}_{n-1}(L^{-1}\phi_n)$  は  $\phi_n$  について,より広い領域で解析的になり,再び上のコーシー評価によって

$$|\delta \tilde{v}_{n-1}(L^{-1}\phi_n)| < \text{const.}(L^{-1}\phi_n)^6 B_n^{-5}$$

という評価がなりたつ.

以上から,ガウス積分で $\lambda_{n-1}^3$ まで計算すれば,

$$= 1 - \int \left[ \frac{L^2 m_{n-1}^2}{2} z^2 + \lambda_{n-1} (6L^2 \phi_n^2 z^2 + L^4 z^4) \right] d\mu(z)$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left[ \frac{L^2 m_{n-1}^2}{2} z^2 + \lambda_{n-1} (6L^2 \phi_n^2 z^2 + L^4 z^4) \right]^2 d\mu(z)$$

$$= 1 - \left[ \frac{L^2 m_{n-1}^2}{2} + 6L^2 \lambda_{n-1} (\phi_n^2 + 3L^4) \right]$$

$$= 1 - \left[ \frac{2Mn-1}{2} + 6L^2 \lambda_{n-1} (\phi_n^2 + 3L^4) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{3L^4 m_{n-1}^4}{4} + 108L^4 \lambda_{n-1}^2 \phi_n^4 + 90L^6 \lambda_{n-1}^2 \phi_n^2 \right] + O(\lambda_n^3)$$

$$= 1 + c_0 + (-6\lambda_{n-1}L^2 + 90\lambda_{n-1}^2 L^6) \phi_n^2 + 54\lambda_{n-1}L^4 \phi_n^4 + O(\lambda_{n-1}^3)$$

が得られる.ここで  $c_0=O(\lambda_n^2)$  は定数である.さらに  $\mathcal N$  は上記の計算で  $\phi=0$  としたものなので、 $\mathcal N$  で除し,上の式を  $\log$  で指数の肩に戻す.よって

$$\begin{cases} \lambda_n &= \lambda_{n-1} - 36L^4 \lambda_{n-1}^2 + O(\lambda_{n-1}^3) \\ m_n^2 &= 6L^2 m_{n-1}^2 - 72L^6 \lambda_{n-1}^2 + O(\lambda_{n-1}^3) \end{cases}$$

とすれば

$$\exp[-v_n(\phi_n)] = \exp\left[-\frac{m_n^2}{2}\phi_n^2 - \lambda_n\phi_n^4 + O(\lambda_{n-1}^3)\right]$$

が  $|\phi| < B = (n_0 + n)^{\alpha}$  という条件下で成り立つ.

すなわち , 係数が小さいという状況のもとでは ,  $\phi^6$  以上の項の係数は  $L^{-2}$ が乗じられて小さくなり (無関係な、irrelevant な項),  $\phi^4$  の項の第 1 項は最 低次摂動不変であり(境界的な、marginal な項),  $\phi^2$  の項は初期パラメータが 上手く取られない限り,  $L^2$  倍されていく (支配的な, relevant な項). これら はそれらの量の次元を直接に反映し、繰りこみ群はそれに対する、補正を与えて いき、相空間の中での流れを構成している.

問題 1.4.1 ここで述べられた摂動計算を実行し,  $\phi_n$  が小さい時の z による 結合定数の漸化式を確かめよ、また z が大きい場所の寄与  $(1-\chi_n(z))$  を評価 せよ. いうまでもないが

$$\int z^2 d\mu_0(z) = 1, \quad \int z^4 d\mu_0(z) = 3, \quad \int z^6 d\mu_0(z) = 15$$

そこでこの節の始めに述べた仮定で.

- (a)  $B = B_n = (n_0 + n)^{\alpha}$ ,  $\alpha = 1/10$ ,
- (b)  $C_{+}^{-1} < 36L^4 < C_{-}^{-1}$  を

$$\frac{C_-}{n_0+n} < \lambda_n < \frac{C_+}{n_0+n}$$

で仮定する.

 $(\mathbf{c})$   $m_m^2$  は  $c \in [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$  の連続関数で, c がこの領域を動くとき,  $m_n^2(c)$ 

$$-\frac{\bar{c}}{n_0+n} < m_n^2(c) < \frac{\bar{c}}{n_0+n}$$

とおき、これが満たされていることを見るのは易しい. すなわち, 最初のパラ メータを決めれば以下,上記の仮定は全て満たされる.この種のパラメータ設 定を  $N=\infty$  の場合と同様 Bleher-Sinai 型議論 [6] という.

定理  ${f 1.4.1}$  (Bleher-Sinai) 繰り込まれた結合定数  $\lambda_n$  , 質量  $m_n^2$  の極限が存 在する 裸の結合定数  $\lambda=\lambda_0$  と質量  $m^2=m_0^2$  が一意的に決まる.

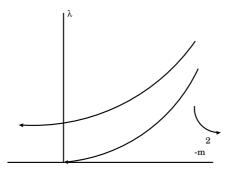


図 1.5 格子  $\phi_4^4$  の繰り込み群の流れ

この階層近似化された例では  $\lambda_n \to 0, \, m_n^2 \to 0$  となり、長距離で系は自由場すなわち、入射波が相互作用することなくでて行く、つまり 2 点関数の積の和になるガウス場に収束することを示している。これは複雑な現実世界の記述には失敗していることを暗示している.

このモデルでは実モデルの記述には失敗したものの, これから得られる教訓 として

主張 1.4.1 ある種のモデルでは、たとえ発散があっても

- 1. 各スケールで発散を計算、
- 2. その各々の段階で係数を調整し発散を消去
- 3. 極限操作

で意味のある物理理論を作ることが出来る.

これが可能なモデルを 繰り込み可能 であるという.

定理 1.4.2 (Tomonaga-Feynman-Schwinger-Dyson+ many others)

理論が繰り込み可能である必要条件は発散が有限個のタイプにまとまり、有限 個のパラメータの調整で済むこと.

この漸化式を「繰り込み漸化式 (方程式)」という. この例ではさらに上の漸 化式から

$$\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \kappa > 0$$

よって

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} = \kappa n = -\kappa \log \Lambda$$

ここで  $\Lambda^{-1} = L^n$  は低運動量切断(赤外切断). よって繰り込まれた結合定数  $\lambda_n$  は

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \kappa \log \Lambda}$$

であり逆に裸の結合定数は

$$\lambda_0(\Lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \kappa \log \Lambda}$$

ゆえに

$$\beta(\Lambda) = \frac{\partial}{\partial \log \Lambda} \lambda(\Lambda) = \kappa \lambda^2(\Lambda)$$

これから逆に  $\lambda(\Lambda) \to 0$   $(\Lambda \to 0)$  が結論でき、これを長距離における漸近的自由さ(asymptotic freedom at long distances)と呼んでいる。これは、繰り込まれた物理定数が切断の変化(スケールの変化)に応じてどう変わるかを示す漸化式の無限小版であり、「繰りこみ群方程式」と呼ばれている.

### 1.5 強結合階層ボソン系

いままでは階層近似だの  $N=\infty$  近似だの, 物理学者以外の人から見ればあまり正気とは思えない近似かも知れないが, 実際の 4 次元  $\phi^4$  モデルは自明な連続極限しかないのかというのは今に続く難問である.

最初の節に戻って

$$\exp[-V_n(\phi_n)] = \int \exp[-V_{n-1}(A_n\phi_n + Qz_{n-1})]d\mu_{\Gamma_{n-1}}(z_{n-1}),$$

$$d\mu_{\Gamma_{n-1}}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, \Gamma_{n-1}^{-1}z\rangle\right] \prod dz(x),$$

$$\Gamma_{n-1} = Q^+G_{n-1}Q$$

から始めるが,今の方法では前述の  $\mathrm{Dyson}$  近似を摂動的に論じることしか出来ないので,この方法が使える領域,すなわち  $\phi^4$  の係数  $\lambda_0>0$  は十分小さく,それ故に,小さい質量項  $m_0^2\phi^2/2$  から出発することになる.これは大変な計算の上に解決したが,大きな  $\lambda_0>0$  を持つ  $\lambda_0(\phi^2-m_0^2)^2$  では解決していない.これはほぼ  $\phi=\pm m_0$  の値のみ取るイジング模型になって,4 次元イジング模型は臨界点でガウス的かという問題になってしまうが,モデルの単純さとは裏腹に現在も厳密証明が無い問題である.イジング系では何回ブロックスピン変換しても, $V_n$  はいくつもの局所的ミニマムを持つことは直ぐわかることである.例えば, $V(\phi)\sim -\delta(\phi^2-1)$  として最初の(単純化された)ブロックスピン変換にあたる以下の積分を考えよ.

$$V_1(\phi) = -\log \left[ \int \exp\left[-\sum_{x=1}^{L} V(\phi + z_x) - \sum z_x^2\right] \prod_{x=1}^{L} dz_x \right],$$

ただし  $\sum_{x=1}^L z_x=0$  , とすると  $\phi=\pm 1+z_x$ ,  $\sum z_x=0$  であるような  $\phi$  の値 の近傍にに分布することになる.ゆえに  $L\phi=\sum \pm 1\in \{-L,-L+2,,\cdots,L\}$  の離散的な値に分布は集中することになってしまう.例えば  $V_1$  は  $\phi=\pm 1$  と, $\phi=0$  に極小値が存在する.

すなわち、このような結合定数が大きい場合には  $V_n$  はいくつもの凹凸を生じ,最終的にガウス型になるとしても,途中の計算で形をキープすることが困難である.とくにイジングモデルではいつまでたっても,デルタ関数的分布である.

 $N=\infty$  模型ではいくら結合定数が大きくてもこのようなことは起らないが,その理由は前に述べた通りである.(この例では L を大きくすれば,中心極限定理でガウス的になる.)このような事態を迂回することが,この種の計算では肝要になる.

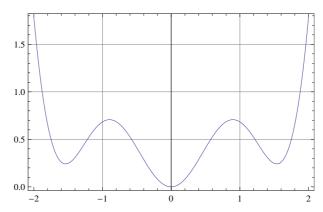


図 1.6 大きい結合定数のときの変換された  $V_1$ 

大きな結合定数を持 $\phi^4$  モデルは,特殊例としてイジング模型を含む.上に述べたように非解析的な側面が強くなって,これを迂回するか,上手く処理することが要求される.この階層的イジングモデルでは,フーリエ変換を用いるという巧妙な方法があって,少し紹介する.これは $^{[32]}$  によって始めてなされた.これを実際の強結合 $\phi^4_4$  に応用することが望まれる.

4 次元の階層的イジングモデルでは , フーリエ変換すると離散的な  $\phi(x)=\pm 1$  が三角関数になり , 処理が簡単になる . d=4 の階層イジングモデルは ,  $d=4,L^d=2$  とする一番簡単な形で ,

$$\exp[-V_n(x)] = \frac{1}{N} \int \exp[-(V_{n-1}(\frac{x}{\sqrt{c}} + z) + V_{n-1}(\frac{x}{\sqrt{c}} - z) - z^2] dz$$

となる . ただし  $c=L^2=2^{1/2}$  で ,  $^{\scriptscriptstyle{[32]}}$  の記号にあわせて  $x=\phi$  とした . ここで今の系では ,

$$z^{2} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x}{\sqrt{c}} + z \right)^{2} + \left( \frac{x}{\sqrt{c}} - z \right)^{2} \right) - \frac{1}{2} x^{2} - \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \right) x^{2}$$

に留意し,

$$h(x) = \exp[-V_n(x) - x^2/2], \quad \beta = \frac{1}{c} - \frac{1}{2}$$

とおいて

$$R(h)(x) = \frac{e^{\beta x^2/2}}{\mathcal{N}} \int h(\frac{x}{\sqrt{c}} + z)h(\frac{x}{\sqrt{c}} - z)dz$$
$$h_0 = \frac{1}{2}(\delta(x - s) + \delta(x + s))$$

が研究対象である.

間単にわかるように, $h_G(x)=\exp[-x^2/4]$  とおけば,右辺は再び  $h_G(x)$  となり, $h_G$  は R の固定点である.ただし x 空間では  $h_n(x)=R^n(h_0)(x)$  は常に x のデルタ関数の和で表され,非解析的で既存の分析が応用できない.そこで

$$\hat{h}_n(\xi) = \mathcal{F}(h_n)(\xi) \equiv \int_R e^{i\xi x} h_n(x) dx$$

として, $\xi$  空間での漸化式に移れば  $\hat{h}_{n+1} = \mathcal{F}\mathcal{R}\mathcal{F}\hat{h}_n$  であるが,ここで

$$\mathcal{FRF} = \mathcal{TS} \tag{1.5.1}$$

と分解できることに気がつく:

$$Sg(\xi) = g\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right)^2,$$

$$\mathcal{T}g(\xi) = \text{const.} \exp[-\frac{\beta}{2}\Delta]g(\xi).$$

ここで  $g_t(\xi) = \exp[-t\Delta]g(\xi)$  は微分方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(\xi) = -\Delta g(t), g_0(\xi) = g$$

を満たすので, $g_t(\xi) = \sum_k a_k(t) \xi^n$  とすれば

$$a'_k(t) = -(n+2)(n+1)a_{k+2},$$

 $\sqrt{c}/2<1$  なので  $\mathcal S$  は係数を小さくする方向に ,  $\mathcal T=\exp[-eta\Delta]$  は拡散方程式の逆なので , 係数を大きくする方向に作用し , 上手く選ばれた初期状態に対してのみ , 極限が存在することになる .

 $h_G$  のフーリエ変換はガウスなので ,  $\hat{h}$  がガウスに近づくかどうかが問題になる . そこで

$$\hat{h}_n(\xi) = \exp[-V_n(\xi)], \quad V_n(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,n} \xi^n$$
 (1.5.2)

と置いて ,  $\mu_{k,n},\,k\geq 4$  が 0 に収束するか否か考えることになる . これは全く前と同じ状況である .

$$\hat{h}_0(\xi) = \cos(s\xi),$$

$$\hat{h}_1(\xi) = \frac{1}{1+k} (1 + k \cos(\sqrt{c}s\xi)), \quad k = e^{\beta cs^2/2}$$

でその  $V=-\log \hat{h}$  は通常の計算である.上に述べた  $T\mathcal{S}$  をこの展開式に応用すれば,係数  $\{\mu_{k,n+1}\}$  が  $\{\mu_{k,n}\}$  によって非線形にではあるが表されることが分かる.すなわち,

$$V_N(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}(0)\xi^{2n},$$
  
$$V_t(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}(t)\xi^{2n}$$

とおけば

$$V_{N+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}(\beta) \xi^{2n},$$

$$\frac{d}{dt} \mu_{2n}(t) = -(2n+2)(2n+1)\mu_{2n+2}(t)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n} 2\ell (2n-2\ell+2)\mu_{2\ell}(t)\mu_{2n-2\ell+2}(t)$$

であることが,直接に代入することよって得られる.ゆえに $\{\mu_{k,n}\}$ が十分小さければ漸化式が解けることは,前の経験から理解できよう.

ところで,この系は Dyson 近似の常として長距離相互作用はもつが,問題で見たように,1 次元イジングスピン模型そのものである.式(1.2.2)を見よ.すなわち 長距離相互作用はあるものの相互作用が  $\exp[\sum J_{ij}\phi_i\phi_j]$ , $J_{ij}\geq 0~(i\neq j)$  の形の強磁性的(フェロ的)相互作用を持つ.ゆえに以下述べる Lee-Yang 円定理が成り立つ:

 $Z(h)=\sum_{x_i=\pm 1} \exp[-\beta H(x) + h\sum x_i]$  は h について全複素領域で解析的で,その零点は h 平面で虚数軸上にしかない.従って

$$Z(h) = e^{bh^2} \prod_i \left( 1 + \frac{h^2}{\alpha_i^2} \right)$$

の無限乗積展開が成り立つ ( 偶関数であり , 増大は高々  $e^{ch}$  である .)

 $\hat{h}_n(\xi)$  はフーリエ変換なので右辺の  $\log$  をとることにより, V の展開係数に対して強い条件がつく.実際

$$V = -\log Z(h)$$

$$= -(b + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i^{-2})h^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i^{-2k})h^{2k}$$
(1.5.3a)

$$=\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mu_{2k} h^{2k} \tag{1.5.3b}$$

なので,明らかに

定理 1.5.1 (C.Newmann [72]) 展開係数に対して

$$0 \le \mu_{2k,n} \le \frac{1}{k} (2\mu_{4,n})^{k/2}, \quad k = 3, 4, 5, \dots$$

が成り立つ.

問題 1.5.1 上の定理を証明せよ.

ここまでくれば,実際に  $\mu_{4,0}=1/12$  であることなど考えると,何回か数値計算をし, $\mu_{4,n}$  がある程度小さくなることを示せば, $\mu_{2k,n}$  も小さくなって,残りは解析的に漸化式を処理できると期待される(彼らは C 言語で超多倍長のプログラムを作ったそうである). [32] の結果は以下の通り:

定理 1.5.2 d=4 とし,  $h_0$  を上記の通りにとる .  $n_0 \le n_1$  を満たす正整数があり .  $s \in [s_1,s_2]$  に対して

$$0 \le \mu_{4,n_0} \le 0.0045$$
$$1.6\mu_{4,n_0}^2 \le \mu_{6,n_0} \le 6.07\mu_{4,n_0}^2$$
$$0 \le \mu_{8,n_0} \le 48.469$$

及び

$$\mu_{2,n} \le 2 + \sqrt{2}, \quad n_0 \le n_{n_1}$$

が成り立つとせよ.このときある  $s_c \in [s_1, s_2]$  があって, $s = s_c$  ならば

$$\lim \mu_{4,n} = 0$$
,  $\lim \mu_{2,n} = 1$ 

である.

実際 誤差評価付き数値計算を行うと,n=70, $n_0=100$  として上記定理の 仮定の条件が満たされるということである.

定理 1.5.3 前定理の仮定は n=70,  $n_0=100$  に対して満たされる.ここに

$$1.7925671170092624 \le s_1 < s_2 \le 1.7925671170092625.$$

以上から 4 次元 Dyson 型階層模型については,弱結合領域,及び強結合極限領域(イジング模型)の二つで自明性が示されたことになる.

## 1.6 実際の $\phi_a^4$ 系の議論

階層的でない実際の系では既に,K.Gawedzki と A.Kupiainen によって弱結合領域で摂動的な形で示されている([23]. さらに [30], [31] も見よ). これを本来は分かり易く紹介するのが筋なのであるが,これは大変な計算量であっ

て,ここでの議論を割愛した.前節で述べたように,Dyson 型階層模型近似はかなりよく現実の系を反映しているのだが,非局所相互作用を階層的ハミルトニアンの導入で,人工的に落としているので, $<\phi,(-\Delta)\phi>$  に対する補正が生じない,物理学の言葉でいえば,波動関数の繰りこみが生じない.その大筋のシナリオは階層モデルに並行である.いま n 次ステップまで来たとして次のステップは以下のようである.

- 1. ブロックスピン変換を d=4 に従って  $\phi_n=A_n\phi_{n+1}+Qz_n$  とする .
- 2.  $\phi_{n+1}$  が大きい,つまり  $|\phi_{n+1}(x)| > O(\lambda_n^{-1/4})$  である場所を抜き出しておく.ここは指数的に小さい寄与を与える.
- 3. 小さい  $\phi_{n+1}$  のところで z で積分する. これは  $|z_n| < O(\lambda_n^{-1/4})$  で摂動的に  $v_{n+1}^{(1)}$  を与える . 大きい , すなわち  $L^{-1}\phi_{n+1} + Qz_n| > O(\lambda_n^{-1/4})$  の所は  $v_n$  が大きいことで,ア・アプリオリ上限(積分しなくて済む確率論的な上限)で小さいことが判る . これは寄与  $v_{n+1}^{(2)}$  を与える .
- 4. ばらばらの項を  $\log$  をとって ,  $\exp$  の中に取り込み, 次の  $v_{n+1}$  を設定する . 主要項は,  $v_{n+1}^{(1)}$  であって , 階層モデルで得られたものとほぼ一致する .

$$\frac{\delta m_{n+1}^2}{2} \sum \phi_{n+1}^2 + \frac{1}{2} \delta z_{n+1} \sum (\partial \phi_{n+1})^2 + \lambda_{n+1} \sum \phi_{n+1}^4$$

ここで  $\delta m_{n+1}^2=O(\lambda_n)$  ,  $\delta z_{n+1}=O(\lambda_n^2)$  , かつ  $\lambda_{n+1}=\lambda_n-O(\lambda_n^2)$ 

5. これを繰り返す.

すなわち,large field 問題および質量項,結合定数の繰りこみは共通である.しかし今言ったように, $\phi$  の微分に比例した項,すなわちエネルギー項(波動関数の繰り込みといわれているもの)が生じる.階層モデルと同じ振る舞いであり,

$$\lambda_n \sim \frac{1}{n_0 + n}$$

が得られる .  $\delta z_{n+1}=O(\lambda_n^2)$  なので , その総和は収束して波動関数の繰り込みを生ずる. これは階層モデルにはなかった現象で , 今のケースでは  $-\Delta$  が長い (しかし指数的に減少する) 干渉項を生ずることに起因する .

ここではあまり触れなかったが、 $v_{n+1}^{(2)}$  の処理は重要で、結局  $v_{n+1}^{(1)}$  の係数達に影響を与えるのであるが,それは指数的に小さいことが確かめられる.これはポリマー展開あるいはクラスター展開という手法を通じてなされるが,これが議論を難解にしている.

強結合極限のフルモデル (すなわち 4 次元イジングモデル) でも 4 次元では 自明な理論になることはほぼ確かであるし、この方法が有力であると期待されるが、未だ試されていない .

未解決問題  $\mathbf{1}$  d=4 イジング模型においてその臨界点でのガウス性を証明せよ.

未解決問題 2 d=4  $\phi^4$  模型の自明性を証明せよ.

この講義録では言及しなかったが、4 次元の量子電気力学 ( QED= Quantum Electrodynamics ) も同じタイプのモデルと考えられている .

未解決問題  $\mathbf{3}$  d=4  $\mathrm{QED}_4$  模型の自明性を証明せよ.

それではこのタイプのモデルは全て自明な解しかないのであろうかというと,全くアカデミックというか,非物理的な世界(真空がない)に逃げ込めば作れることが示唆される. $v=\lambda\phi^4+m_0^2\phi^2$ 模型は, $\lambda<0$ であれば,汎関数積分が発散しナンセンスであるが、摂動の各項は極めて明瞭になり、

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \kappa \lambda_n^2, \quad \kappa > 0$$

の漸化式から, $\lambda<0$  が段々大きくなる,すなわち短距離 (小さい n ) では  $\lambda_n<0$  が(絶対値で)小さくなることが示唆される.

他方汎関数積分の方の不安定性は困るので, $\phi(x) \to e^{i\pi/4}\phi(x)$  と, $45^\circ$  回転しておくと,積分は安定し,かつ摂動級数は上記の形のなり,理論が作れる.

未解決問題 4  $\lambda < 0$  の 4 次元  $\phi_4^4$  には非自明性な解がある.

# 1.7 その他の $\phi_d^{2n}$ 模型

今まで専ら、 $\phi_d^4$  模型の臨界現象を扱ってきたが、これは イジングモデルを基礎にした,2 つの相が競争しあうモデルである.回転対称性を要求すると,O(N) 対称モデルになるが,中間モデルとして,幾つかの相が競争しあうモデルがある.たとえば,クロックモデル( $\operatorname{clock\ model}$ ) とか, $\operatorname{Potts}$  モデル などがこれに該当する.これは却って難しいモデルになる.

ここでは  $\phi^6$  モデルで 3 相が競合するモデルを考えてみよう . 文献としては  $^{[36]}$  があるが , この問題とは少し距離がある . モデルは

$$v_0(\phi) = \mu_0 \phi^6 - \lambda_0 (\phi^2 - m_0^2)^2. \tag{1.7.1}$$

この場合 3 重臨界点をパラメータ空間で探し,その上で繰りこみ変換を続けるという仕事になる.このモデルは 3 相が競争する臨界点になり,Potts モデルに似ているが,このモデルとの関連はわからない.Potts モデルを真似るならば  $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ , $e_i=(\cos 2i\pi/3,\sin 2i\pi/3)$  として

$$v_0(\phi) = \lambda_0 \prod_i (\phi - re_i)^2$$
(1.7.2)

がまだ近いかもしれない\*1).

<sup>\*1)</sup> 臨界点の数を大きくすれば、それぞれ sine-Gordon 系と O(2) Spin 系に近ずくと思われる .

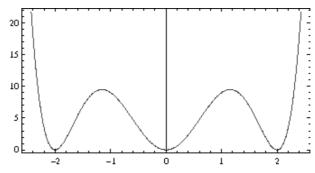


図 1.7  $\phi^6$  モデルと 3 相臨界点,同じ高さで極小とは限らない

この  $\phi^6$  モデルの分析は未だなされておらず,過去に,もしかして臨界点の上では非自明な極限をするのではと期待されていたこともあったが,幾つかの計算機実験では期待に反して,自明になり,立ち消えになったと思われる.4 次元では  $\lambda_0<0$  は漸近的に自由な結合定数で,積分が定義さえできれば,漸近的自由な理論ということで非自明な理論が構成できる可能性を秘めている.これを  $\phi^6$  が安定化しているというわけで,面白いと思われたが,そのままになってる.

厳密な計算は階層モデルであるが,文献は [36] だけのようであるが,惜しむらく3 重臨界点の分析にはなっていない.幾分難しく,私も答えは準備していないが

未解決問題 5 d=3,4 の  $\phi^6$  型 3 重臨界点モデルでは , 臨界点の上でガウス 的であることを示せ .

# 第 2 章

# 微分方程式と繰りこみ群

# 2.1 微分方程式への展開

微分方程式に繰りこみ群が応用出来ることを最初に示したのはイリノイ大学にいた大野氏とそのグループ  $^{[26]}$  である.発展方程式の一番高い階の微分の係数  $a_n$  が小さいとき,たとえば  $|a_n|<\varepsilon$  のとき,この  $a_n$  で 摂動 を考えると時間 t に対してその一次で発散する解(永年項)が出てしまう. 例えば

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2}y + \frac{d}{dt}y + y = 0, \qquad \varepsilon > 0, \ t \ge 0$$

を考えると、その真の解は

$$y = C_1 \exp\left[-\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}t\right] + C_2 \exp\left[-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}t\right]$$
$$\sim C_2 \exp[-(1+\varepsilon)t]$$

であるが.

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots$$

として,  $\varepsilon$  のオーダーで

$$y = A_0 e^{-t} - \varepsilon A_0 t e^{-t} + O(\varepsilon^2)$$
$$= A_0 (1 - \varepsilon t) e^{-t} + O(\varepsilon^2)$$

が得られる.この  $\varepsilon A_0 t e^{-t}$  は永年項というが,本来の解からみて発散している. そこで, $t=(t-\tau)+\tau$  として  $\tau$  を  $A_0$  に入れ込み

$$y = A(\tau)e^{-t} - \varepsilon(t - \tau)A(\tau)e^{-t} + O(\varepsilon^2)$$

としてみる.この au は繰りこみの繰りこみをする点に対応するものであるが, この au は元の方程式に無かったので  $\partial y/\partial au=0$  を要求して

$$\frac{dA}{d\tau} = -\varepsilon A$$

よって  $A(\tau) = e^{-\varepsilon \tau}$  となり、特に、 $\tau = t$  とおけば永年項は消えて (!)

$$y = e^{-(1+\varepsilon)t}$$

が得られる.これは真の解に極めて近い $^{*1}$ ).これは繰りこみをする点 au をパラメータとし,そのパラメータで苞珞線 をつくり,線形発散を消していると理解することができる  $^{[49]}$ .考えようによっては,苞珞線を選ぶことは Bleher-Sinai の方法と同義であると言える.

このアイデアは非線型双曲型方程式の wave front の形成などにも応用されたし、又流体力学の分野では、Kraichnan 模型 の分析にも使われた. 例えば 非線型双曲型方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = u'' + F(u, u', u'')$$

では,  $t \to \infty$  での漸近的振る舞い

$$u(x,t) \sim t^{-\alpha/2} f(xt^{-1/2})$$

をみるが、この指数  $\alpha$  の決定には時刻 t を固定して問題を解き,次に空間をスケールするという方法が応用される.

これらのトピックスは大野氏やその後の研究者の一連の論文 [56], [57], [49], [50], [51] および [10], [11] を見て頂くことにして,前章で理解が容易な階層近似を学んだこともあり,微分方程式の低エネルギー固有値を繰りこみ群で処理するというアイデアを試してみたい.これは青木氏(金沢)のアイデア [1], [2]に触発されたのだが,分析が不十分でかなり強引な(ありていに言えば胡散臭い)部分があって,真面目な方は眉をひそめそうであるが,面白いのであえて掲載することにした.低励起状態のエネルギーが log を含む発展方程式で計算できるというのは,ちょっとびっくりする話である.

## 2.2 シュレディンガー方程式の低励起状態

$$H_0 = -\frac{d^2}{d^2x},$$

$$V = \frac{1}{2}m_0^2x^2 + \lambda_0x^4$$

として伝統的なシュレディンガー方程式

$$(H_0 + V)\psi = E\psi$$

のエネルギー固有値  $\{E_0 \leq E_1 \leq \cdots\}$  について考えよう.これらの固有関数 を順に  $\psi_0(x)$  ,  $\psi_1(x)$ ,  $\cdots$  としておく.ここでの目的は,最低励起エネルギー

<sup>\*1)</sup> この例は大野氏の言われた例であるが、直ぐに肯定できる人は少ないだろう.

 $E_1-E_0$  を計算する. この計算には勿論摂動論やら、インスタントン計算があるが、ここではエネルギー差を統計力学的に表して、繰りこみ群を応用してみる.

$$\int f(x)(\exp[-tH]g)(x)dx$$

$$= \lim \int f(x) \left( (\exp[-tH_0/n] \exp[-tV/n] \right)^n g \right)(x)dx$$

$$= \lim \int f(x) \left( \prod_{k=1}^n \exp[-kH_0/n] \exp[-tV/n] \exp[kH_0/n] g \right)(x)dx.$$

ここで最後の式は左から右に積をとるとしよう.  $t \to \infty$  とすれば , 一般にこれは  $e^{-t(E_1-E_0)}$  で減少すると考えてよい .

 $\omega(t)$  を R の上の連続関数とすれば Trotter 積公式から

$$\exp\left[-sH_0\right]\exp\left[-sV(\omega(0))\right]\exp\left[sH_0\right] = \exp\left[-sV(\omega(s))\right]$$

が得られる.この連続関数の上の測度は Wiener 測度 [75] (ウィナー測度) になるが

$$f(x)e^{-tH}g(x) = \int f(\omega(0))g(\omega(s))e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds}d\mu_0(\omega).$$

そして  $\omega(s)$  は  $\omega(0) = \omega(t) = x$ .

$$d\mu_0(\omega) \to \exp\left[-\frac{1}{2}\langle\omega,(-\Delta)\omega\rangle\right] \prod d\omega(x)$$

と形式的に書けるので,統計力学モデルの一環としてこの問題を論じられる. というよりは

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi,(-\Delta)\phi\rangle - \sum_{x}V(\phi(x))\right]\prod d\phi(x)$$

の形の 1 次元系で長距離相関の振る舞いを見ればいいということになる.そこでこの系にブロックスピン変換を施し,長距離ではこの方程式はどう変換されるかみて,低エネルギー励起状態を研究してみたい.

ここで我々は一次元シュレディンガー方程式の低いエネルギー状態の様子を 調べる:

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \phi_{\ell}(x) = E_{\ell} \phi_{\ell}(x). \tag{2.2.1}$$

ここで V(x) は正の関数で有限個の点  $x_1 < x_2 < \cdots$  でのみ V(x) = 0 と仮定する.ここではあらわに

$$V(x) = \frac{1}{2}a_0x^2 + \lambda_0x^4$$

とし, $\lambda_0>0$  を仮定, $a_0$  は負になる可能性もある.これは多次元にも拡張されるがここでは考えない.我々は  $E_i-E_1$  をあるあらわな量であらわしたい.

2.2 シュレディンガー方程式の低励起状態 33

具体的には繰りこみ変換で系をより単純な系に変換し,その質量項として現れることを期待する.

ここでは以下の二つを論じることになる.最初に

- (i) ブロックスピン変換の Schrödinger 作用素に対する直接の応用であり, もう一つは
- (ii) 繰りこみ変換の無限小生成演算子に対応する非線形方程式の解析である.

もしプロックスピン変換をシュレディンガー方程式に応用すれば,以下のような繰り込まれた(スケール変換された)方程式が得られるだろう.

$$\left[ -\frac{1}{2L^n} \frac{d^2}{dx^2} + L^n \left( \frac{\tau_2}{2} x^2 + \tau_4 x^4 \right) \right] \phi_{\ell}(x) = E_{\ell} \phi_{\ell}(x). \tag{2.2.2}$$

ここで L>1 はブロックのサイズを表す正整数で,n は繰り返しの数である. ただし非本質的と思われる高次項は無視し, $\tau_2$  と  $\tau_4$  は厳密に正な数であって 繰りこみ変換で生ずるものである.

ここで極限  $n\to\infty$  を考えるとこれは  $\hbar\to 0$  を考えるのとほぼ近く  $,^{[73],[74]}$  での古典近似に内容が似ていると期待される .  $\zeta=L^{n/2}x$  と置くことにより ,

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \tau_2 \zeta^2 + \frac{1}{L^n} \tau_4 \zeta^4 \right] \phi_\ell(\zeta) = E_\ell \phi_\ell(\zeta)$$
 (2.2.3)

が得られる.これは低エネルギー状態が以下の調和振動子のそれで与えられることを示している:

$$E_1 - E_0 = \sqrt{\tau_2}. (2.2.4)$$

二つ目の目的は  $L\to 1$  極限の導出であって , 得られる方程式は, 1 章であつかった厳密なブロックスピン変換の無限小版で , 通常「繰りこみ群方程式」と俗称される非線形偏微分方程式になる . ここではこれを , Wegner-Houghton-Aoki (WHA) 方程式ということにする .

注意 2.2.1 エネルギーが等差的に分布することはあり得ないから,系が調和振動子に収束するというのは正しくない.この結論は繰り込まれた Gibbs 測度と相関関数からの減少速度からの計算なので,今のように相関長が短い系で繰りこみ変換を行えば,変換には一番低い部分のエネルギー差しか見えて来ず,高次項, $\phi^4$  など,からくる部分は消えてしまうと思わる.ゆえに,この最終方程式では,一番低いエネルギー順位しか信用できないと思われる.

## 2.3 微分方程式とブロックスピン変換

系を大きさが  $L^N$  の周期的境界条件をつけた箱  $\Lambda$  にいれ ,  $\Lambda_n = L^{-n}\Lambda\cap Z$  と

し,さらに原点中心の L 個の整数点  $\square=\{-(L-1)/2,-(L-1)/2+1,\cdots,(L-1)/2-1\}$  (奇数の L),または  $\square=\{-L/2,-L/2+1,\cdots,L/2-1\}$  (偶数の L) を準備し,[x/L] は x/L に一番近い整数とする.

そこでギッブス測度  $d\mu = d\mu_{\Lambda}$ 

$$\langle \phi(0)\phi(x)\rangle \equiv \int \phi(0)\phi(x)d\mu$$
 (2.3.1a)

$$= \frac{1}{N} \int \phi(0)\phi(x) \exp[-\mathcal{H}(\phi)] \prod d\phi(x), \qquad (2.3.1b)$$

$$\mathcal{H}(\phi) = \frac{1}{2} \langle \phi, (-\Delta + m_0^2) \phi \rangle + \sum V(\phi(x))$$
 (2.3.1c)

$$V(\phi(x)) = \frac{1}{2}a_0\phi^2(x) + \lambda_0\phi^4(x)$$
 (2.3.1d)

を考えよう. ただしここで

$$(-\Delta f)(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$$
(2.3.2)

 $m_0^2>0$  は任意に小さく取るが , 全ての計算の後に  $m_0\to 0$  としよう.

我々は  $<\phi(0)\phi(x)>$  の減少率が  $\exp[-t(E_1-E_0)]$  であることに着目し、前に述べた繰りこみ群の発想で,x と y の間にある余分な自由度を計算し尽くすことを考える  $^{[19]}$  . すなわち,前と同じに

$$\phi_{n+1}(x) = (C\phi_n)(x) \equiv \frac{1}{L^{\alpha}} \sum_{\zeta \in \Box} \phi_n(Lx + \zeta)$$
 (2.3.3)

を導入する.最初 V(x)=0 とし  $\phi_n$  の共分散を

$$<\phi_n(x)\phi_n(y)> = G_n(x-y)$$
 (2.3.4)

とおく.ここで

$$G(x,y) = \frac{1}{-\Delta + m_0^2}(x,y),$$

$$G_n(x,y) = (C^n G(C^+)^n)(x,y) = L^{-2n\alpha} \sum_{\zeta,\xi} G(L^n x + \zeta, L^n y + \xi)$$

$$= \frac{1}{L^{2n\alpha}} \sum_{\zeta,\xi} \int \frac{\exp[iL^n p(x-y) + ip(\zeta - \xi)]}{m_0^2 + 2(1 - \cos p)} \frac{dp}{2\pi}$$
(2.3.5a)

$$= \frac{1}{L^{2n\alpha}} \int \frac{\exp[iL^n p(x-y)]}{m_0^2 + (1-\cos p)} \times \frac{\sin^2(L^n p/2)}{\sin^2(p/2)} \frac{dp}{2\pi}$$
 (2.3.5b)

である. $p\in (-\pi,\pi]$  を  $(p+2k\pi)/L^n$  ,  $p\in (-\pi,\pi]$   $(k=0,1,\cdots,L^n-1)$  と書き直すと

$$G_n(x,y) = \frac{L^{2n}}{L^{2n\alpha}} \sum_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[ip(x-y)]}{L^{2n}m_0^2 + 4L^{2n}\sin^2(p+2k\pi)/2L^n}$$

$$\times \frac{\sin^2(p/2)}{\sin^2((p+2\pi k)/2L^n)} \frac{dp}{2\pi L^n}$$

$$\sim \frac{L^{3n}}{L^{2n\alpha}} \sum_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[ip(x-y)]}{L^{2n}m_0^2 + (p+2k\pi)^2} \frac{4\sin^2(p/2)}{(p+2\pi k)^2} \frac{dp}{2\pi} (2.3.6)$$

2.3 微分方程式とブロックスピン変換 35

$$G_n^{-1} \sim L^{2n\alpha - 3n} \left( -\Delta + L^{2n} m_0^2 \right)$$
 (2.3.7)

 $lpha\geq 0$  の選択は任意であるが  $lpha\geq 0$  は分析が容易になるように取りたい . lpha=3/2 は  $\Delta$  を不変に, lpha=1/2 は  $m_0^2$  を不変にするが , 当面  $lpha\geq 0$  を固定せずに , 自由なパラメータとしておく .

前章と同じように ,  $A_n=(G_nC^+G_{n+1}^{-1}),$  そして  $Q:R^{\Lambda\setminus LZ}\to R^{\Lambda}$  , CQ=0 を導入する . すると

$$(CQ) = 0, \quad CA_n = 1$$
 (2.3.8)

であり,前章と同じように

$$\phi_n(x) = \sum_{\zeta} A_n(x,\zeta)\phi_{n+1}(\zeta) + \sum_{\xi \in Z \setminus LZ} Q(x,\xi)z_n(\xi)$$
 (2.3.9)

であり,同様に以下のガウス積分の分解を得る:

$$\langle \phi_n, G_n^{-1} \phi_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1} \phi_{n+1} \rangle + \langle z, \Gamma_n^{-1} z \rangle,$$

$$G_{n+1}^{-1} = A_{n+1}^+ G_n^{-1} A_{n+1},$$

$$\Gamma_n^{-1} = Q^+ G_n^{-1} Q.$$

## 2.3.1 Dyson 階層近似

すでに述べたように ,  $CA_n=1$  と CQ=0 から関係 (2.3.9) は近似的に

$$\phi_n(x) = \frac{L^{\alpha}}{L} \phi_{n+1} \left( \left[ \frac{x}{L} \right] \right) + (Qz_n)(x),$$

$$\sum_{\zeta \in \square} (Qz_n)(Lx + \zeta) = 0.$$
(2.3.10a)

ゆえに

$$\begin{split} \sum_{x \in \Lambda_n} \phi_n^2(x) &= L^{2\alpha - 1} \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} \phi_{n+1}^2(x) + \sum_{x \in \Lambda_n} (Qz_n)^2(x), \\ \sum_{x \in \Lambda_n} \phi_n^4(x) &= L^{4\alpha - 3} \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} \phi_{n+1}^4(x), \\ &+ 6 \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} L^{2\alpha - 2} \phi_{n+1}^2(x) (\sum_{\zeta \in \Box} (Qz_n)^2 (Lx + \zeta)), \\ &+ 3 \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} L^{\alpha - 1} \phi_{n+1}(x) (\sum_{\zeta \in \Box} (Qz_n)^3 (Lx + \zeta)) + \sum_{\zeta \in \Delta_n} (Qz_n)^4(x). \end{split}$$

これは今の場合 , 次のような階層構造をもつラプラシアン  $\Delta_{hcl}$  を使ったことになる :

$$\langle \phi, (-\Delta_{hcl}) \phi \rangle = \sum_{n} L^{-(3-2\alpha)n} \left( \sum_{[x/L]=[y/L]} (\phi_n(x) - \phi_n(y))^2 \right). \tag{2.3.11}$$

つまり L=2 ならば

$$\langle \phi, (-\Delta_{hcl}) \phi \rangle = \sum_{n} 2^{-(3-2\alpha)n} \left( \sum_{x} (\phi_n (2x+1) - \phi_n (2x))^2 \right)$$
$$= \sum_{n} 2^{-(3-2\alpha)n} \left( \sum_{x} 4z_n^2 (2x+1) \right)$$

であり, 一般のLでは

$$\langle \phi_n, (-\Delta_{hcl})\phi_n \rangle$$

$$= L^{-(3-2\alpha)} \langle \phi_{n+1}, (-\Delta_{hcl})\phi_{n+1} \rangle + L^{-(3-2\alpha)n} \sum_{x \in \Lambda_n \setminus Lx} z_n(x)^2$$

である.

# 2.4 シュレディンガー方程式の階層近似

ブロックスピン変換を  $\mathcal H$  に応用して  $\mathcal H_n$  ( $L^n$  の距離での実効的ハミルトニアン) を得たが  $\alpha=3/2$  の設定はあまり好ましくない. この場合 z 変数はいつも同じ強さで計算に入ってくるが、他方このシステムは常に質量のある系なので ( $E_1-E_0>0$ ), このスケール変換で直ちに厳密に正定値の質量項を得るので,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \langle \phi, G_0^{-1} \phi \rangle + \sum_x V_0(\phi(x))$$
 (2.4.1)

とおけば

$$\mathcal{H}_{1} = \frac{1}{2} \langle \phi_{1}, G_{1}^{-1} \phi_{1} \rangle$$

$$-\log \left[ \int \exp\left[ -\sum_{x} V_{0}(L^{\alpha - 1} \phi_{1}([x/L]) + z(x))\right] d\mu(z) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \langle \phi_{1}, G_{1}^{-1} \phi_{1} \rangle + L \sum_{x} V_{0}(L^{\alpha - 1} \phi_{1}(x))$$

$$-\log \left[ \int \exp\left[ -\sum_{x} \delta V_{0}(L^{\alpha - 1} \phi_{1}, z(x)) d\mu(z) \right] \right]$$
(2.4.2a)

であるので、

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2}a_0\phi^2 + \lambda_0\phi^4, \tag{2.4.3a}$$

$$d\mu_0(z) = \prod \exp[-\frac{1}{2}z^2(x)] \frac{dz(x)}{\sqrt{2\pi}}$$
 (2.4.3b)

ととる.ここで  $\lambda_0>0$  であり  $a_0\in R$  は負になってもかまわない.ゆえに

$$\mathcal{H}_{1} = \frac{1}{2} \langle \phi^{1}, G_{1}^{-1} \phi_{1} \rangle$$

$$+ \sum_{x} \left( \frac{1}{2} L^{2\alpha - 1} a_{0} \phi_{1}^{2}(x) + L^{4\alpha - 3} \lambda_{0} \phi_{1}^{4}(x) \right) + \delta V_{1},$$

$$\delta V_{1} = -\log \left[ \int \exp \left[ -\sum_{x} \left( \frac{1}{2} a_{0} z^{2}(x) + \lambda_{0} z^{4}(x) \right) - 6\lambda_{0} L^{2\alpha - 1} \sum_{x} \phi_{1}^{2}(x) (\sum_{x} z(\zeta)^{2}) \right] d\mu(z) \right].$$

#### 2.4.1 $a_0 > 0$ の場合

 $a_0$  と  $\lambda_0$  は二つとも正なので,この正値性は繰りこみ群を応用しているあいだ保たれ, $a_n$  と  $\lambda_n$  は適当なスケーリングによってある値に収束する.

この場合, $a_0\phi^2+\lambda_0\phi^4$  が直ちに  $O(1)z^2$  の形の項を生じ,これは積分の収束に寄与するので  $\alpha=1$  と置くのが便利である.よって

$$G_n^{-1} = L^{-n} \left( -\Delta + L^{2n} m_0^2 \right) \tag{2.4.4}$$

であり, 階層近似は

$$\phi_n(x) = \phi_{n+1}\left(\left[\frac{x}{L}\right]\right) + (Qz_n)(x)$$

の代入をすることになり

$$\begin{split} \sum_{x \in \Lambda_n} \phi_n(x) &= \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} L\phi_{n+1}(x), \\ \sum_{x \in \Lambda_n} \phi_n^2(x) &= \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} L\phi_{n+1}^2(x) + \sum_x (Qz_n)^2(x), \\ \sum_{x \in \Lambda_n} \phi_n^4(x) &= \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} L\phi_{n+1}^4(x) \\ &+ \sum_{x \in \Lambda_{n+1}} 6\phi_{n+1}^2(x) (\sum_{\zeta \in \square(Lx)} (Qz_n)^2(x)) + \sum_x (Qz_n)^4(x), \\ d\mu(z) &= \prod_{x \in \Lambda_n \setminus LZ} \frac{L^{-n/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp[-L^{-n}z^2(x)/2] dz(x) \end{split}$$

であり、評価  $(\alpha = 1)$ 

$$\exp[-\delta V_1] = \int \exp\left[-\left(\frac{1}{2}a_0z^2 + \lambda_0z^4\right) - 6\lambda_0\phi_1^2z^2\right]d\mu(z)$$

$$= \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left((a_0+1) + 12\lambda_0\phi_1^2 + 2\lambda_0z^2\right)z^2\right]dz$$

$$= \text{const.}\left(a_0+1 + O(\lambda_0) + 12\lambda_0\phi_1^2\right)^{-1/2}$$

$$= \text{const.}\exp\left[-\frac{12\lambda_0\phi_1^2(x)}{a_0 + O(1) + O(\lambda_0)}\right]$$

が得られる.従って漸化式

$$\begin{cases}
a_0 \to a_1 = La_0 + \frac{12\lambda_0}{a_0 + O(1)} \\
\lambda_0 \to \lambda_1 = L\lambda_0
\end{cases}$$
(2.4.5)

が得られる.ここで高次項は省略された.ゆえに大変大雑把な帰納法で

$$a_n \to a_{n+1} = La_n + \frac{12\lambda_n}{a_n + O(1)} > La_n,$$
  
 $\lambda_n \to \lambda_{n+1} = L\lambda_n$ 

に到達する.ゆえに  $\lambda_n = L^n \lambda_0$  であり,

$$a_{n+1} = La_n + \frac{12L^n\lambda_0}{a_n + O(1)},$$

又は

$$\frac{a_{n+1}}{L^{n+1}} = \frac{a_n}{L^n} + \frac{12\lambda_0}{La_n + O(1)}$$

が得られる.ゆえに  $a_{n+1} \geq L^{n+1}a_0$  と

$$\frac{a_{n+1}}{L^{n+1}} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{12\lambda_0}{La_k + O(1)}$$

は収束する. つまり

$$au_2 \equiv \lim rac{a_n}{L^n}, \quad$$
 及び  $au_4 \equiv \lim rac{\lambda_n}{L^n}$ 

は存在し,実効ハミルトニアンは高次項を無視して,

$$\frac{1}{2L^n}\langle\phi_n,(-\Delta)\phi_n\rangle + L^n(\tau_2\phi_n^2 + \tau_4\phi_n^4)$$

となるが、これは

$$\frac{1}{2L^n} \left( -\frac{d^2}{d^2x} \right) + L^n(\tau_2 x^2 + \tau_4 x^4) \tag{2.4.6}$$

というシュレディンガー方程式に対応する.これは

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d^2\zeta}\right) + (\tau_2\zeta^2 + L^{-n}\tau_4\zeta^4) \tag{2.4.7}$$

にユニタリー同値である.すなわち  $L^n \to \infty$  につれて質量項  $\zeta^2$  のみが係数  $au_2$  をもって現れる.

調和振動子

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d^2\zeta} + \frac{\omega^2}{2}\zeta^2$$
 (2.4.8)

のスペクトルは  $\{(n+1/2)\omega; n \in N\}$  なので,

$$E_2 - E_1 = \sqrt{2\tau_2}. (2.4.9)$$

この系は多く励起状態を含むので、調和振動子のみというのは正しくない。  $E_1-E_0$  のみがこのスケーリングで生き残ると言う程の意味で、この結果は割り引いて考えられるべきである. すなわち、より高い励起エネルギーは信用で

2.4 シュレディンガー方程式の階層近似 39

きずこの部分は計算上無視した, |x| が大きい場合の振る舞いに含まれていると推察される .

問題  ${\bf 2.4.1}$  上記の議論では |x| が全て小さい領域で近似的な変換であった.これを通常のように、大きい場と小さい場で処理し、 $a_0>0,\,\lambda>0$  の場合の繰りこみ漸化式を厳密に処理せよ.

#### 2.4.2 $a_0 < 0$ の場合

もし  $a_0<0$  ならば,  $z_n(x)$  に関する積分はその時の  $\phi_n^2(x)$  の強さによってしまい, 直ちに困難に遭遇する.すなわち大きな  $|\phi_n(x)|$  に対しては  $z^2$  の係数が負なので我々は未だ  $\alpha=1$  と置かねばならない.後に計算に便利な最適な  $\alpha$ を決定しなくてはならない.再び

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \langle \phi^1, G_1^{-1} \phi_1 \rangle + \sum_x \left( \frac{1}{2} L a_0 \phi_1^2(x) + L \lambda_0 \phi_1^4(x) \right) + \delta V_1$$

から出発しよう.ここで

$$\exp[-\delta V_1] = \int \exp\left[-\sum_x \frac{1}{2} \left(a_0 + 1 + 12\lambda_0 \phi_1^2(x) + 2\lambda_0 z^2(x)\right) z^2(x)\right] dz$$
$$= \int \exp\left[-\sum_x 6\lambda_0 \left(\phi_1^2(x) - K_0 + \frac{1}{6}z^2(x)\right) z^2(x)\right] dz$$

かつ

$$K_0 = \frac{-a_0 - 1}{12\lambda_0} > 0$$

であり,  $a_0+1$  の中の 1 は  $d\mu(z)$  から来ている.この z 積分は 3 つの領域に分割される:

(i) ワインボトル底部の外部 (大きい場領域):

$$L_1 \equiv \{\phi_1(x); a_0 + 1 + 12\lambda_0 \phi_1^2(x) \ge 0\}$$
  
$$\equiv \{\phi_1(x); \phi_1(x)^2 \ge K_1 + 1\}. \tag{2.4.10}$$

(ii) ワインボトルの底領域 (遷移領域):

$$T_1 = \{\phi(x); \lambda_0 | \phi_1^2 - K_0 | \le 1\}.$$
 (2.4.11)

(iii) ワインボトル内部 (小さい場領域):

$$S_1 \equiv \{\phi_1(x); a_0 + 1 + 12\lambda_0 \phi_1^2(x) \le 0\}$$
  
$$\equiv \{\phi_1(x); \phi_1(x)^2 \le K_0\}. \tag{2.4.12}$$

### 2.4.3 $|\phi|$ が大きい所での寄与

最初に  $\phi_1\in L_1$ ,つまり  $\sqrt{\lambda_0}(\phi_1^2-K_0)>1$  の状態,つまりワインボトルの底  $\phi^2=\mu_0^2\equiv -a_0/4\lambda_0$  及びその外側からの寄与を考えよう.ここでは

$$\exp[-\delta V_1(\phi_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(6(\phi_1^2 - K_0) + \frac{z^2}{\lambda_0})z^2\right] dz$$
$$= \frac{c}{\sqrt{\phi_1^2 - K_0}} \int \exp\left[-z^2 - \frac{z^4}{36\lambda_0(\phi_1^2 - K_0)^2}\right] dz$$

である. ゆえに適当な規格化の後,

$$e^{-\delta V_1} = \frac{c}{\sqrt{\phi_1^2 - K_0}} \times \left\{ 1 - \frac{c_1}{\lambda_0 (\phi_1^2 - K_0)^2} + \frac{c_2}{\lambda_0^2 (\phi_1^2 - K_0)^4} + O\left(\frac{1}{\lambda_0^3 (\phi_1^2 - K_0)^6}\right) \right\}$$

が得られる.ただし

$$c_1 = \frac{1}{48}, \qquad c_2 = \frac{35}{6 \cdot 16 \cdot 24}$$

これらの項は大場領域になんら影響を持たないが、ボトルの底  $\phi_1^2 \sim \mu_0^2 \equiv -a_0/4\lambda_0$ . の近傍での振る舞いに大きな効果をもつ .

$$X = \phi_1^2 - \mu_0^2 \; (\mu_0^2 = 3K_0 = a_0/4\lambda_0)$$
 と置いて  $\delta V_1$  を  $X$  で展開すれば:

$$\begin{split} \frac{1}{\sqrt{\phi_1^2 - K_0}} &= \frac{1}{\sqrt{2K_0 + X}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\log(1 + \frac{X}{2K_0})\right] \\ &= \exp\left[-\frac{X}{4K_0} + \frac{X^2}{16K_0^2}\right]. \end{split}$$

同じく

$$1 - \frac{c_1}{\lambda_0(\phi_1^2 - K_0)^2} + \frac{c_2}{\lambda_0^2(\phi_1^2 - K_0)^4} = d_0 \left[ 1 - d_1 X - d_2 X^2 + O(X^3) \right].$$
(2.4.13)

ただし

$$d_1 = \frac{1}{16\lambda_0 K_0^2} - O(\lambda^{-2} K_0^{-3}), \qquad d_2 = \frac{1}{32\lambda_0 K_0^3} - O(\lambda^{-2} K_0^{-4}) \quad (2.4.14)$$

である. すなわちポテンシャルの底の近傍では

$$V_{1}(\phi_{1})$$

$$= LV_{0}(\phi_{0}) + \delta V_{1}$$

$$= L\lambda_{0}X^{2} + \left(\frac{1}{4K_{0}} - d_{1}\right)X - \left(\frac{1}{8K_{0}^{2}} + d_{2} - \frac{1}{2}d_{1}^{2}\right)X^{2} + O(X^{3})$$

$$= \left(L\lambda_{0} - \frac{1}{8K_{0}^{2}} + d_{2} - \frac{1}{2}d_{1}^{2}\right)(\phi_{1}^{2} - \mu_{0}^{2} + \delta m_{0}^{2})^{2} + O(X^{3}), (2.4.15)$$

ここで

$$\delta m_0^2 = \frac{(4K_0)^{-1} - d_1}{2L\lambda_0 + (8K_0^2)^{-1} + d_2 - d_1^2/2}$$
 (2.4.16)

2.4 シュレディンガー方程式の階層近似 41

は厳密に正な定数で

$$\mu_1^2 = \mu_0^2 - \delta m_0^2 \tag{2.4.17}$$

とおいた.

#### 2.4.4 遷移領域

 $\sqrt{\lambda_0}|\phi_1^2-K_0|\leq 1$  であるような  $\phi_1$  に対しては、収束する摂動展開

$$\exp[-\delta V_{1}(\phi_{1})] 
= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(6\sqrt{\lambda_{0}}(\phi_{1}^{2} - K_{0}) + z^{2})z^{2}\right] dz 
= \mathcal{N} \frac{\int e^{-z^{4}} \left(1 - 6\sqrt{\lambda_{0}}(\phi_{1}^{2} - K_{0})z^{2} + \cdots\right) dz}{\int e^{-z^{4}} dz} 
= \mathcal{N} \left(1 - \tilde{c}_{1}\sqrt{\lambda_{0}}(\phi_{1}^{2} - K_{0}) + \tilde{c}_{2}\lambda_{0}(\phi_{1}^{2} - K_{0})^{2} + \cdots\right) 
= \exp\left[-(\tilde{c}_{1}\sqrt{\lambda_{0}} + (2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})\lambda_{0}K_{0})\phi_{1}^{2} + (\tilde{c}_{2}\lambda_{0} - \frac{1}{2}\tilde{c}_{1}^{2}\lambda_{0})\phi_{1}^{4}\right]$$

を用いる,ただしここでは  $O(\lambda_0^{3/2}|\phi^2-K_0|^3)$  を無視した.さらに

$$\tilde{c}_1 = 6 \frac{\int e^{-z^4} z^2 dz}{\int e^{-z^4} dz} = 2.028, \quad \tilde{c}_2 = 18 \frac{\int e^{-z^4} z^4 dz}{\int e^{-z^4} dz} = 4.5.$$

それゆえ我々は以下の遷移状領域  $\sqrt{\lambda_0}|\phi_1^2-K_0|<<1$  の  $\phi_1$  に対して以下の近似的漸化式を得る:

$$\lambda_{0} \to \lambda_{1} = (L - \tilde{c}_{2} + \frac{1}{2}\tilde{c}_{1}^{2})\lambda_{0}, \qquad (2.4.18a)$$

$$a_{0} \to a_{1} = La_{0} + 2\tilde{c}_{1}\sqrt{\lambda_{0}} + 2(2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})\lambda_{0}K_{1}$$

$$= La_{0} - \frac{1}{6}(2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})a_{0} + 2\tilde{c}_{1}\sqrt{\lambda_{0}}$$

$$= (L - \frac{1}{6}(2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2}))a_{0} + 2\tilde{c}_{1}\sqrt{\lambda_{0}}, \qquad (2.4.18b)$$

$$K_{0} \to K_{1} = \frac{-La_{0}(1 - (2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})/6L) - 2c_{1}\sqrt{\lambda_{0}}}{12L\lambda_{0}(1 - (2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})/2L)}$$

$$= K_{0} \left[ 1 + \frac{1}{3L}(2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2}) \right] - \frac{\tilde{c}_{1}}{12\sqrt{\lambda_{0}}(L - (2\tilde{c}_{2} - \tilde{c}_{1}^{2})/2)}. \qquad (2.4.18c)$$

ただしここで  $2\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1^2 \sim 4.88$  である.

#### 2.4.5 $|\phi|$ が小さい所での寄与

同様に  $\phi_1 \in S_1$  に対しては  $a_0 + 12\lambda_0\phi_0^2 = 12\lambda_0(\phi_0^2 - K_1) < 0$  を用いて、

$$\exp[-\delta V_{1}(\phi_{1})] = \exp\left[\frac{(a_{0} + 12\lambda_{0}\phi_{1}^{2})^{2}}{16\lambda_{0}}\right] \times \int \exp\left[-\lambda_{0}\left(z^{2}(x) + \frac{a_{0} + 12\lambda_{0}\phi_{1}^{2}}{4\lambda_{0}}\right)^{2}\right] d\mu(z)$$

$$= \exp\left[\frac{(a_{0} + 12\lambda_{0}\phi_{1}^{2})^{2}}{16\lambda_{0}}\right] \times \int \exp\left[-\lambda_{0}\left(z^{2}(x) - 3(K_{1} - \phi_{1}^{2})\right)^{2}\right] d\mu(z)$$

$$= \exp\left[\frac{(a_{0} + 12\lambda_{0}\phi_{1}^{2})^{2}}{16\lambda_{0}} - \log\left(K_{1} - \phi_{1}^{2}(x) + O(1)\right)\right]$$

が得られる. すなわち

$$\lambda_0 \to \lambda_1 = (L - 9)\lambda_0,$$
 (2.4.19a)  
 $a_0 \to a_1 = (L - \frac{3}{2})a_0.$  (2.4.19b)

この結果は L によるが,妥当な L の値,例えば  $1 < L \le 5/2$  の範囲の L に対しては  $|L-3/2| \le 1$  かつ L-9 < -13/2.故に  $L \in (1,5/2)$  ならば  $\lambda_1 < 0$ , $|a_1| < |a_0|$  であり,関数  $V_n(\phi)$  はこの領域で振動し, $V_n$  は多くの極小値を持つ.

#### 2.4.6 繰り返しと全体の流れ

さてこの繰り込み変換を (2.4.15), (2.4.16) 及び (2.4.18c) を帰納的仮定として繰り返してみよう.分析はかなり荒っぽかったけれども,これらからポテンシャル  $V_n$  は  $\phi_n^2 \sim \mu_n^2$  の近傍ではなだらかになって行き, $\mu_n^2$  は 0 に収束していく(ワインボトルの形は消えていく)ことが分かる.ただしここでは分析の甘さから,初期の  $\mu_0^2 = -a_0/4\lambda_0~(=3K_0)$  と  $-a_0$  が共に小さいと仮定しなければならない.ここで  $\phi_n^2 = \mu_n^2$  でポテンシャルはの極小点になるとした.

定理 2.4.1 小さな  $\mu_0^2=-a_0/4\lambda_0>0$  と小さな  $-a_0>0$  に対して,  $\mu_n^2$  はある  $n=n_0>0$  で負の値に転じ,  $v_n(\phi^2)$  は  $n>n_0$  でただひとつの極小点を持つ.

他方 (短距離相互作用をもつ) 一次元スピン系の一般論から,  $V_n(x)$  は  $n\to\infty$  のとき高温固定点に収束することは知られている. しかしそうは言っても, 中間状態の  $V_n$  は複雑な様相を呈し, とくに  $K_0$  が大きいときには, 多くの極小点を持つことになる. よって階層近似, あるいは WHA 型近似はこの単純な事実を壊すように思われる.

定理 2.4.2 任意の  $\lambda_0>0$  と  $a_0$  に対して,  $\mu_n^2$  はある  $n_0>0$  で負に転じる. すなわち  $v_n(\phi^2)$  は  $n>n_0$  では唯一の極小点を有する.

しかしながら、我々は今の直接的繰り込み群法では  $v_n$  が小さい  $\phi^2$  では振動

2.4 シュレディンガー方程式の階層近似 43

することもあってこの証明に失敗している. 論文 [32] ではこれを避ける方法が与えてある.

#### 2.4.7 $E_2-E_1$ の評価

残念ながら,  $a_0<0$  を  $a_n>0$  に転ずるまで何回繰り返すべきか評価出来なかった. もし  $n_0$  回必要ならば  $L^{n_0}(E_2-E_1)=O(1)$  又は  $E_2-E_1=O(L^{-n_0})$  が期待できよう.

このレベルではあまり決定的なことは言えないが  $a_0<0$  を  $a_n>0$  に転ずるには  $\mu_0^2$  より多い回数の繰り返し式が必要に思われる (ただしおおきな  $\mu_0$  と  $\lambda_0$  に対して). 故に  $E_2-E_1=O(L^{-\mu_0^2})$  が期待されよう.

他方 1 章で紹介された O(N) 不变  $\phi^4$  模型を考慮すれば (勿論 N は巨大にとる  $^{[21]}$  )  $v_n(\phi)$  の流れは簡単に制御されて

$$\mu_n^2 \sim -L^{-1} + \mu_0^2 / L^n$$

が分かる. すなわち  $n=\log\mu_0$  回の変換ステップが  $a_0<0$  を  $a_n>0$  に変更するのに必要だとわかる.

さて  $\alpha_i$  を 二重井戸型ポテンシャル V(x) を極小にする点とし  $\min V(x)=V(\alpha_1)=V(\alpha_2)$  とする.  $H=-(1/2)\Delta+\lambda V(x),\,\lambda>0$  のスペクトルを考えよう.  $^{[74]}$  において  $(E_2-E_1)/\lambda\sim\exp[-\rho(\alpha_1,\alpha_2)]$  が大きな  $\lambda$  について成立することが示されている. ここで  $\rho$  は以下のように古典的経路を取って、ポテンシャルの壁を登るエネルギー (Agmon distace といわれる) である:

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \inf_{T, \gamma} \int_0^T \left( \frac{1}{2} |\gamma^{\circ}(s)|^2 + V((\gamma(s))) \right) ds$$
$$= \inf_{\gamma} \int_0^1 \left( \sqrt{2V(\gamma(s))} |\gamma^{\circ}(s)| \right) ds$$

ここで第一の式では  $\{\gamma(0)=\alpha_1,\gamma(T)=\alpha_2\}$  そして第二の式では  $\{\gamma(0)=\alpha_1,\gamma(1)=\alpha_2\}$ , [74] をみよ.これはインスタントン解であり, $\lambda_0$  と  $a_0<0$  によって我々の言葉に翻訳されるので,我々の計算を正確に仕上げることは意味があると思われる.

注意  ${f 2.4.1}$  O(N) 不変モデルでは、文献 [74] での分析は機能しない.又大きな N における我々の分析がこれと異なるのは妥当に思われる.

# 2.5 WHA 方程式の導出

ブロックスピン変換[19],[20],[78] の無限小の形[1][28] として,繰りこみ群と一般に呼ばれる非線形(偏)微分方程式が得られる.ブロックスピン変換は汎関数積分を愚直に行うといってよろしいが,これは運動量空間の無限小のスライス

で行うのであるが,小さい場(x)では厳密で,大きい場ではそこそこであると信じられている.モデルにもよるが,WHA 方程式では高い運動量が無視され, さらに非局所的相互作用が無視されている.

我々はブロックスピン変換を  $\mathcal{H}_n$  に応用して  $\mathcal{H}_{n+1}$  を得るが,WHA 型の方程式は,階層近似されたブロックスピン変換から得られはするが,今まで議論された何かを不変にするというというものでは無く,幾分発見的に行われる。すなわち連続な  $R^1$  でなされ  $\phi_t(x)$  をフーリエ変換で  $|p| < t^{-1}$  のみにサポートがあるようにし,z を  $(t+\Delta)^{-1} < |p| < t^{-1}$  のスライスにサポートがあるものととする.階層近似と同じように,z(x) は振動する遥動場で  $\phi$  より短い運動量を持つので, $\int z(x)dx=0$  と考え z は小さいとして, $V(\phi+z,t)$  を展開,z で積分すると考える. $\langle z, (-\Delta)z \rangle = t^{-2}\langle z, z \rangle$  とみなし,

$$\int V(\phi + z, t)dx = \int \left[ V(\phi, t) + V_{\phi}(\phi)z + \frac{1}{2}V_{\phi, \phi}(\phi)z^{2} + \cdots \right] dx$$
$$= \int \left[ V(\phi, t) + \frac{1}{2} \int V_{\phi, \phi}(\phi)z^{2} \right] dx$$

と展開してい行く. 汎関数積分は t が t と  $t+\Delta$  の間に入っているということから,極めて直感的に(物理屋的に)

$$V(\phi, t + \Delta) - V(\phi, t) = \det^{-1/2} \left( 1 + t^2 V_{\phi\phi} \right) \times \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \Delta} \right|$$

が得られる.これから

$$\frac{d}{dt}V(\phi,t) = \frac{2\pi}{t^2} \det^{-1/2} \left(1 + t^2 V_{\phi\phi}\right)$$
 (2.5.1)

が得られる。

 $t \to \infty$  でこの非線形発展方程式は本当に調和振動子に収束し,その質量項は  $E_2-E_1$  を近似するのであろうか?今のところ上記の質問には答えられていない.極限

$$V_{eff}(x) = \lim_{t \to \infty} V(t, x)$$
 (2.5.2)

が存在するか否かも,かなり努力したが今のところ不明である.計算機実験では存在するようであるが  $^{[1]}$   $^{[2]}$ ,部分的な答えしかもっていない.一番単純な例として  $V(x)=m^2x^2/2$  ならば,方程式は非自明な解

$$V(t,x) = \frac{m^2}{2}x^2 + a(t)$$

$$a(t) = \int_0^t \frac{1}{2\pi s^2} \log(1 + m^2 s^2) ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi t} \log(1 + m^2 t^2) + \frac{m}{\pi} \operatorname{Tan}^{-1} mt$$
(2.5.3b)

を持つ.これはつまらない例になっている.

本来は多くの励起状態があり調和振動子では無いので, それらの励起状態が

消えてしまうのは不思議である。その理由は前にのべたように変換には一番低い部分のエネルギー差しか見えて来ないので,高次項からくる部分は消えてしまうと思われ,この期待される調和振動子では,一番低いエネルギー順位しか信用できないと思われる。

この変換ではブロックスピン変換と違って,スケール変換が無いので単位長あたりの自由度が低エネルギー状態ばかりで薄くなってしまい,高エネルギー励起が消えて,見えなくなってしまったのだと思われる.そこで  $\alpha$  を 1/2 と取れば

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{2} L^{-2n} \langle \phi_n, (-\Delta_{hcl}) \phi_n \rangle + \sum_x V_n(\phi_n(x))$$
 (2.5.4)

として,

$$V_{n+1}(\phi_{n+1})$$

$$= -\log \left[ \int \exp\left[-\sum_{x} V_n(L^{-1/2}\phi_{n+1}([x/L]) + z(x))\right] d\mu(z) \right]$$

$$= L \sum_{x} V_n(L^{-1/2}\phi_{n+1}(x))$$

$$-\log \left[ \int \exp\left[-\sum_{x} \delta V_n(L^{-1/2}\phi, z(x))\right] d\mu(z) \right]$$
(2.5.5b)

が得られるだろう,ここで  $(V_n$  を V と単純のため書いて)

$$\delta V(L^{\alpha-1}\phi, z(x)) = V_{\phi}(L^{\alpha-1}\phi)z(x) + \frac{1}{2}V_{\phi\phi}(L^{\alpha-1}\phi)z^{2}(x) + O(z^{3}),$$

$$d\mu(z) = \text{const.} \prod_{x \in \Lambda_{n} \setminus L\Lambda_{n+1}} \exp[-\frac{1}{2}L^{-2n}z^{2}(x)]dz(x).$$

ブロックスピン変換の無限小の形は ,  $L^n\equiv t$  を保ちつつ ,  $L\to 1$  かつ  $n\to\infty$  の極限を取ればよい . ゆえに場変数 z は  $t^{-1}=L^{-n}$  と  $(tL)^{-1}=L^{-n-1}$  の間の大変薄い運動量を担っていることになる . かくして積分が実行され ,

$$\det^{-1/2}(L^{-2n}+V_{\phi\phi})$$

が得られる. よって  $LV_n(L^{-1/2}\phi_{n+1})$  を  $L\to 1$  では  $V_n(\phi_{n+1})$  と見做せれば(以下の「注意」をみよ),

$$-\frac{V_{n+1}(\phi_{n+1}) - V_n(\phi_{n+1})}{L^{-n-1} - L^{-n}} = -\frac{\partial}{\partial t^{-1}}V(\phi, t) = \frac{1}{2}\log\left(1 + t^2V_{\phi\phi}\right) (2.5.6)$$

となる.ここで  $V_n(\phi_n) = V(\phi,t)$  とおいた.ゆえに (2.5.1) が得られた.

注意 2.5.1 (1) 無限小型のブロックスピン変換から非線形微分方程式が得られる. 我々のケースでは  $LV_n(L^{-1/2}\phi_{n+1})$  を  $V_n(\phi_{n+1})$  と見なせないから,補正が表われる.どちらの近似が妥当なのか,今の所不明である.

(2) この分析は発見的で厳密でないが,運動量空間ではもっとシステマティックにできるようである.たとえば文献 [28] では別の  $(V_x)^2$  型の 2 次元モデルが扱われていて,同様な非線形微分方程式が得られ,その系は Kosterlitz-Thouless 型転移を示すようである.

# 第3章

# 乱流と繰りこみ群

## **3.1** どこでスケール不変性が

前の議論からわかるように,繰りこみ的思考というのは関数空間で積分するのに,(x 空間または p 空間だけでは局在する関数はつくれないので)相空間で局在分布する関数を取って計算していく,あるいは,ほぼ同じことだが,スケール変化に対して共変なウエーブレット的なもの探していくものである.

流体に目を転ずると,日々目にする乱流,例えば小川の流れのカルマンの渦と山脈の後に出来るカルマンの渦というように,たしかにスケール性がありそうであるが,これを直接に分析した話はあまり聞かない.

私の理解の範囲では、Kraichnan が乱流の intermittency (いつも乱流が起っているわけでは無く、間欠的に乱流が起こり、これがエネルギー散逸に対する Kolmogorov 則からのずれを引き起こすというアイデア)を研究するべく提案 した Kraichnan 模型ではランダム力の起源にガウス型確率変数が導入され、確率微分方程式の形で分析され、その研究で繰り込み群的手法が使われたのが最初である。(文献 [27] とその引用文献を見よ。)

ここでは Navier-Stokes 方程式 [55] の乱流解を直接に扱った Y.Sinai の仕事を紹介する.ここでも前の章で述べたように時間進展に合わせて,スケール変化させて主要部を抜き出している点で前の方法の流れの上にある.

Sinai は撞球のエルゴード性の証明で,卓越したアイデアと計算能力とを示し,繰りこみ群を数学的に研究し始めた第一人者であり,この論文でも素晴らしいアイデアと計算の冴えを見せている.しかしここで得られた解は流れを表す実数解ではなく,フーリエ変換して運動量空間で考えて得られる解析的解なので,元の空間では複素数解になってしまい,非物理的なので割り引いて考えなくてはいけない.

# 3.2 Navier-Stokes (NS) 方程式

流体をつかさどる Navier-Stokes 方程式 (以下 NS 方程式) の解の分析はミレニアム問題の一つであり,今世紀には解決すると期待されているのであろうか.ここでの議論は例えば [48] での議論とは異質であるが,繰りこみ群を用いた方法を紹介する.

粘性が 1 の非圧縮流体は  $(x,t)\in R^{d+1}$  での速度ベクトルを  $u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_d(x,t))$  として以下の Navier-Stokes 方程式に従う .

(NS) 
$$\begin{cases} u_t - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

ここで初期条件は

$$u(x,0) \in u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

であり、かつ非圧縮的

$$\operatorname{div} u_0 = 0$$

とする.これについては次の事実がある.

定理 3.2.1 (Leray, $\mathbf{Hopf}$ )  $u_0$  がエネルギー有限かつ非圧縮的ならば , すなわち

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \text{div } u_0 = 0$$
 (3.2.1)

ならば ,以下のエネルギー不等式を満たす , $\operatorname{NS}$  方程式の時間大域的弱解 u が存在する .

$$||u(t)||_{L^{2}(R^{3})}^{2} + \nu \int_{0}^{t} ||\nabla u(\tau)||_{L^{2}(R^{3})}^{2} d\tau \le ||u_{0}||_{L^{2}(R^{3})}^{2}$$
(3.2.2)

Sinai はその論文 [65] [52] で上記の NS 方程式をフーリエ積分を通じて非線形積分方程式にし、漸化式を通じて解を求めようとするが、この漸化式の特殊な初期状態については乱流解に対応するものがあることを示した.この初期空間の選択が少し微妙で実際の系には対応していない (逆フーリエ変換したものが実数解にならない) という恨みはある.この分析を改良できるか分からないがこの非線形微分方程式の解析関数解を繰りこみ群で求めるということは紹介する価値があると思われる.(この解説の一部は柳沢氏のノートを参考にした [81].)

## 3.3 NS 方程式 の積分方程式化と漸化式

まず

$$v(k,t) = \tilde{u}(k,t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle k,x\rangle} u(x,t) dx, \tag{3.3.1a}$$

$$P_k v = v - \frac{\langle v, k \rangle}{\langle k, k \rangle} k \tag{3.3.1b}$$

とおく .  $P_k$  は , Leray 射影演算子と言われる  $\perp k$  への射影演算子である . 非圧縮条件は kv(k,t)=0 なので , NS 方程式の k と直交する部分のみを取り出して

$$v_t + k^2 v + i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v(k - k'), k \rangle P_k v(k', t) dk' = 0,$$
 (3.3.2a)

かつ 全ての  $k \in \mathbb{R}^3$  と t > 0 に対して

$$\langle v(k,t), k \rangle = 0 \tag{3.3.2b}$$

に書き換えられる. ここで、初期条件を t=0 で与え、 $v(k,0)=v_0(k)$  とする. このとき、この方程式は境界条件付の以下の積分方程式に変換される ( Duhamel の公式 , [48] とその引用論文.以下の問題参照 ) .

$$v(k,t) = \exp[-tk^2]v_0(k) + i\int_0^t \exp[-(t-s)k^2]ds$$
 
$$\times \int_{R^3} \langle v(k-k',s),k \rangle P_k v(k',s) dk', \tag{3.3.3a}$$
 かつ 全ての  $k \in R^3$  と  $t > 0$  に対して

$$\langle v(k,t), k \rangle = 0. \tag{3.3.3b}$$

問題 **3.3.1** (3.3.2a) の両辺に  $e^{tk^2}$  をかけ、

$$v_t(k,t)e^{tk^2} + k^2v(k,t)e^{tk^2} = \frac{d}{dt}\left[v(k,t)e^{tk^2}\right]$$

に注意し、積分方程式 (3.3.3a) に変換できることを示せ.

これは非線形積分方程式であるが, 初期条件

$$\forall k \in \mathbb{R}^3$$
 に対して  $v_0(k) = A\tilde{v}(k)$  (3.3.4)

から出発して、漸次  $v_1(k,t)$ 、・・・・ と解を構成しある時間内では収束し、特に  $\tilde{v}(k)$  がある条件を満たすときにはある時間で爆発する解を求めることができそうである. これは繰りこみ群的処方の得意とするところである. 実際 D. Li と Y.Sinai  $^{[65]}$  は以下の定理を得た:

定理  ${\bf 3.3.1}$   $L^2_\sigma(R^3;C^3)$  を複素数値ベクトル関数  $\tilde v(k)\in L^2(R^3_k)$  で, $\tilde v(k)\perp k$  (  ${\bf a.e.}$   $k\in R^3$  ) を満たすものとする.このときある測度が正の閉区間  $S\subset R^4$  と空でない部分集合  $X\subset L^2_\sigma(R^3;C^3)$  が存在し,任意の  $T_0\in S$  (爆発時刻) 及び  $\tilde v\in X$  (初期位相) に対して,次のことが成り立つ:

 $T_0$  に依存するある、初期振幅  $A_{T_0}$  が存在して、 $v_0(k)=A_{T_0}\tilde{v}(k)$  に対する前述の積分方程式は一意的な解 v(x,t) を時間区間  $[0,T_0)$  上に持つ、さらにこの解に対して以下の (I), (II) が成り立つ.

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} 0 < {}^\forall T' < T_0, {}^\exists C_{0,T'}, C_{1,T'} > 0 \text{ が取れて} \\ |v(k,t)| < C_{0,T'} \exp[-C_{1,T'}|k|] \text{ が } 0 < {}^\forall t < T' \text{ に対し成立} \end{array} \right.$$

$$(II) \begin{cases} \lim_{t \to T_0} ||v(k,t)||_{L^2(R_k^3)} = \infty \\ \lim_{t \to T_0} ||kv(k,t)||_{L^2(R_k^3)} = \infty \\ \lim_{t \to T_0} ||v(k,t)||_{L^\infty(R_k^3)} = \infty \end{cases}$$

積分記号の前のiが示すように、これはNS方程式の正則な複素数値解であり、実際の流速ベクトルに対応はしていないので割り引いて考えなければならない、繰りこみ群はこの積分方程式から漸化式によって解析的解を求める。このため、以下の3つのプロセスを経る。

- 1. 積分方程式の主要部を取り出す単純化
- 2. 固定点 (乱流解) の存在証明
- 3. 固定点(乱流解)への収束証明

乱流解 への収束の証明の場面で、その周りの解を台無しにする発散しうる分流が生じないような初期パラメータがあること、そしてそれを決定する場面で使用される.

### 3.4 単純化

$$\begin{aligned} v_A^1(k,t) &= \exp[-tk^2] v_0(k) = \exp[-tk^2] \, A \tilde{v}(k), \\ v_A^{j+1}(k,t) &= v_A^1(k,t) + i \int_0^t \exp[-(t-s)k^2] ds \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_A^j(k-k'), k \rangle P_k v_A^j(k',s) dk', \, j \ge 1 \end{aligned}$$

なので, これから

$$v_A(k,t) = \lim v_A^j(k,t)$$

が期待される. 解は A のべき級数と仮定できて

$$v_A(k,t) = Ah_1(k,t) + \int_0^t \exp[-(t-s)k^2] \sum_{p>1} A^p h_p(k,s) ds$$

とおいてみる.ここで  $h_1,\,h_2$  は直ちに求まり,  $h_p\;(p>2)$  は  $h_{p'}\;(p'< p)$  に依存して定まる.すなわち

$$h_1(k,s) = \exp[-sk^2]\tilde{v}(k),$$
  

$$h_2(k,s) = i \int_{R^3} \langle v(k-k')k \rangle P_k \tilde{v}(k') \exp[-s(k-k')^2 - s(k')^2] d^3k'$$

であり, さらに

$$\begin{split} h_p(k,s) &= i \int_0^s ds_2 \int_{R^3} \langle v(k-k'), k \rangle \\ &\times P_k h_{p-1}(k',s) \exp[-s(k-k')^2 - (s-s_2)(k')^2] d^3k' \\ &+ i \int_0^s ds_1 \int_{R^3} \langle h_{p-1}(k-k',s_1), k \rangle \\ &\times P_k \tilde{v}(k') \exp[-(s-s_1)(k-k')^2 - s(k')^2] d^3k' \\ &+ \sum_{p_1+p_2=p, p_i>1} \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \langle h_{p_1}(k-k',s_1), k \rangle \\ &\times P_k h_{p_2}(k',s) \exp[-(s-s_1)(k-k')^2 - (s-s_2)(k')^2] d^3k'. \end{split}$$

これから  $h_p \perp k$  が直ぐわかる. さらに単純化するため運動量と時間を

$$\tilde{k} = k\sqrt{s}, \ \tilde{k'} = k'\sqrt{s}, \ \tilde{s}_1 = \frac{s_1}{s}, \ \tilde{s}_2 = \frac{s_2}{s}$$

とスケール変換し,

$$g_p(\tilde{k}, s) = h_p\left(\frac{\tilde{k}}{\sqrt{s}}, s\right), \quad p > 1$$

と置く. これは  $v(k,s)\sim \exp[-s|k|^2]$  が漸近的に成り立つので、s 依存性を消去すると期待してのことである.

$$g_1(\tilde{k}, s) = \exp[-\tilde{k}^2] \tilde{v}(\tilde{k}/\sqrt{s}),$$

$$g_2(\tilde{k}, s) = \frac{i}{s^2} \int_{R^3} \langle \tilde{v}(\frac{\tilde{k} - \tilde{k}'}{\sqrt{s}}), \tilde{k} \rangle$$

$$\times P_{\tilde{k}} \tilde{v}(\tilde{k}'/\sqrt{s}) \exp[-(\tilde{k} - \tilde{k}')^2 - (\tilde{k}')^2] d^3 \tilde{k}'$$

であり 、さらに  $g_p$  , p>1 に於ては

$$\begin{split} g_{p}(\tilde{k},s) &= \frac{i}{s} \int_{0}^{1} d\tilde{s}_{2} \int_{R^{3}} \langle \tilde{v}(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s_{2}}}), \tilde{k} \rangle \\ &\times P_{\tilde{k}} g_{p-1}(\tilde{k}' \sqrt{\tilde{s_{2}}'}, \tilde{s}_{2}s) \exp[-(\tilde{k}-\tilde{k}')^{2} - (1-\tilde{s}_{2})(\tilde{k}')^{2}] d^{3}\tilde{k}' \\ &+ \frac{i}{s} \int_{0}^{1} d\tilde{s}_{1} \int_{R^{3}} \langle g_{p-1}((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_{1}}, \tilde{s}_{1}s), \tilde{k} \rangle \\ &\times P_{\tilde{k}} \tilde{v}(\tilde{k}'/\sqrt{\tilde{s}}) \exp[-(1-\tilde{s}_{1})(\tilde{k}-\tilde{k}')^{2} - (\tilde{k}')^{2}] d^{3}\tilde{k}' \\ &+ \sum_{p_{1}+p_{2}=p, p_{i}>1} \int_{0}^{1} d\tilde{s}_{1} \int_{0}^{1} d\tilde{s}_{2} \langle g_{p_{1}}(k-k', s_{1}), k \rangle \\ &\times P_{\tilde{k}} g_{p_{2}}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_{2}}, \tilde{s}_{2}s) \exp[-(1-\tilde{s}_{1})(\tilde{k}-\tilde{k}')^{2} - (1-\tilde{s}_{2})(k')^{2}] d^{3}\tilde{k}' \end{split}$$

である.この漸化式は最後の  $\sum_{p_1+p_2=p}$  の部分が支配的である.主要箇所を見やすくするため , さらに以下の変数変換を施す.ポイントは

- 1. 時間スケールされた運動量  $\tilde{k}$  が  $\tilde{\kappa}^{(0)}$  のまわりに幅  $\sqrt{p}$  程度に分布するので,  $\tilde{\kappa}^{(0)}$  中心の積分になおす,
- $2. \sum_{p_1+p_2=p}$  をリーマン和をへて、リーマン積分で近似すること,である. すなわち
- (1) 十分大きな正数  $\tilde{k}^{(0)}$  に対して、

$$\tilde{\kappa}^{(0)} = (0, 0, \tilde{k}^{(0)})$$

さらに

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(r)} = r\tilde{\kappa}^{(0)}$$

とする.

(2)  $\tilde{k}$  の代わりに 新たな独立変数  $Y=(Y_1,Y_2,Y_3)$  を次式で導入する:

$$\tilde{k} = \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} + \sqrt{pY} = p\tilde{\kappa}^{(0)} + \sqrt{pY}$$

(3)  $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2$  の代わりに次式で新変数  $\theta_i$  を導入する.

$$1 - \tilde{s}_j = \frac{\theta_j}{p_j^2}, \quad j = 1, 2$$

(4)  $ilde{k}'$  の代わりに前と同様に新変数 Y' を導入する

$$\tilde{k}' = \tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p}Y'$$

(5) 新たな関数を次式で導入する:

$$\tilde{g}_p(Y,s) = g_p(\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} + \sqrt{p}Y,s)$$

(6) 最後に

$$\gamma = \frac{p_1}{p} \in [0, 1]$$

とし、この $\gamma$ を新たな独立変数とみなす.

さて以上の変換で、独立変数は  $1-\gamma=p_2/p$  なので、

$$\gamma, \theta_1, \theta_2$$

の 3 個に還元される.このとき, $g_p(\tilde{k},s)$  の漸化式の主要な項はこれらの置換によって,

$$\begin{split} \tilde{g}_p(Y,s) &= g_p(\tilde{\mathcal{K}}^p + \sqrt{p}Y,s) \\ &= ip^{5/2} \left[ \sum_{p_1+p_2=p,p_i>\sqrt{p}} \int_0^{p_1^2} d\theta_1 \int_0^{p_2^2} d\theta_2 \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \right. \\ &\quad \times \int_{R^3} \left\langle g_{p_1} \left( \left( \tilde{\mathcal{K}}^{(p_1)} + \sqrt{p_1} \frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}} \right) \sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_2 s \right), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \right\rangle \\ &\quad \times P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} g_{p_2} \left( \left( \tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p_2} \frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}} \right) \sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s \right) \\ &\quad \times \exp[-\theta_1 \left| \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y-Y'}{\sqrt{p}\gamma} \right|^2 - \theta_2 \left| \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y'}{\sqrt{p}(1-\gamma)} \right|^2] d^3 Y' \right] \\ &\quad + p \mathcal{R}_p(Y,s) \end{split}$$

この最後の剰余項は本来の和で  $p_1 < \sqrt{p},$  または  $p_2 < \sqrt{p}$  の項をまとめたもので、

$$R_p \to 0, \quad p \to \infty$$

が成り立つ.

この中の主要項は、 $p\to\infty$  で生ずるものであり、この変換の固定点である。これをさらに単純化するために、この積分の主要項は  $p_1=O(p), p_2=O(p)$  からのみ起こり、p>>1、かつ  $Y\in R^3, Y'\in R^3$  が O(1) であると考えてよいこと、さらに非圧縮条件 kg(k,s)=0 からその第 3 成分が、第 1 と第 2 成分で表され、しかも無視できる  $O(p^{-1/2})$  の大きさであることを示す。

このとき  $Y/\sqrt{p}$ ,  $(Y-Y')/\sqrt{p}$  は上記の中で無視でき, 加えて

$$\tilde{s}_i = 1 - \frac{\theta_i}{p_i^2} \sim 1, i = 1, 2$$

とおけば、上の積分の指数関数部

$$\exp\left[-\theta_1 \left| \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y - Y'}{\sqrt{p}\gamma} \right|^2 - \theta_2 \left| \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y'}{\sqrt{p}(1 - \gamma)} \right|^2 \right]$$

は

$$\sim \exp[-(\theta_1 + \theta_2)(\tilde{\kappa}^{(0)})^2]$$

と単純に分離され,  $\theta_i$  積分が遂行される.

$$\tilde{g}_{p}(Y,s) \sim \frac{ip^{5/2}}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^{4}} \sum_{p_{1}+p_{2}=p, p_{i}>\sqrt{p}} \frac{1}{p_{1}^{2}p_{2}^{2}} 
\times \int_{R^{3}} \langle g_{p_{1}}(\frac{Y-Y}{\sqrt{\gamma}},s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} g_{p_{2}}(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)] d^{3}Y' 
(3.4.1)$$

さらにこれに非圧縮条件  $\tilde{g}_r(Y,s) \perp Y$  を用いると

$$\begin{split} \left\langle \tilde{g}_{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \left[ \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \langle \tilde{g}_{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s), \frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}} \rangle \right. \\ &\left. + \sqrt{1-\gamma} \langle \tilde{g}_{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s), \frac{Y-Y'}{\sqrt{1-\gamma}} \rangle \right] \end{split}$$

なので

$$\tilde{g}_p(Y,s) = (G_1^{(p)}(Y,s), G_2^{(p)}(Y,s), \frac{1}{p}F^{(p)}(Y,s))$$

とおき、再び非圧縮条件を用い

$$Y_1G_1^{(p)}(Y,s) + Y_2G_2^{(p)}(Y,s) + \tilde{k}^{(0)}pF^{(p)}(Y,s) = 0$$

さらに  $Y \sim O(1)$ , p >> 1 としてオーダーを比較すれば,

$$\begin{split} &\left\langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}) \right\rangle \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[ \frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{Y_1-Y_1'}{\sqrt{\gamma}} G_1^{p_1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) + \frac{Y_2-Y_2'}{\sqrt{\gamma}} G_2^{p_1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \right) \\ &+ \sqrt{1-\gamma} \left( \frac{Y_1'}{\sqrt{1-\gamma}} G_1^{p_1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) + \frac{Y_2-Y_2'}{\sqrt{\gamma}} G_2^{p_1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \right) \right] \end{split}$$

さらに射影  $P_{ ilde{k}^{(0)}+Y/\sqrt{p}}\sim 1$  なので

$$P_{\tilde{k}^{(0)}+Y/\sqrt{p}}\,\tilde{g}_{p_2}(Y'/\sqrt{1-\gamma},s)\sim \tilde{g}_{p_2}(Y'/\sqrt{1-\gamma},s)$$

となり、 $\tilde{g}_p(Y,s)$  を表現する右辺は最終的に

$$\begin{split} &\tilde{g}_{p}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \\ &\sim \frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^{4}} \sum_{p_{1}+p_{2}=p,p_{i}>\sqrt{p}} \frac{p^{2}}{p_{1}^{2}p_{2}^{2}} \\ &\int_{R^{3}} \left[ \frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{Y_{1}-Y'_{1}}{\sqrt{\gamma}} G_{1}^{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) + \frac{Y_{2}-Y'_{2}}{\sqrt{\gamma}} G_{2}^{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \right) \right. \\ &\left. + \sqrt{1-\gamma} \left( \frac{Y'_{1}}{\sqrt{1-\gamma}} G_{1}^{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) + \frac{Y_{2}-Y'_{2}}{\sqrt{\gamma}} G_{2}^{p_{1}}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \right) \right] \\ &\times \tilde{g}_{p_{2}}(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s) d^{3}Y' \end{split}$$

ここで  $\tilde{g}_p(Y,s)$  に対して、Y について「ほぼガウス関数で、補正項はエルミート多項式で記述される」という仮定をおく、すなわち

(仮定) 十分大きい自然数 p を選んで固定し,  $Y\sim O(1)$  とする. このときある時間軸の閉区間  $[S_-^{(p)},S_+^{(p)}]\subset R_*$  上,  $\tilde{g}_p(Y,s)$   $(r=1,2,\cdots,p-1)$  は次式で与えられる.

$$\tilde{g}_p(Y,s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y) (H(Y) + \delta^{(r)}(Y,s)), \quad \forall s \in [S_-^{(p)},S_+^{(p)}]$$

ここで  $w^{\sigma_1,\sigma_2}$  は以下のガウス関数であり

$$w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \exp[-\frac{\sigma^{(1)}}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)] \sqrt{\frac{\sigma_2}{2\pi}} \exp[-\frac{\sigma^{(2)}}{2}Y_3^2]$$

かつ

$$H(Y) = (H_1(Y_1, Y_2, Y_3), H_1(Y_1, Y_2, Y_3), 0)$$
  
$$\delta^{(r)}(Y, s) = (\delta_1^{(r)}(Y, s), \delta_2^{(r)}(Y, s), 0)$$

を想定する. 誤差項  $\delta^{(r)}(Y,s)$  は  $r\to 0$  で 0 に収束する.

ここで未知関数は (ゆっくり変わる関数)  $\Lambda(s)$  と エルミート多項式で展開されることになる H(Y) であるが、これらに関する方程式は元式に代入し、0 に収束すると仮定されている  $\delta^{(r)}$  を無視して得られる。 すなわち

$$\begin{split} &\Lambda(s)w^{\sigma_{1},\sigma_{2}}(Y)H(Y) \sim \frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^{4}} \sum_{\gamma=p_{1}/p} \frac{\gamma^{1/2}(1-\gamma)^{1/2}}{p} \\ &\times \int_{R^{3}} \left[ \frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{Y_{1}-Y_{1}'}{\sqrt{\gamma}} H_{1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}) + \frac{Y_{2}-Y_{2}'}{\sqrt{\gamma}} H_{2}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}},s) \right) \right. \\ &\left. + \sqrt{1-\gamma} \left( \frac{Y_{1}'}{\sqrt{1-\gamma}} H_{1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}) + \frac{Y_{2}-Y_{2}'}{\sqrt{\gamma}} H_{2}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}) \right) \right] H(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}) \\ &\times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \exp\left[ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} ((Y_{1}-Y_{1}')^{2} + (Y_{2}-Y_{2}')^{2}) \right] \\ &\times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)} \exp\left[ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)} ((Y_{1}')^{2} + (Y_{2}')^{2}) \right] \\ &\times \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi\gamma}} \exp\left[ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} (Y_{3}-Y_{3}')^{2} \right] \sqrt{\frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)}} \exp\left[ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)} (Y_{3}')^{2} \right] d^{3}Y' \end{split}$$

p が大きいときは  $p^{-1}\sum_{\gamma=p_1/p} \to \int_0^1 d\gamma$  となり、さらに一番簡単な、 $H_1,H_2$  が  $Y=(Y_1,Y_2)$  のみに依存するケースにおいては、上式の主要部繰り込み変換式は以下のようになる:

$$\begin{split} &\Lambda(s)\frac{\sigma^{(1)}}{2\pi}\exp[-\frac{\sigma^{(1)}}{2}Y^{2}]H(Y) \\ &= \frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^{4}} \int_{0}^{1} d\gamma \int_{R^{2}} \\ &\times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma}\exp[-\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma}(Y-Y')^{2}] \times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)}\exp[-\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)}(Y')^{2}] \\ &\times \left[-(1-\gamma)^{3/2} \left(\frac{Y_{1}-Y_{1}'}{\sqrt{\gamma}}H_{1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}) + \frac{Y_{2}-Y_{2}'}{\sqrt{\gamma}}H_{2}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})\right) \right. \\ &\left. + \sqrt{\gamma}(1-\gamma) \left(\frac{Y_{1}'}{\sqrt{1-\gamma}}H_{1}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}) + \frac{Y_{2}'}{\sqrt{1-\gamma}}H_{2}(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})\right)\right] \\ &\times H(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}})d^{2}Y' \end{split} \tag{3.4.2}$$

ここで  $H(Y) = (H_1(Y), H_2(Y)), Y = (Y_1, Y_2)$  である. ここにはパラメータ  $\sigma^{(1)}$  が入っているが明らかなスケーリングによって,  $\sigma^{(1)}=1$ , とおいて一般 性を失わない、いささかうんざりする式であるが、エルミート多項式と大変相 性がいい積分で、きれいにまとまるのは不思議である、

## 3.5 固定点の存在

さて  $H(Y)=(H_1(Y),H_2(Y))$  の  $H_i$  を各々 $Y=(Y_1,Y_2)$  のエルミート多 項式で展開しておく. すなわち、

$$H_j(Y_1, Y_2) = \sum_{m_i} h^{(j)}(m_1, m_2) He_{m_1}(Y_1) He_{m_2}(Y_2)$$

というように(記号の混乱を避けるため、 $\exp[-z^2/2]/\sqrt{2\pi}$  に関する、m 次エ ルミート多項式を  $He_m(z)$  と記した). 方程式 (3.4.2) は未だ複雑に見えるが, 実は大変単純な接合積に対する式があって、展開係数が従う単純な非線形漸化 式が導かれる.

すなわち以下のエルミート多項式の基本性質が使われる:

問題 3.5.1 エルミート多項式は以下の性質をもつことを示せ.

$$He_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2}$$
 (3.5.1a)  
 $\mathcal{FT}(He_m)(\lambda) = (i\lambda)^m e^{-m^2},$  (3.5.1b)

$$\mathcal{F}\mathcal{T}(He_m)(\lambda) = (i\lambda)^m e^{-m^2},\tag{3.5.1b}$$

$$xHe_m(x) = He_{m+1}(x) + mHe_{m-1}(x).$$
 (3.5.1c)

ここで チT はフーリエ変換を意味する.

問題 3.5.2 エルミート多項式は以下の接合積を満すことを示せ.

$$\int He_{m_1}(\sqrt{\sigma_1}(x-y))e^{-\sigma_1(x-y)^2/2}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2\pi}} \times He_{m_2}(\sqrt{\sigma_2}(x-y))e^{-\sigma_2(x-y)^2/2}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2\pi}}dy$$

$$= \frac{\sigma_3^{(m_1+m_2)/2}}{\sigma_1^{m_1/2}\sigma_2^{m_2/2}}He_{m_1+m_2}(\sqrt{\sigma_3}x)\sqrt{\frac{\sigma_3}{2\pi}}.$$
(3.5.2)

ここで

$$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_3}$$

最初の性質で右辺の  $He_m$  と Y の積を処理し、さらに 2 番目の性質で接合積 を処理する. これを (3.4.2) で用いるには,  $\sigma_1=1/\gamma,\,\sigma_2=1/(1-\gamma)$  とおけ ば,  $\sigma_3 = 1$  で, (3.4.2) 式の左辺を与える.  $d\gamma$  積分は分離されて遂行され,

$$J_{m'm''}^{(1)} = -\int_0^1 \gamma^{m'/2} (1 - \gamma)^{(m''+2)/2} d\gamma$$
 (3.5.3)

$$J_{m'm''}^{(2)} = -\int_0^1 \gamma^{(m'+1)/2} (1-\gamma)^{(m''+2)/2} d\gamma$$
 (3.5.4)

のタイプの積分でまとめられる.これによって左右の項の係数を比較して,展開係数の非線型な漸化式が得られる.

$$h^{(j)}(m_1, m_2) = \sum_{\substack{m'_1 + m''_1 = m_1 \\ m'_2 + m''_2 = m_2}} \left\{ J^{(1)}_{m'm''} \left\{ (B_1 h^{(1)})(m'_1, m'_2) + B_2 h^{(2)})(m'_1, m'_2) \right\} \right. \\ \left. \times h^{(j)}(m''_1, m''_2) + J^{(2)}_{m'm''} \left\{ (B_1 h^{(1)})(m'_1, m'_2) + B_2 h^{(2)})(m'_1, m'_2) \right\} h^{(j)}(m''_1, m''_2) \right\}$$

かつ

$$(B_1 h^{(j)})(m'_1, n'_2) = h^{(j)}(m'_1 - 1, m'_2) + (m'_1 + 1)h^{(j)}(m'_1 + 1, m'_2)$$
  

$$(B_2 h^{(j)})(m'_1, n'_2) = h^{(j)}(m'_1, m'_2 - 1) + (m'_2 + 1)h^{(j)}(m'_1, m'_2 + 1)$$

である. 特に定数項に対応する  $h_{0,0}^{(i)}$  を 0 とおけば、最初の 4 つある  $\{h_{ij}^{(1)},h_{ij}^{(2)};i+j=1\}$  は閉じた 4 つの連立方程式になって固定され,さらに  $\{h_{ij}^{(1)},h_{ij}^{(2)};i+j=2\}$  も同様に 0 になることが分かる.自由な初期パラメータは  $\{h_{jk}^{(i)};j+k=3\}$  のみになり,このうち 2 つは 0, 残る 6 つのうち,2 つ同士等しく,結局 3 つの初期自由パラメータから出発して漸化式で解が求められる.それらは以下の形の方程式に従う:

$$C^{(d)}h^{d} = b^{(d)}$$

$$h^{(d)} = (h_{0,d}^{(1)}, \cdots, h_{d,0}^{(1)}, h_{0,d}^{(2)}, \cdots, h_{d,0}^{(2)})^{T} \in R^{2d+2}$$

ここで  $C^{(d)}$  は  $(2d+2) \times (2d+2)$  の実行列で,  $b^{(d)}$  は d-1 以下の  $h^{(d)}$  の多項式である. 具体的には

これから任意の初期パラメータ  $(h_{12}^{(1)},h_{21}^{(1)},h_{30}^{(1)})$  から出発して、これらにの み依存する形式的解が存在すること、さらにこれらが絶対値において十分小さければ、この級数解が適当な有界性を満たして、収束することが示される。 すな わち  $h_{m_1,m_2}^{(j)}$  は  $d=m_1+m_2$  とともに急速に 0 に収束することが示される. Li-Sinai によって以下が証明されている.

定理 **3.5.1** (固定点の存在 )  $\sigma_1=1$  とする.  $h_{12}^{(1)}|<\delta, |h_{21}^{(1)}|<\delta, |h_{30}^{(1)}|<\delta$  でかつ  $\delta$  が十分小さければ以下の形の  $H_i(Y)$  に対する, Navier-Stokes 方程式 (3.4.2) の解が存在する:

$$H_j(Y_1, Y_2) = \sum_{m_1 > 0} h_{m_1, m_2}^j H_{m_1}(Y_1) H_{m_2}(Y_2)$$

ここに  $C>0,\,0<\rho<1/4$  であり

$$|h_{m_1,m_2}^j| \le C \frac{\rho^{m_1+m_2}}{\Gamma((m_1+m_2+7)/2)}$$

を満たす.

一般の  $\sigma$  に対しては、

$$H_j^{\sigma^{(1)}} = \sqrt{\sigma^{(1)}} H(\sqrt{\sigma^{(1)}} Y), \quad j = 1, 2$$

である. 以下が我々の結論を出す根拠になる.

定理  ${\bf 3.5.2}$  (固定点への収束 ) 時間軸  $R_+$  上のある滑らかな関数  $\Lambda(s)$ , および正定数  $\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}$  と十分大きな自然数  $p_0$  が存在して,次が成り立つ:任意の自然数  $p\geq p_0$  に対し,閉区間  $[S_-^{(p)},S_+^{(p)}],\, 0< S_-^{(p)}< S_+^{(p)}$  と空でない部分集合  $X_p\subset L^2_\sigma(R^3;C^3)$  で

- 1.  $\cap_{p>p_0}[S_-^{(p)}, S_+^{(p)}] \equiv S$  は測度が正の閉区間,
- 2.  $\cap_{p\geq p_0}X_p\equiv X$  は  $L^2_\sigma(R^3;C^3)$  の 10 個のパラメータで表される空でない 部分集合 ,

となるものが存在して任意の  $ilde{v}\in X_p$  を初期位相とする,  $ilde{g}_r(Y,s)$  ,  $r=1,2,\cdots,p-1$  に対しては

$$\tilde{g}_r(Y,s) = \Lambda^{r-1}(s) r w^{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y) \left(H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \delta^{(r)}(Y,s)\right)$$

 $\forall s \in [S_-^{(p)}, S_+^{(p)}], \, \forall Y \sim O(1)$  という表現が成立する.

特に任意の  $\tilde{v}\in X$  を初期位相とするときには、任意の  $p\geq p_0$  に対し、 $\forall s\in S,$   $\forall Y\sim O(1)$  として以下の漸近形をもつ:

$$\tilde{g}_r(Y,s) = \Lambda^{r-1}(s)rw^{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y)\left(H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \delta^{(r)}(Y,s)\right)$$

誤差項  $\delta^{(r)}$  は  $r \to \infty$  で

$$\left| \left| \delta^{(r)}(Y,s) \right| \right|_{L^2(R^3_{s,:} w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y))} \to 0, \quad \forall s \in S$$

の意味で 0 に収束する. ここに  $||\cdot||_{L^2(R^3_Y:w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y))}$  は  $w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y))$  を乗じた  $L^2(R^3_Y)$  のノルム.

この定理は  $g_p(k,t)$  がある (k,t) の近傍で $,\sim p$  位に振舞うことをいい, これから発散が示される. 実際

$$v_A(k,t) = A \exp[-tk^2]\tilde{v}(k) + \int_0^t \exp[-(t-s)k^2] \sum_{p>1} A^p g_p(k\sqrt{s}, s) ds$$

で

$$g_p(\sqrt{k}T_0, T_0) = \tilde{g}_p\left(\frac{\sqrt{T_0}(k - (p\kappa_0)/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}}, T_0\right)$$

(3.4.1) で定義された  $\tilde{g}_r(Y,s)$  で  $Y=\sqrt{k}T_0,\,s=T_0$  とすれば、

$$\begin{split} A^p g_p(k\sqrt{T_0},T_0) &\sim A^p \Lambda(T_0)^{p-1} p \\ &\times w^{(\sigma_1,\sigma_2)} \left( \frac{\sqrt{T_0}(k-(p\kappa_0)/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}} \right) \\ &\times H^{\sigma^{(1)}} \left( \frac{\sqrt{T_0}(k-(p\kappa_0)/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}} \right) \end{split}$$

A を  $A=\Lambda(T_0)^{-1}$  と選び,  $w^{(\sigma_1,\sigma_2)}(Y)$  は  $Y_1,Y_2$  のガウス関数であるので, 括弧内の絶対値が 1 より大きいところでは消えてしまう. すなわち

$$D_p = \{k \in \mathbb{R}^3; |k_i| < O(\sqrt{p}), i = 1, 2, |(k_3 - (p\tilde{k}^{(0)}))/\sqrt{T_0}| < O(\sqrt{p})\}$$

以外では0である. $D_p$ の特性関数を $\chi_{D_n}(k)$ とおけば、

$$A^p g_p(k\sqrt{T_0}, T_0) \sim \Lambda_{T_0} p \chi_{D_p}(k)$$

よって

$$\lim_{t\to T_0}\left|\left|\int_0^t \exp[-(t-s)k^2]A^pg_p(k\sqrt{s},s)ds\right|\right|_{L^2(R^3_t)}\sim p\to\infty$$

これから

$$\lim_{t \to T_0} ||v(k,t)||_{L^2(R_k^3)} = +\infty$$

ほかの量の発散も同じである.

## 3.6 収束の証明

いままでは単に式変形だけであったが、最大の問題はこの固定点に収束することであり、一番難解な部分である。ここで使われる方法はかなり異色のように感じられる。p を増加して、 $\gamma$  に関する Riemann 和を積分に変換していくの

で、それが上手く収束することを示す.

$$\tilde{g}_p(Y,s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y) (H(Y) + \delta^{(r)}(Y,s))$$

とおいて、ガウス関数 w、エルミート多項式 H と誤差項  $\delta^{(r)}$  とに分離  $(\Lambda(s)$  はゆっくりかわる関数) したのが要点なのでこの誤差項  $\delta^{(r)}$  の構成に繰り込み群を用いさらに、Bleher-Sinai 理論でパラメータを決める.

$$\tilde{g}_p(Y,s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y) (H_1(Y) + \delta_1^{(r)}(Y,s), H_2(Y) + \delta_2^{(r)}(Y,s), \delta_3^{(r)}(Y,s))$$

ここで

$$w^{\sigma_1,\sigma_2}(Y) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \exp[-\frac{\sigma^{(1)}}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)] \sqrt{\frac{\sigma_2}{2\pi}} \exp[-\frac{\sigma^{(2)}}{2}Y_3^2]$$

これを漸化式 (3.4.2) に入れて、再び  $(H(Y)+\delta^{(r)})$  に該当するものをピックアップする。 すなわち、

- (a)  $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s) = \delta^{(r)}(Y, s), \ \gamma = r/p, \ r = 1, 2, \dots, p-1$
- (b)  $\delta^{(p)}(1,Y,s)$  は (3.4.2) の右辺に  $H(Y'/\sqrt{1-\gamma})$  を代入しそれを線形化したもの、すなわち

$$\begin{split} &\frac{\sigma^{(1)}}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\sigma^{(1)}}{2}(Y_1^2+Y_2^2)-\frac{\sigma^2}{2}Y_3^2\right]\delta_j^{(p+1)}(1,Y,s)\\ &=\frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^4}\int_0^1d\gamma\int_{R^2}\left(\frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma}\right)^{3/2}\left(\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi(1-\gamma)}\right)^{3/2}\\ &\times\exp\left[-\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma}((Y_1-Y_1')^2+(Y_1-Y_1')^2)-\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)}((Y_1')^2+(Y_2')^2)\right]\\ &\times\exp\left[-\frac{\sigma^{(2)}}{2\gamma}(Y_3-Y_3')^2-\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)}(Y_3')^2\right]\\ &\times\left\{\left[-(1-\gamma)^{3/2}\left(\frac{Y_1-Y_1'}{\sqrt{\gamma}}H_1(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})+\frac{Y_2-Y_2'}{\sqrt{\gamma}}H_2(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})\right)\right]\\ &+\sqrt{\gamma}(1-\gamma)\left(\frac{Y_1'}{\sqrt{1-\gamma}}H_1(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})+\frac{Y_2'}{\sqrt{1-\gamma}}H_2(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}})\right)\right]\\ &\times\delta_j^{p+1}(1-\gamma,\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\\ &+\left[-(1-\gamma)^{3/2}\left(\frac{Y_1-Y_1'}{\sqrt{\gamma}}\delta_1^{p+1}(1-\gamma,\frac{Y-Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\right)\right.\\ &+\frac{Y_2-Y_2'}{\sqrt{\gamma}}\delta_2^{p+1}(1-\gamma,\frac{Y-Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\right)\\ &+\sqrt{\gamma}(1-\gamma)\left(\frac{Y_1'}{\sqrt{1-\gamma}}\delta_1^{p+1}(1-\gamma,\frac{Y-Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\right)\\ &+\frac{Y_2'}{\sqrt{1-\gamma}}\delta_2^{p+1}(1-\gamma,\frac{Y-Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\right]H_j(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}},s)\right\}d^3Y'\\ &(3.6.1) \end{split}$$

 $(\delta^2$  以上は無視される). この右辺はまさに以下説明される変換の生成演算子 A を (指数関数を除いて)  $\delta_j$  に作用したものにほかならない. すなわち

$$\equiv \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\sigma^{(1)}}{2} (Y_1^2 + Y_2^2) - \frac{\sigma^2}{2} Y_3^2\right] \mathcal{A} \delta_j^{(p+1)}$$
(3.6.2)

である.

これで (a), (b) により, リーマン和の分割点  $\gamma=r/p,\,r=1,2,\cdots,p-1$  に於いては  $\delta^{(p)}(\gamma,Y,s)=\delta^{(r)}(Y,s)$  とし,  $p\to p+1$  によって生じた新しい区間 [p/(1+p),1] に対しては新しい点  $\gamma=1$  として (b) で与えている.これを線形に補完してそれを再び  $\delta^{(p)}(\gamma,Y,s)=\delta^{(r)}(Y,s),\,0\leq\gamma\leq1$  と表している.

次に  $\{g_r|r< p\} o \{g_r|r< p+1\}$  の変換を構成するために,今定義した  $\delta^{(p)}(\gamma,Y,s)$  を用いて  $\delta^{(p+1)}(\gamma,Y,s)$  を以下のように構成する:

$$(1)$$
  $0 \le \gamma \le \frac{p}{1+p}$  に対しては、

$$\delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s) = \delta^{(p)}(\frac{p+1}{p}\gamma, Y, s).$$

(2)  $\delta^{(p+1)}(1,Y,s)$  は式 (3.6.1) の右辺で  $\delta^{(p)}$  を  $\delta^{(p+1)}$  と置き換えて求める.

すなわち、リーマン和の分割を増やしていくが、イメージ的には地層が一枚重なって、それを押し縮めて厚さ 1 メートルにし、さらにまた地層が折り重なって、また押し縮めていくというプロセスである. このようにして、p の増加に伴って、 $\delta^{(p)}(\gamma,Y,s)$  から  $\delta^{(p+1)}(\gamma,Y,s)$  の写像が定義される:

$$R_p: \delta^{(p)}(\gamma, Y, s) \to \delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s) \tag{3.6.3}$$

さてそのため

$$\Delta = \{\delta(\gamma,Y) \in C^3 | \delta(\gamma,\cdot) \in \operatorname{Lip}([0,1]; L^2_\sigma(R^3_Y : w^{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y)) \}$$

と定義して,

$$L_{\theta}: \Delta \to \Delta$$

を次式で定める:

 $(1') \gamma_{j+1} \leq \gamma \leq \gamma_j, j = 1, 2, \cdots,$  に対しては,

$$L_{\theta}(\Delta(\gamma, Y)) = \delta(\gamma(1+\theta), Y)$$

(2')  $\gamma_1=(1+\theta)^{-1}\leq \gamma\leq \gamma_0=1$  に対しては, $L_{\theta}(\Delta(\cdot,Y))$  は(3.6.1) の右辺で  $\delta^{(p)}$  を $\delta^{(p_0)}$  で置き換えた方程式の解 $\delta^{(p_0)}(1,\delta^{(p_0)}(1,Y,s))$   $L_{\theta}(\delta(\gamma_1,Y))$  を折れ線で補完した関数とする( $p_0=[1/\theta]+1$ ).

ここで  $\gamma_j=(1+\theta)^{-j}$  ,  $j=0,1,2,\cdots$  である . さて  $\gamma\to\gamma/(1+p^{-1})$  なので,

$$R_p = L_{\frac{1}{p}}$$

が直ちにわかり,  $L_{\theta}$  は  $p \to \infty$  に伴って,  $R_p$  を適当に連続化したものである. すでに 2 章で議論したように連続極限

$$\lim_{n \to \infty: n\theta \to t} L_{\theta}^n \equiv A^t \tag{3.6.4}$$

が存在する. ゆえに直ちに

- (a)  $\{A^t\}$  is semi-group  $\mathcal{C}$  of.
- (b)  $0 < \gamma < 1$ , 0 < t かつ  $\gamma e^t < 1$  である任意の  $\gamma, t$  に対して

$$A^t \delta(\gamma, Y) = \delta(\gamma e^t, Y)$$

が分かる.

この変換によって、繰りこみの流れがいかに変化するか見るには,生成演算子

$$\mathcal{A} = \lim_{t \to 0} \frac{A^t - 1}{t}, \quad D(\mathcal{A}) = \Delta \tag{3.6.5}$$

の固有値  $\lambda$  を求め,繰りこみ群の言葉でいうところの,relevant な項  $(\lambda>0)$ , irelevant な項  $(\lambda<0)$ ,marginal な項  $(\lambda=0)$ )を分別しておかねばならない. 補題  ${\bf 3.6.1}$  半群  $A^t$  の固有ベクトルは

$$\delta(\gamma, Y) = \gamma^{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha}(Y)$$

の形をとる.ここに  $\tilde{\Phi}_{\alpha}(Y)$  は (3.6.1) の解である. このことから Sinai たちは下の結果を得る:

定理 3.6.2 A のスペクトルに対して

$$Spec(\mathcal{A}) = \{1, \frac{1}{2}, 0, \lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}, m \ge 1\}$$
 (3.6.6)

ここで

$$\lambda_m^{(1)} = -\frac{m}{2}, \quad \lambda_m^{(2)} = -\frac{\sqrt{17} - 4 - m}{2}$$

であり、その固有空間の次元については

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_{1/2} = 3, \quad \nu_0 = 6$$
 (3.6.7)

さらに

$$\nu_{\lambda_m^{(1)}} = \frac{(m+3)(m+2)}{2}, \quad \nu_{\lambda_m^{(2)}} = \frac{m(m+5)}{2} \tag{3.6.8}$$

この固有値  $\alpha\in\operatorname{spec} A$  が負でない , すなわち relevant (不安定 ,  $\alpha>0)$  あるいは marginal (中立 ,  $\alpha=0)$  である項は ,  $p\to\infty$  で急激にあるいはゆっくりと発散する可能性があるので ,主要項  $H^{\sigma^{(1)}}(Y)$  の振る舞いを覆い隠してしまい,定理の証明が出来なくなってしまう.これらの固有空間を順に  $\Gamma^{(u)},\Gamma^{(n)},\Gamma^{(s)}$ と書くことにする.

よって、これらの項が消えるように初期項を設定するという、この本の前のほうで何度も言われた問題に遭遇する.

補題の証明をスケッチしてみる.固有値  $\alpha$  に対して固有関数  $\gamma^{\alpha}\Phi_{\alpha,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y)$  が対応し, $\Phi_{\alpha,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y)$  自体は (3.6.1) に従う. ((3.6.1) で  $\delta^{(p+1)}(\gamma,Y,s)$  などを  $\gamma^{\alpha}\Phi_{\alpha,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}(Y)$  で置き換えたものが成立する).

$$\Phi_{\alpha,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}}^{(j)}(Y) \propto \Phi_{\alpha,1,1}^{(j)}(\sqrt{\sigma^{(1)}}Y_1,\sqrt{\sigma^{(1)}}Y_2,\sqrt{\sigma^{(2)}}_3)$$

なので,  $\sigma^{(i)} = 1$  とし, さらに エルミート関数展開

$$\begin{split} &\Phi_{\alpha,1,1}^{(j)}(Y) = \Phi_{\alpha}^{(j)}(Y) \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3} f_{\alpha}^{(j)}(m_1, m_2, m_3) He_{m_1}(Y_1) He_{m_2}(Y_2) He_{m_3}(Y_3) \end{split}$$

を導入すれば、結局  $\{f_{\alpha}^{(j)}(m_1,m_2,m_3)\}$  に対する線形方程式が得られるが、 $m_3$  については結合積なので  $Y_3$  によらず、 $f_{m_1,m_2}\delta_{m_3}$  の形の解を探せばよい. その方程式は  $\beta=\alpha+m_3/2$  そして

$$f_{\beta}^{(j)}(m_1, m_2) = f_{\alpha}^{(j)}(m_1, m_2)\delta_{m_3}$$

としてまとめると、固有値  $\alpha$  は前に述べた  $\gamma^{m'}(1-\gamma)^{m''}$  の中の、m' や m'' の中に  $d=m_1+m_2$  の中に  $d+2\beta$  の形で入ってくる.

$$J_{m'm''}^{(1)} = -\int_0^1 \gamma^{m'/2} (1 - \gamma)^{(m''+2)/2} d\gamma$$
 (3.6.9)

$$J_{m'm''}^{(2)} = -\int_0^1 \gamma^{(m'+1)/2} (1-\gamma)^{(m''+2)/2} d\gamma$$
 (3.6.10)

$$f_{\beta}^{d} = \left(f_{\beta}^{(1)}(0,d), f_{\beta}^{(1)}(1,d-1), \cdots, f_{\beta}^{(1)}(d,0), f_{\beta}^{(2)}(0,d), f_{\beta}^{(2)}(1,d-1), \cdots, f_{\beta}^{(2)}(d,0)\right)^{T} \in C^{2(d+1)}$$

としたときに

$$C_{\beta}^{(d)} f_{\beta}^{(d)} = b_{\beta}^{(d)}$$
 (3.6.11)

の形をとる.  $C_{\beta}^{(d)}\in C^{2(d+1)\times 2(d+1)}$  は d と  $\beta=\alpha+m_3/2$  に依存する行列で、その成分は前と同様の方法で求まり、類似の行列がえられる:

$$\begin{split} C_{\beta}^{(d)}(k,\ell) &= \\ \begin{cases} 1 - \frac{16d + 32\beta - 16 + 32k}{(d+2\beta+1)(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)} & 1 \leq k = \ell \leq d+1 \\ 1 - \frac{80d + 160\beta + 80 - 32k}{(d+2\beta+1)(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)} & d+2 \leq k \\ k = \ell \leq 2d+2 \end{cases} \\ - \frac{32(d+2\beta-k+2)}{(d+2\beta+1)(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)} & 2 \leq k \leq d+1 \\ \ell = d+k \end{cases} \\ - \frac{32(k-d-2\beta-1)}{(d+2\beta+1)(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)} & d+2 \leq k \leq 2d+1 \\ \ell = k-d \end{cases}$$

上の式では  $d+2\beta$  の形が現れているが、この実部は >-1 で問題は生じない. 分母の表現次元の d が 4 次式で入っていて、分子は 1 次式なので、 $d\to\infty$  で  $C^d_\beta\to I_d$ . この固有値は比較的簡単に求まる.実際

$$a_1 = \left(1 - \frac{16}{(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)}\right) \times \frac{(d+2\beta+1)(d+2\beta+3)(d+2\beta+5)}{32}$$

とし,

$$\tilde{C}_{\beta}^{(d)}(k,\ell) = \begin{cases} k-1 & 1 \leq k = \ell \leq d+1 \\ 2d+2-k & d+2 \leq k = \ell \leq 2d+2 \\ d+2-k & 2 \leq k \leq d+1, \ell = d+k \\ k-d-1 & d+2 \leq k \leq 2d+1, \ell = k-d \\ 0 & 上記以外 \end{cases}$$

を導入すれば, $a_1$  が  $\tilde{C}_{\beta}^{(d)}$  の固有値になることが分かるが,他方その固有値は0 が多重度 d+2 で,d+1 が多重度 d で対応することが分かる. これから $a_1=0$  , $a_1=d+1$  が解になる.  $\beta=\alpha+m_3/2$  なので結局

定理 3.6.3 [65] 方程式が非自明な解を持つ必要十分条件は

$$\beta = \frac{3-m}{2}, \quad \text{ZII} \quad \frac{\sqrt{17}-4-m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.6.12}$$

さらに  $f_eta^{(j)}$  の性質を線形方程式から評価して ,

定理 3.6.4 [65] 方程式が非自明な解を持つ必要十分条件は

$$\beta=\frac{3-m}{2}, \quad \text{ Id} \quad \frac{\sqrt{17}-4-m}{2}, \quad m=1,2,3,\cdots.$$

であって,かつ対応する解 $f_eta^j(m_1,m_2)$ は以下の性質をもつ.

- 1.  $\beta = \frac{\sqrt{17}-4-m}{2}$  の場合:
  - $(\mathrm{a})$   $0 \leq m_1 + m_2 < m$  ならば  $f_eta^j(m_1, m_2) = 0$  ,
  - (b) d=m ならば

$$f_{eta}^{(1)}(r,d-r)=-(d-r+1)f_{eta}^{(2)}(r-1,d-r+1), \quad r=1,2,\cdots,d$$
 かつ  $f_{eta}^{(1)}(0,d)$  ,  $f_{eta}^{(2)}(d,0)$  は自由パラメータになる .  $m+2$  個の自由パラメータ  $f_{eta}^{(1)}(r,m-r)$  ,  $r=0,1,\cdots,d$  及び  $f_{eta}^{(2)}(m,0)$  が決められれば ,  $f_{eta}^{(j)}(m_1,m_2)$  ,  $m_1+m_2\geq m$  は一意的に決定される .

- 2.  $\beta = \frac{3-m}{2}$  の場合:
  - (a)  $0 \le m_1 + m_2 < m$  ならば  $f_{\beta}^j(m_1, m_2) = 0$  ,

$$f_{\beta}^{(1)}(r,d-r) = f_{\beta}^{(2)}(r-1,d-r+1), \quad r = 1,2,\cdots,d$$

は自由パラメータになる.自由パラメータ  $f_{\beta}^{(j)}(m_1,m_2)$  ,  $m_1+m_2\geq m+1$  は  $f_{\beta}^{(1)}(r,m-r)$  ,  $r=1,2,\cdots,m$  が決められれば , 一意的に決定される.

両方のケースで,解  $f_{\beta}^{(j)}(m_1,m_2)$  は  $m_1+m_2=m+1,m+2,\cdots$  で 0 であり  $f_{\beta}^{(j)}$  は以下の不等式に従う.

$$\left| f_{\beta}^{(j)}(m_1, m_2) \right| \le C_3 \frac{\rho^{m_1 + m_2 + 2\beta}}{\Gamma((m_1 + m_2 + 2\beta + 3)/2)}$$
 (3.6.13)

ここで  $C_3 > 0$  は定数で  $0 < \rho < (4000)^{-1}$  である.

この計算は単純ではあるが長い式が続くので割愛して(原論文に当たられたい),主要定理を紹介して終わりたい.

定理 3.6.5 [65] A のスペクトラムは以下の 8 つの固有値からなる:

$$\operatorname{spec} \mathcal{A} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 0, \lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}, m \ge 1 \right\}$$
 (3.6.14)

ここで  $\lambda_m^{(1)}=-m/2,\;\lambda_m^{(2)}=(\sqrt{17}-4-m)/2,\;m\geq 1$  である .( よって  $\lambda_m^{(1)}<0$  .) さらにその多重度  $\nu$  は非正の固有値に対して

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_{1/2} = 3, \quad \nu_0 = 6$$

であり,正の固有値に対して

$$\nu_{\lambda_m^{(1)}} = \frac{(m+3)(m+4)}{2}, \quad \nu_{\lambda_m^{(2)}} = \frac{m(m+5)}{2}$$

正の固有値に対応する固有空間を  $\Gamma^{(u)}$  , 0 の固有値に対応する固有空間を  $\Gamma^{(n)}$  ,  ${\rm Re}\,\lambda<0$  に対応する固有空間を  $\Gamma^{(s)}$  とすれば  $\dim\Gamma^{(u)}=4$  ,  $\dim\Gamma^{(0)}=6$  であって、

$$\Delta = \Gamma^s + \Gamma^n + \Gamma^u$$

このことは乱流に導く固有関数空間が 4+6 の大変薄い 10 次元空間 だということを述べている.この論文は正直難解であって繰りこみ群の流れが,不安定解  $\lambda>0$  と中性解  $(\lambda=0)$  によってかき乱され,かつ幾つかの近似を経る中で誤差評価が大変である.このあたりは未だ詳細な追跡はなされていない.実な解の追求など研究の余地は多いと思われる  $^{[81]}$ .

## 第4章

# ペレルマンの理論と統計力学

### 4.1 曲面の繰りこみ理論

歴史的にみると、曲面上に値をとるスピンモデル、 $\sigma$  モデルの繰りこみに関して、Ricci flow の方程式が出てくることを最初に指摘したのは、Atiyah の学生であった、Friedan [15] であるが、論文の出版まで時間がかかっていて結構難解である\*1).

いままで格子空間の上で主に論理を展開してきたが、いわゆる「場の理論」を 摂動的に構成するばあいには、連続空間で計算するので当初から無限大の発散 に遭遇してしまう。この処理には、まず切断(格子空間の格子幅の逆数に該当)  $\Lambda$  を導入し、この  $\Lambda$  に対していかに補正項をとるか考えて、有限項が残るよう に処理する。格子空間でも、いろいろ議論したがこの処理法が繰りこみである。

この章では、Perelman の議論を、色々な曲面上に値をとるスピン系の相転移問題と考えて、それと Ricci flow の関連を見てみたい、 $\sigma$  模型は古典統計力学では、O(N) スピンモデル

$$<\vec{s}_0\vec{s}_x> = \frac{1}{Z}\int \vec{s}_0\vec{s}_x \exp\left[\beta \sum_{|x-y|=1} \vec{s}_x\vec{s}_y + \sum u(\vec{s}_x)\right] \prod d\vec{s}_x$$

の一般化である. ここに

- $1.\ \vec{s_x}$  は単位球面  $S^{N-1}$  の上に値をとるスピンあるいは一般に適当な多様体に値をとるスピン ,
- $2. \ u(s_x)$  は外部からの磁場などの作用,

であり、ストリング模型の研究で Polyakov によって導入され、曲がった時空の中を動く string の運動を記述する.

<sup>\*1)</sup> この部分は[42]での文章をもとに書きおろしたものである.

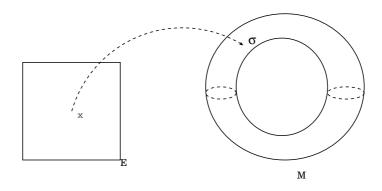


図 4.1 配位空間  $\Sigma$  と多様体 M

場の変数 
$$\phi(x)\in R$$
  $\to$  スピン  $\sigma(x)\in S^{N-1}$  or 
$$\mathbf{U} - \mathbf{\nabla} \mathcal{S}$$
 様体  $M(x) \, (x\in \Sigma)$ 

結合定数  $\lambda \to \text{ metric coupling } g_{ij}(\sigma) \ (\sigma \in M)$ 

と置き換わる、すなわち以下のような作用から出発する:

$$S[\sigma, g] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} dx \, \left( g_{ij}(\sigma) \partial_{\mu} \sigma^{i} \partial_{\mu} \sigma^{j} + u(\sigma) \right).$$

ここで  $u(\sigma)$  はタキオン場と呼ばれる場 (外部磁場に対応) である.場合によっては dilaton 場  $\Phi$  と 反対称テンソル場  $B_{ij}$  が導入される.

$$S[\sigma, B, g] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} dx \left( (\eta^{\mu\nu} g_{ij}(\sigma) + i\varepsilon^{\mu\nu} B_{ij}) \partial_{\mu} \sigma^{i} \partial_{\nu} \sigma^{j} + R\Phi(x) + u(\sigma) \right).$$

そして期待値

$$\int \prod u_j(\sigma_j) \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} S[\sigma, g] \right] D\sigma$$

が対象になる.ここで  $\hbar$  は Planck 定数 h を  $2\pi$  で割ったものである ( i,j,k は多様体 M の局所座標の添字, $\mu,\nu$  は時空  $\Sigma$  の座標の添字で、同じ添字については和をとると規約する.)

本来このモデルは、統計力学からの縛りでコンパクトな多様体しか考えなかったが、局在現象を示す、Anderson モデルの研究から非有界な non-compact シグマモデルが俎上に上がってきた。これは random matrix 模型とか Anderson モデル とか言われる、結合定数が、ある分布に従ってでたらめに決定されている系の相関関数  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_H$  (H はそのときの結合定数  $\{H_{ij} \in R\}$ ) の研究から始まる。ここでは一つのシステムはあるランダムネスによって決定されて、系は本来あるべき平行不変性や回転不変性を失ってしまい、そのスペクトルには結晶特有のバンド構造は見られず、奇妙な現象が付きまとい、いまだにミステリアスな問題が残っている。直感的には、波動関数がランダムなごみで反射され

て干渉して、減少して局在し、連続スペクトルが離散スペクトルに変わったりしてしまう。これは平行不変性のある結晶には無い性質である。 さらに系がいかに高温であろうと、小さい確率ではあるが何処かには巨大な低温域が存在しうるので、イジングモデルで考えるとそこで相転移に近いことが起こって、1 章で述べた Lee-Yang 定理では 零点が実軸に近着き、エネルギーの解析性が失われてしまう $*^{2}$ ).

一つ一つの系はある確率で結合定数がランダムに変わるのでこの問題では確率 1 で言える事を計算しなければならない. 文献 [66] で考察しているモデルでは、random matrix に関連した局在模型を考慮している:

$$H_{ij} = \sqrt{J_{ij}} R_{ij}, \tag{4.1.1}$$

$$R_{ij}$$
 の分布 =  $\exp[-\operatorname{Tr} R^2] \prod dR_{ij}$ . (4.1.2)

ここで

$$J_{ij} = (-W^2 \Delta +)_{ij}^{-1} \sim \exp[-|i-j|/W]$$

はほぼ W の距離内では定数と見なされる結合定数であり、ある確率で定まった  $R=\{R_{ij}\in R\}$  ごとの値を「焼きいれ」(quenched) の期待値といい、それを  $\{R_{ij}\}$  の分布で平均したもの

$$\int \langle f(R_{ij}) \rangle_R d\mu(R) \tag{4.1.3}$$

を「焼きなまし」(annealed) という. 例えばアンダーソン局在では拡散係数に関連して (quenched) グリーン関数

$$\left| \frac{1}{E - H + i\varepsilon} (x, y) \right|^2$$

とその平均が必要になるが、Wegner はこの平均化された値が non-compact シグマ模型の期待値で表せることを、dimensional reduction method で示してみせた。これは数学的に中々厳密化できない部分のように思え、そこを避けたSpencer 達の論文 [66]、[67] が私にとっては分かり易い。この問題はアンダーソン局在に密接に関連し、いまなおなおホットな話題である。

### 4.2 スピン模型達とその連続極限

モデルとしてはどのような多様体でも構わないのだが、Riemann 計量が具体的に分かったほうがいいので、典型的な例として、 $S^{N-1}$  スピン模型と  $H^{N-1}$  スピン模型を考える。あとで参考として考える、楕円体、F-ラス、円筒上などに値をとるモデルも考えられるが、これらはその Riemann 計量  $g_{ij}$  に応じて

<sup>\*2)</sup> マクロ的な現象としては、潜水艦の周りを泡で覆ってしまうと、Anderson 局在によって、音速が毎秒数メートルになり、敵からの発見を防げるとのことである.

flow が決まり、それぞれのモデルの相転移の性質に従った結論になる。これらの統計力学的性質は、一般論で分かるところがかなりあって、それはこれらの多様体の性質および Ricci flow と整合する.

さて代表的な例の一つは古典的ハイゼンベルグモデルであり, M は N-1 次元球面

$$S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1) = \{(x^1, \dots, x^n); \sum_i (x^i)^2 = 1\}$$

になり、もう一つは N-1 次元双曲面  $H^{N-1}$ 

$$H^{N-1} = SO(1, N-1)/SO(N-1)$$
$$= \{(x^1, \dots, x^n); (x^1)^2 - \sum_{i=2}^n (x^i)^2 = 1, x^1 > 0\}$$

である. 球面がでこぼこしても構わないが、そういう場合には Ricci flow 方程式は部分的に崩落現象を示していく. これは統計力学的にはエネルギー的に得な部分は肥大化し、損な部分は減少していくことなのだと理解していい.

これらは定曲率面で、局所座標を用いて、おのおの

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$x_k = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{k-1} \cos \theta_k$$

$$\cdots = \cdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}$$

#### および

$$x_1 = r \cosh \theta_1$$

$$x_2 = r \sinh \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sinh \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$x_k = r \sinh \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{k-1} \cos \theta_k$$

$$\cdots = \cdots$$

$$x_n = r \sinh \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}$$

#### と表せる.

古典的ハイゼンベルグモデル  $M=SO(N)/SO(N-1)=S^{N-1}$  ではこの 局所座標系を用いると (r=1 として)  ${m x}={}^t(x_1,\cdots,x_n)$  とし

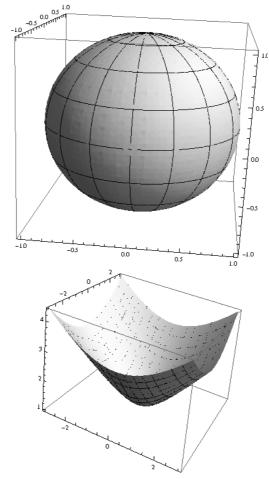


図 4.2 球面と双曲面.

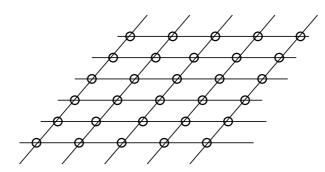


図 4.3 格子上の  $\sigma$  模型  $\Lambda^{-1}$  は  $\Sigma \subset R^2$  に作られた格子の幅.

$$d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_i} d\theta_i \equiv \sum_{i=1}^{n-1} u_i d\theta_i$$
 (4.2.1)

とおけば,

$$u_{i} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta_{i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \cdots \sin \theta_{i} \\ \sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \cdots \cos \theta_{i} \cos \theta_{i+1} \\ \sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \cdots \cos \theta_{i} \sin \theta_{i+1} \cos \theta_{i+2} \\ \vdots \\ \sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \cdots \cos \theta_{i} \cdots \cos \theta_{n-1} \\ \sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \cdots \cos \theta_{i} \cdots \sin \theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(4.2.2)$$

であり $, < u_i, u_j >= \delta_{ij} \prod_{k=1}^i \sin^2 \theta_k$  が成立する. ゆえに

$$\sum_{i} (dx^{i})^{2} = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ii}(\theta)(d\theta_{i})^{2}$$
(4.2.3)

$$g_{ii}(\theta) = \langle u_i, u_i \rangle = \prod_{k=1}^{i} \sin^2 \theta_k$$
 (4.2.4)

同じように双曲面モデル  $M=SO(1,N-1)/SO(N-1)=H^{N-1}$  で前述の局所座標系を用いると (r=1 として),  $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\cdots,x_n)$  とし、

$$d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_i} d\theta_i \equiv \sum_{i=1}^{n-1} u_i d\theta_i$$
 (4.2.5)

とおけば  $< u_i, u_i >= 0 \ (i \neq j, 内積は (-, +, \cdots, +))$  なので

$$\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle = -(dx_1)^2 + \sum_{i=2}^{n} (dx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ii}(\theta) (d\theta_i)^2$$
 (4.2.6)

$$g_{ii} = \langle u_i, u_i \rangle = \sinh^2 \theta_1 \prod_{k=2}^{i-1} \sin^2 \theta_k$$
 (4.2.7)

この座標系では  $g_{ij}$  は対角的である. さてこのときクリストフェルシンボル (Christoffel's symbol)  $^{[71]}$  は

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left( \partial_{j} g_{\ell k} + \partial_{k} g_{\ell j} - \partial_{\ell} g_{jk} \right) \tag{4.2.8}$$

$$= \frac{1}{2} (g_{ii})^{-1} \left( \partial_j g_{ii} \delta_{ik} + \partial_k g_{ii} \delta_{ij} - \partial_i g_{kk} \delta_{jk} \right)$$
 (4.2.9)

(同じ添え字については和をとるものとする)である. Ricci tenor は

$$R_{jk\ell}^{i} = \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^{i}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^{i}}{\partial x^{\ell}} + \Gamma_{km}^{i} \Gamma_{\ell k}^{m} - \Gamma_{\ell m}^{i} \Gamma_{kj}^{m}$$

で

$$R_{ij} \equiv R_{ikj}^k = \partial_k \Gamma_{ji}^k - \partial_j \Gamma_{ki}^k + \Gamma_{k\ell}^k \Gamma_{ji}^\ell - \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{\ell i}^k$$

#### 74 第4章 ペレルマンの理論と統計力学

であるが、あらわに計算してもよいが、今の定曲率スピンモデルでは  $R_{ij}$  は、 $g_{ij}$  に比例する。 すなわちスカラー曲率 R は  $R=g^{ij}R_{ij}$  なので、 $R_{ij}=Rg_{ij}$ 、 $g^{ij}=(g^{-1})_{ij}$ 、実際

$$R_{ij}=\pmrac{1}{r^2}(N-2)g_{ij},$$
  $r=$ 円の半径

 $(S^{N-1}$  で $+, H^{N-1}$  で-) が証明される.

それゆえに、このスピン系の Hamintonian は

$$\sum_{|x-y|=1} < (\sigma(x) - \sigma(y)), (\sigma(x) - \sigma(y)) >$$

ここで  $x,y\in\Lambda$  であり,  $S^{n-1}$  モデルでは  $\langle\sigma,\sigma\rangle=\sum_{i=1}^n(\sigma_i)^2,\,H^{n-1}$  モデルでは  $<\sigma,\sigma>=-(\sigma_1)^2+\sum_{i=2}^n(\sigma_i)^2$  である. それゆえに格子間隔が大変小さければ, このスピン模型は以下の  $\sigma$  模型の作用になる:

$$\sum_{|x-y|=1} \langle (\sigma(x) - \sigma(y)), (\sigma(x) - \sigma(y)) \rangle$$

$$\sim \int g_{ij}(\theta(x)) d\theta^{i}(x) d\theta^{j}(x) d^{d}x \qquad (4.2.10)$$

逆に $, \sigma$ 模型に格子近似を行えば

$$S_{g,u}^{\Lambda}(\phi) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{x,y \in \Sigma_{\Lambda} \\ |x-y| = \Lambda^{-1}}} g_{ij}(\phi(x))(\phi^{i}(x) - \phi^{i}(y))(\phi^{j}(x) - \phi^{j}(y))$$
$$+\Lambda^{-2} \sum_{x} \frac{1}{4\pi} u(\phi(x))$$

 $\Lambda^{-1}$  は  $\Sigma\subset R^2$  に作られた格子の幅である。ただし  $\sigma$  が多様体で非線形性が前の  $\phi^4$  に比べて強く  $\phi_{n-1}=A\phi_n+Qz_{n-1}$  や  $\phi=\phi_>+\phi_<$  のような線形分解が機能しない.ブロックスピン変換も試みはあったが進展していない.実際繰りこみ変換が成功する鍵は,ブロック変換された量が前と同じ構造 (つまり群ならば群にうつるなど)をもっていて,いくつかのパラメータに変化が吸収されることであるが,今の系ではこれはおぼつかない.

じつはこれらの問題は色々な処理法があって、以下の 5,6 章はそれに割くことにするが、ここでは通常の方法を踏襲することにする。通常以下のように行われる:

1. 時空は D 次元であるとし、摂動計算を D について解析接続し D-2 でローラン 展開,  $D\to 2$  で生ずる特異点  $\delta g/(2-D)$  が発散項  $\delta g \times \log \Lambda$  に対応する  $(|p|<\Lambda$  は運動量切断になる):

$$\int \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} = 2^{-D} \pi^{-D/2} m^{D-2} \Gamma(1 - D/2)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 - D} + \text{ regular part}$$

2. 運動量切断  $\Lambda$  はないが,長さで測った次元を d として因子  $\mu^d$  を補正項に乗じておく.

$$\int \frac{\mu^{2-D}}{p^2 + m^2} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} = \frac{\mu^{2-D}}{2\pi} \frac{1}{2-D} + \text{ regular part}$$

- 3. これらの  $(D-2)^{-1}$  の留数が繰り込み処方で取り去られると見なす. (minimal subtraction)
- 4. ブロックスピン変換の代わりに、次に議論される、back ground 場  $\phi$  上の  $\xi$  理論  $S_{\phi}(\xi)$  の実効的作用 ( effective action )  $\Gamma_b(\phi)$  を繰り込まれたそれと考える
- D 次元では

$$d^4x \to d^Dx = x^{D-1}dx$$

で、Mellin 変換となり発散は表面上消え、 $D\to 2$  のとき極として現れてくる。  $\mu$  の変動は x のスケール変換  $x\to \tilde x\equiv \mu x$  に対応する . (  $x=\tilde x/\mu$  ,  $\mu$  が大きくなるとき短距離スケールになる .)

実効的作用  $\Gamma_b(\phi)$  について述べよう.まず

$$S[\sigma, g] = \int_{\Sigma} dx \left[ g_{ij}(\sigma) \partial_{\mu} \sigma^{i} \partial_{\mu} \sigma^{j} + u(\phi) \right]$$

において  $\phi:\Sigma\to M$  と  $\operatorname{section}\ \xi\in\phi^*TM$  を考え指数写像  $e^\xi\phi:\Sigma\to M$  を導入 ,

$$\sigma = e^{(\hbar)^{1/2}\xi}\phi, \quad \xi \in T_{\phi}$$

とおいて & 理論の作用を考える.

 $\hbar = 1$  としてあとで  $\xi_i \to (\hbar)^{1/2} \xi_i$  とする.  $\xi$  理論の作用を次式で考える.

$$\exp[-S_{q,u}(e^{\xi}\phi)]D_q(e^{\xi}\phi) = \exp[-S_{\phi}(\xi)]D\xi \equiv d\mu_{\phi}(\xi).$$

さらに Legendre 変換で

$$e^{W(J)} = \int e^{\langle \xi, J \rangle} d\mu_{\phi}(\xi)$$
  
$$-\Gamma(\zeta) = \inf_{J \in E^*} \left( -\langle \zeta, J \rangle + W(J) \right).$$

となる.ここで

$$\Gamma_b(\phi) \equiv \Gamma(\zeta = 0)$$

を  $\sigma$  モデルの back ground field effective action という (係数などパラメータは  $\phi$  に依存する). これを展開し 1-loop approximate renormalized action を得る.

$$(\sigma)^{i} = (e^{\xi}\phi)^{i} = (\phi)^{i} + \xi^{i} - \frac{1}{2}\Gamma^{i}_{jk}\xi^{j}\xi^{k} + O(\xi^{3})$$

とテイラー展開し $\xi$ の2次までとり、共変微分の形になるようまとめる. 例えば

$$u(e^{\xi}\phi) = u(\phi + \xi - \frac{1}{2}\Gamma\xi^{j}\xi^{k} + O(\xi^{3}))$$

$$= u(\phi) + \partial_{i}u(\phi)\xi^{i} + \frac{1}{2}\nabla_{i}\partial_{j}u(\phi)\xi^{i}\xi^{j} + O(\xi^{3})$$

$$\nabla_{i}X_{j} = \partial_{i}X_{j} - \Gamma_{ij}^{k}X_{k}$$

 $(i,j,k,\ell, ext{etc.}=M$ の座標,  $\mu,
u, ext{etc.}=$ 時空 $\Sigma$ の座標). 2次のオーダーまで テーラー展開する. 具体的には

$$\begin{split} \partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j} &\rightarrow \partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j} + \partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\xi^{i} + \partial_{\nu}\xi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j} + \partial_{\nu}\xi^{i}\partial_{\nu}\xi^{j} \\ &- \frac{1}{2}\partial_{\nu}\phi^{i}\left(\partial_{\nu}\phi^{\ell}\partial_{\ell}\Gamma^{j}_{\ell m}\xi^{\ell}\xi^{m} + \Gamma^{j}_{\ell m}\partial_{\nu}(\xi^{\ell}\xi^{m})\right) \\ &- \frac{1}{2}\partial_{\nu}\phi^{j}(i \rightarrow j) \\ g_{ij} &\rightarrow g_{ij} + \xi^{k}\partial_{k}g_{ij} + \frac{1}{2}(\xi^{k}\xi^{\ell}\partial_{k}\partial_{\ell} - \Gamma^{k}_{\ell m}\xi^{\ell}\xi^{m}\partial_{k})g_{ij} \end{split}$$

であり,よく知られた公式

$$\partial_k g_{ij} = g_{im} \Gamma_{kj}^m + g_{jm} \Gamma_{ki}^m, \quad g_{ik} \Gamma_{\ell m}^k = \frac{1}{2} \left( \partial_\ell g_{im} + \partial_m g_{\ell m} - \partial_i g_\ell \right)$$

など用いて共変な形にまとめあげると、

$$\begin{split} S(e^{\xi}\phi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^{i} \partial_{\mu} \phi^{j} + u(\phi) \right\} dx \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ 2g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^{i} \partial_{\mu} \xi^{j} + \partial_{i} u(\phi) \xi^{i} \right. \\ &+ g_{ij}(\phi) \nabla_{\nu} \xi^{i} \nabla_{\nu} \xi^{j} - R_{ijk\ell} \partial_{\nu} \phi^{i} \partial_{\nu} \phi^{j} \xi^{k} \xi^{\ell} + \frac{1}{2} \nabla_{i} \partial_{j} u(\phi) \xi^{i} \xi^{j} \\ &+ O(\xi^{3}) \right\} dx \\ &= (\overline{\pi} \mathcal{O} \vec{\Xi}) + (\xi \mathcal{O} 1 \text{ 次式}) + (2 \text{ 次式}) + (3 \text{ 次式以上}), \end{split}$$

すなわち

$$\begin{split} S(e^{\xi}\phi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^{i} \partial_{\mu} \phi^{j} + u(\phi) \right\} dx \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ 2g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^{i} \partial_{\mu} \xi^{j} + \partial_{i} u(\phi) \xi^{i} + g_{ij}(\phi) \nabla_{\nu} \xi^{i} \nabla_{\nu} \xi^{j} \right. \\ &- R_{ijk\ell} \partial_{\nu} \phi^{i} \partial_{\nu} \phi^{j} \xi^{k} \xi^{\ell} + \frac{1}{2} \nabla_{i} \partial_{j} u(\phi) \xi^{i} \xi^{j} + O(\xi^{3}) \right\} dx \end{split}$$

ここで

$$\nabla_{\nu}\xi^{i} = \partial_{\nu}\xi^{i} + \Gamma^{i}_{jk}(\phi)\partial_{\nu}\phi^{j}\,\xi^{k}$$

( $\nabla_i$  は M 上の共変微分で添字の相違に注意)で

$$R_{ijk\ell} = g_{ia}R^{a}_{jk\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}\partial x^{\ell}} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^{i}\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}\partial x^{\ell}} - \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^{j}\partial x^{k}} \right) + g_{ab} \left( \Gamma^{b}_{ik}\Gamma^{a}_{j\ell} - \Gamma^{b}_{i\ell}\Gamma^{a}_{jk} \right).$$

ここで 接ベクトル  $\xi$  で積分するが、係数が既に  $\phi$  に依存するので,このままでは難しい. そこでベクトルバンドル  $\phi^*TM$  に大域的正規直交基底  $\{e_a\}_{a=1}^d$  を導入し

$$e_a = e_a^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

とする. さらに

$$\xi^i = \xi^a e^i_a$$

として変形すれば結局

$$S(e^{\xi}\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} [g_{ij}(\phi)\partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j} + u(\phi)]dx$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} [(\nabla_{\nu}\xi)^{2} - R_{iakb}\partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{k}\xi^{a}\xi^{b}$$

$$+ \frac{1}{2}e_{a}^{i}e_{b}^{j}\nabla_{i}\partial_{j}u(\phi)\xi^{a}\xi^{b}$$

$$+ 2e_{a}^{i}\partial_{\nu}\phi^{i}\nabla_{\nu}\xi^{a} + e_{a}^{i}\partial_{i}u(\phi)\xi^{i}]dx + O(\xi^{3})$$

ただしここで  $(e_a^a)$  は  $(e_a^i)$  の逆行列で,  $R_{iakb} = e_a^j e_b^l R_{ijk\ell}$  そして

$$\nabla_{\nu}\xi^{a} = \partial_{\nu}\xi^{a} + A^{a}_{b\nu}\xi^{b}$$

$$A^{a}_{b\nu} = e^{a}_{i}(\partial_{\nu}e^{i}_{b} + \Gamma^{i}_{jk}\partial_{\nu}\phi^{j} \cdot e^{k}_{b})$$

 $\xi$  上の積分は摂動的に積分可能であり、主要項のガウス部分とそれ以外にわける . 結局  $\xi_i \to (\hbar)^{1/2} \xi_i$  と元にもどして

$$\Gamma_{b}(\phi) = \frac{1}{4\pi\hbar} \int_{\Sigma} [g_{ij}(\phi)\partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j} + u(\phi)]dx$$

$$-\log \left[ \int \exp\left(-\frac{1}{4\pi} \int ((\nabla_{\nu}\xi^{a})^{2} - R_{iabj}(\phi)\partial_{\nu}\phi^{i}\partial_{\nu}\phi^{j}\xi^{a}\xi^{b} + \frac{1}{2}e_{a}^{i}e_{b}^{j}\nabla_{i}\partial_{j}u(\phi)\xi^{a}\xi^{b})dx \right) D\xi \right] + O(\hbar)$$

さらに  $\log$  の中で  $abla_
u \xi^a = \partial_
u \xi^a + A^a_{b
u} \xi^b$  から  $\xi$  を取り出し、ガウス項と相互作用の項に分離される:

$$\exp[-S_0 - \sum_{i=1}^3 S_I^{(i)}]D\xi$$

$$S_{0} = \frac{1}{4\pi} \int \left( (\partial_{\nu}\xi^{a})^{2} + \frac{1}{2} e_{a}^{i} e_{b}^{j} \nabla_{i} \partial_{j} u |_{\phi_{0}} \xi^{a} \xi^{b} \right) dx$$

$$S_{I}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int \left( 2A_{b\nu}^{a} \partial_{\nu} \xi^{a} \xi^{b} + A_{b\nu}^{a} A_{c\nu}^{a} \xi^{b} \xi^{c} \right) dx$$

$$S_{I}^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \int \left( e_{a}^{i} e_{b}^{j} \nabla_{i} \partial_{j} u(\phi) - e_{a}^{i} e_{b}^{j} \nabla_{i} \partial_{j} u(\phi) |_{\phi_{0}} \right) \xi^{a} \xi^{b} dx$$

$$S_{I}^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \int \left( -R_{iakb} \partial_{\nu} \phi^{i} \partial_{\nu} \phi^{k} \xi^{a} \xi^{b} \right) dx$$

ただし  $\phi_0=\lim_{|x|\to\infty}\phi(x)$  は無限遠における定数場  $\phi$  である(注意  $\hbar$  依存性は消え  $\hbar\to 0$  では理論は Gaussian 理論に戻る。) これは短距離における漸近的自由 (asymptotic free at short distances) と言われている現象で、1 章での  $\phi_4^4$  の長距離における漸近的自由 (asymptotic free at long distances) と対比される現象である.

#### 4.3 発散項と繰り込み

発散の処理のため発散項の出自をチェックする.まず確率測度  $d
u(\xi)$  を取り出しておく.

$$d\nu(\xi) = \frac{1}{Z} \exp[-S_0(\xi)]D\xi, \quad (\int d\nu = 1),$$

$$Z = \int \exp[-S_0(\xi)]D\xi$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\delta_{ab}\Delta + \frac{1}{2}(e_a^i e_b^j \nabla_i \partial_j u(\phi)|_{\phi_0})\right)\right]$$

このとき,対象となる積分は

積分 = 
$$Z \times \int \exp[-S_I^{(1)} - S_I^{(2)} - S_I^{(3)}] d\nu(\xi)$$

であって, $S^{(1)},S^{(2)}+S^{(3)},Z$  から 3 種類の発散が生じる. (i).  $\int \exp[-S_I^{(1)}] d\nu(\xi) \sim 1 - \int S_I^{(1)} d\nu(\xi) + rac{1}{2} \int (S_I^{(1)})^2 d\nu(\xi)$  は二つのおたまじゃくし型のグラフ 図 4.4 で表される.

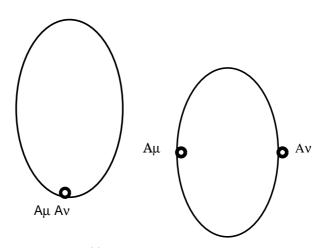


図 4.4  $S^{(1)}$  の収束するオタマジャクシ型グラフ

このオタマジャクシ型グラフからの寄与はゲージ不変性によって有限に収ま

る. 発散するのは 図 4.5 から生ずるものである.

$$\int \exp[-S^{(0)} - S_I^{(2)} - S_I^{(3)}]D\xi$$

$$\sim Z \times \int \{1 - (R\delta\phi\delta\phi\xi\xi) - (ee\nabla\partial u - ee\nabla\partial u|_0)\xi\xi\} d\nu(\xi)$$

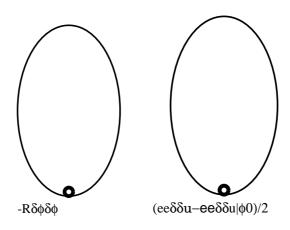


図 4.5  $S^{(2)} + S^{(3)}$  の発散するオタマジャクシ型グラフ

(ii).  $R\delta$  と  $ee\nabla\partial u$  に乗ぜられている  $\xi_i\xi_i$  の積分からでる寄与は

$$\delta_{ij} \int_{|p| < \Lambda} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \to \delta_{ij} \int \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{d^D p}{(2\pi)^D}.$$

ここで次元正則法 (dimensional regularization) によって

$$\int \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} = 2^{-D} \pi^{-D/2} m^{D-2} \Gamma(1 - D/2)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 - D} + (\text{regular term}).$$

ゆえに、発散オタマジャクシ型グラフの極部分は

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2-D} \int \left( -R_{iaja} \partial_{\nu} \phi^i \partial_{\nu} \phi^j + \frac{1}{2} (\Delta_g u(\phi) - \Delta_g u(\phi_0)) \right) dx.$$

ここで  $R_{ij} = \sum_a R_{iaja} = R^a_{iaj}$  はリッチテンソルである .

(iii). さらに行列式の部分は次元正則法 によって

$$Z = \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\delta_{ab}\Delta + \frac{1}{2}(e_a^i e_b^j \nabla_i \partial_j u(\phi)|_{\phi_0})\right)\right]$$

$$\begin{split} &\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\delta_{ab}\Delta + \frac{1}{2}(e_a^ie_b^j\nabla_i\partial_ju)|_{\phi_0}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int dx\int\operatorname{Tr}\log\frac{1}{2\pi}(q^2 + \frac{1}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}) \\ &= \frac{1}{2}\int dx\int_0^1dt\operatorname{Tr}\frac{1}{q^2 + \frac{t}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}}\frac{1}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}dq + \operatorname{const.} \\ &= \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2-D}\int\Delta_g u(\phi_0)dx + \operatorname{const.} \end{split}$$

ここで次元正則法が再び

$$\frac{1}{2} \int dx \int_0^1 dt \operatorname{Tr} \frac{1}{q^2 + \frac{t}{2} ee \nabla \partial u|_{\phi_0}} \frac{1}{2} ee \nabla \partial u|_{\phi_0} \frac{d^D q}{(2\pi)^D}$$
$$= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2 - D} \int \Delta_g u(\phi_0) dx + \text{const.}$$

に応用された.

以上から発散項は

$$[\Gamma_b(\phi)]_{div}^{1\,loop} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2-D} \int R_{ij}(\phi) \partial_\nu \phi^i \partial_\nu \phi^j dx + \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2-D} \int \Delta_g u(\phi) dx$$

となる.既に説明したが, $R_{ij} = \sum_a R_{iaja}$  はリッチテンソルである.さてこのモデルでは以下のような特殊な事情がある.

- 1. 無限大を差し引く (繰り込み) のにこの極の部分のみを差引くのを、 minimal subtraction 法といい今はこれに従う (無限大から無限大を引くので多くの任意性があるのにかかわらず.)
- 2. 結合メトリック  $g_0$  とタキオンポテンシャル  $u_0$  はこれらの発散を相殺すべく選ばれる. 次元正則法では, 変数が無次元になるように, 因子  $\mu^{D-2}$ ,  $\mu^D$  をいれる.

繰り込み補正項は ( $u(\phi_0)$  が相殺されるので)

裸の結合定数 =物理的結合定数 - 発散項

の繰りこみの原則から

$$g_0 = \mu^{D-2} \left( g + \frac{\hbar}{2 - D} \delta g_1 + O(\hbar^2) \right)$$
  
$$u_0 = \mu^D \left( u + \frac{\hbar}{2 - D} \delta u_1 + O(\hbar^2) \right)$$

( ħ を復活させた ) ただし

$$\delta g_1 = R_{ij}, \quad \delta u_1 = -\frac{1}{2}\Delta_g u$$

#### 4.4 繰りこみ群方程式

さて以上から $\beta$ ,  $\gamma$  を

$$\beta(g, u) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g \Big|_{\substack{g_0 = \text{const} \\ u_0 = \text{const}}}$$
$$\gamma(g, u) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} u \Big|_{\substack{g_0 = \text{const} \\ u_0 = \text{const}}}$$

で定めると  $(\mu = \Lambda$  と考えてよい)

$$\mu \frac{d}{du} = \frac{d}{d\log \mu}, \quad \mu^{D-2} = e^{(D-2)\log \mu}$$

から

$$\beta_{ij}(g) = (2 - D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2),$$
  
$$\gamma(u) = -Du - \frac{1}{2}\hbar \Delta_g u + O(\hbar^2).$$

が得られる( $(\mu d/d\mu)\mu^{D-2}=(D-2)\mu^{D-2}$  により極 1/(D-2) が消える。) これらから,摂動計算が整合的に振る舞うためには,繰り込まれた結合定数 (running coupling constant) は

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu} g_{ij}(\mu) = \beta_{ij}(g) = (2 - D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2)$$

に従わなければならない.よって若干のスケール変換で

定理 4.4.1  $\sigma$  模型においては摂動計算の最低次数で Ricci flow が成立する:

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = (2 - D)g_{ij} + R_{ij}(t)$$
$$t \equiv \log \mu \quad (\sim \log \Lambda)$$

- 注意 **4.4.1** 1. ただし現実の系では、精度を上げるとさらなる項が入ってくる. たとえば [15] では次の項まで計算されている. しかし SUSY 模型では、高次項は消えるので、その困難さは消える.
- 2. この  $\mu$  は  $\Sigma$  空間のスケール変換の因子  $x \to \mu x$ .  $\mu$  は我々が系を観察する距離のスケールの逆数である.

#### 4.5 ペレルマン理論と統計力学

ここで前に考えた定曲率スピンモデルについて論じよう.一つは古典的ハイゼンベルグモデルであり, M は N-1 次元球面

$$S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1) = \{(x^1, \cdots, x^N); \sum_{i=1}^{N} (x^i)^2 = 1\}$$

もう一つは N-1 次元双曲面  $H^{N-1}$ 

$$H^{N-1} = SO(1, N-1)/SO(N-1)$$

$$= \{(x^1, \dots, x^N); (x^1)^2 - \sum_{i=2}^{N} (x^i)^2 = 1, x^1 > 0\}$$

であった.これらは定曲率面で、Ricci Flow 方程式は簡単になり半径の変化のみで記述される.

 $S^{N-1}$  では  $\mu$  の影響が等方的であることは明らかである .  $g_{ij}$  について  $S^{N-1}$  では , 単位円のメトリック  $(g_0)_{ij}$  の半径倍 , すなわち  $1/\alpha'(\mu)$  倍である:

$$g_{ij} = \frac{1}{\alpha'(\mu)} (g_0)_{ij}$$

さらに  $\Gamma^i_{ik},\,R_{ij}$  は半径によらないので

$$\frac{d}{d(\log \mu)}\frac{1}{\alpha'(\mu)} = (2-D)\frac{1}{\alpha'(\mu)} + (N-2).$$

故にこれから2次元 $\sigma$ モデルでは

$$\frac{1}{\alpha'(\mu)} = (N-2)\log \mu + C \to \infty \quad \text{as } \mu \to \infty$$

 $\mu > 0$  を大きくしていくと

$$g(\mu) = \frac{1}{\alpha'(\mu)} g_0 \sim ((N-2) \log \mu + C) g_0$$

大きい  $\mu$  は短距離で観察することを意味する。このことは高いエネルギーでは球面  $S^{N-1}$  の半径が無限大になり、従って曲率はゼロになってフラットな空間の理論つまり「自由場の理論」(gaussian theory)となる。これは 2 次元のモデルでは相転移がなく、常に質量のある系になるといっており、大方の物理学者の賛同を得ている。また N=2 では統計力学的には Kosterlitz-Thouless 転移が起こるが、Ricci flow では  $\cos(x-y)=1-(x-y)^2/2$  の扱いになっていて、 $\hbar$  の一次では最初から、massless gaussian で新しい知見は出て来ない。

双曲面モデル  $M=SO(1,N-1)/SO(N-1)=H^{N-1}$  では状況は全く逆であって、有限時間で  $g_{ij}\to 0$  (崩落) が起こりこれは相転移が起こっていると理解される。 しかしこれはかなり危険な結論のように思われる。 実際これは 2 次元のアンダーソン局在が壊れることを暗示するが、他方大方の物理学者は、2 次元では常にアンダーソン局在が起こっていると考えているので、高次の摂動がこの Ricci flow を遮蔽していると考えるのが自然である。 (実際これは大変な難問である。)

しかしこれらはすべて証明のない話で、最低次近似の結果なので幾つかの異論もあるが、厳密な(全ての効果を取り入れた)繰りこみ群分析も進行中であることを付け加えたい、次の章をご覧いただきたい。

さて球面や双曲面以外にも色々が曲面が考えうる. たとえば楕円体や円筒, 瓢箪型, さらにはトーラスまで. このような場合これらの曲面はどのように変形していくのであろうか?

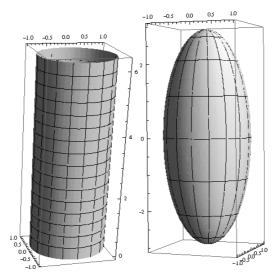


図 4.6 楕円と柱.

ここに掲げたいくつかの図は、ある方向に結合定数の大きい Heisenberg 模型 (非等方 Heisenberg 模型) や、ある方向に一次元的に広がった XY 模型など と同一視できる。また瓢箪は鉄アレイ型のスピンをとる Heisenberg 模型、もしくは Ising 模型に対応する。

これらは統計力学モデルなので既存の知識で、微分方程式を解かずとも解決できるであろう。 さて非等方的 Heisenberg 模型に対応するモデルを考えよう。 これは (Ricci flow になる) 2 次元では長軸の方に自発磁化が出現することが証明できるので(後述の Pirogov-Sinai 定理、または Peiers の contour評価など)これに該当する描像が成立する。円筒スピンモデルでは、円筒方向では、 $R_{ij}=0$  であり、伸縮はない。これはポテンシャルが凸ならば相転移はないという Brascamps-Lieb の定理に該当しよう。しかしトーラス部分では、 $S^1$  なので、Kosterlitz-Thouless 転移が起こるのだが、Ricci flow からは見えない、というよりはいつも起こっている。これは Ricci flow は統計力学的には  $\hbar$  展開の 1 次項なので、さらなる高次の項をあたれというほどのことである。 (Kosterlitz-Thouless 転移の証明はかように大変微妙である [16].)

さて瓢箪型はどうであろうか、2次元での Heisenberg 模型では流れは以下のようになり2次元での Ising 模型では流れは以下のように期待される、Ising 系では 鉄アレイの表面上に スピン が値をとるとしている。若干のスケール変換のあと、この振るまいが期待できるであろう。

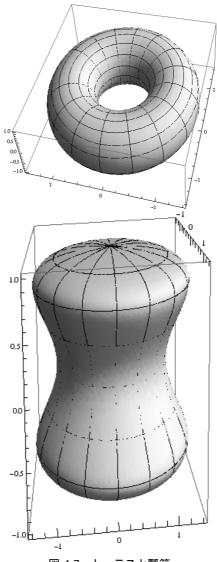


図 4.7 トーラスと瓢箪.

問題  ${f 4.5.1}$  ここで述べた,瓢箪,回転楕円体,トーラス,円柱に対して適当な 座標系をとって  $g_{ij}$ , $R_{ij}$  を求めよ.

問題 4.5.2 これらのモデルに対して, Ricci flow を構成し解を求めよ.

- 注意 **4.5.1** 1. これは compact symmetric space である M でいつも成り 立つ ( 非可換ゲージ理論も満たす性質 .)
- 2. ここでの  $\mu$  と Ricci flow 方程式の t では符号が逆転して、後者では  $dg_{ij}/dt=-2R_{ij}$  なので  $g(t)=(1-2t(N-2))g_0$  で有限時間で  $g_{ij}=0$

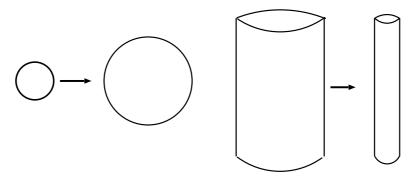


図 4.8 Heisenberg 模型と筒型スピンにおける Ricci flow

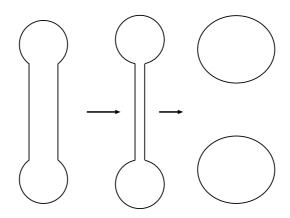


図 4.9 Ising あるいは瓢箪型スピンの Ricci Flow

となり、M が低い次元に潰れることになり「崩壊」と呼ばれている.

- 3. もし  $R_{ij}$  が負であるような理論では上記と逆のことが起こり、すなわち  $\mu \to 0$  で  $lpha'(\mu) \to 0$  が起こる .
- 4. D>2 では flow は 固定点  $(-定の g_{ij})$  に収束する . (相転移がある)

固定点の分析:  $\mu \to \pm \infty$  のとき,  $g_{ij}$  はいかなる metric に収束するかは Friedan によって 20 年前になされている.  $t = \log \mu$  として g の発展方程式

$$\frac{d}{dt}g = \beta(g) - [v(g), g]$$
$$\beta(g) = (2 - D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2)$$

の固定点は  $\hbar \sim 0$  の近傍で求められる.

つまり

$$\beta(g) - [v(g), g] = 0$$

を満たす解  $g_{ij}$  について論じられている。ここで v は任意の M 上のベクトル場ですべての diffeomorphism  $\Psi$  に対し  $v(\Psi_*g)=\Psi_*v(g)$  を満たすもの。 (  $t=\log\Lambda$  または  $t=\log\mu$  ととるのが物理的習慣だが,一部の物理の論文や数学 (Perelman) では逆に  $t=\log\Lambda^{-1}$  で注意されたい。)

86 第4章 ペレルマンの理論と統計力学

これは $\hbar$ が小さい極限で調べられ、あるベクトル $v_0$ に対し

$$R_{ij} - \left\langle \frac{1}{n}R \right\rangle g_{ij} - [v_0, g]_{ij} = 0$$

を満たせばいいことが分かっている.ここで  $R=R_{kk}$  はスカラー曲率,< f>は M 上の関数 f の M にわたる平均である (<1>=1).これからスカラー 曲率の M 上の平均 < R> の 正,零,負 によって  $g_{ij}$  のタイプが決定される.結論からいうと

 $< R > \ge 0$ : asymptotic free at short distances < R > < 0: asymptotic free at long distances

さらに  $g_{ij}$  の大きさを適当にスケールして、

$$R_{ij} - ag_{ij} = \nabla_i v_i + \nabla_j v_i, \quad a = \pm 1, \text{ or } 0$$

となり、以下の典型的なタイプに分類される:

1. (-) 型 Einstein metric:  $R_{ij} + g_{ij} = 0$ 

2. (0) 型 Einstein (Ricci-flat) metric:  $R_{ij} = 0$ 

3. (+) 型 Einstein metric:  $R_{ij} - g_{ij} = 0$ 

4. quasi-Einstein metric:  $R_{ij} - g_{ij} = v_i v_j + v_j v_i \neq 0$ 

前節の議論が以来あまり進まなかったのは、やはり flow を追うのが難しいのと、数理物理的視点から厳密証明に用いるにはかなり難しいため、これ以上の分析は意味がないと思われたからであろう.ただし宇宙論ではその発展方程式(flow)が遭遇する特異点は、Perelman の手術(surgery)で処理できるとして、研究が進んでいるようである.ここでは純粋に統計力学で考えてみよう.

 $\sigma$ 模型 + one-loop 近似 = Ricci Flow

 $\sim$  gradient flow of Effective action

Ricci flow は  $\sigma$  モデルと総称される統計力学的系を one-loop 近似で考えた り、以下論ずる重力理論の Lagrangian からの導出などで生ずる .  $\sigma$  モデルの one-loop 近似の精度は高いとは言い難く、近似計算の評価も難しいのでこれに よって厳密に何かが証明できたという例は聞かない . しかし、概観を描像する には大変有益である .

Perelman の本来のアイデアは Hamilton のアイデアを完成させることにあった.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}(t) = -2R_{ij}$$

我々のパラメータ  $t = \log \mu$  では

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}(t) = (2 - D)g_{ij} + R_{ij}$$

である. (符号を Ricci flow に合わせるには,  $t=-\log\Lambda$ .) D=2 または D<2 では  $S^{N-1}$  スピンモデルでは  $R_{ij}>0$  なので、 $g_{ij}$  の流れは一様に  $g_{ij}$  が大きくなる方向に進み,この近似内では asymptotic free at short distances を満たすと考えられる.このことは,一般に等方的なコンパクトな対称空間で成り立つ.

D>2 では  $S^{N-1}$  モデルは相転移を起こすモデルで

$$g_{ij} = r(N-2)R_{ij}$$

なので、半径は

$$\frac{d}{dt}r = -(D-2)r + (N-2),$$

つまり

$$g_{ij}(t) = (g_0)_{ij}r(t), \quad r(t) = Ce^{-t(D-2)} + \frac{N-2}{D-2}$$

で与えられる。

- (i) 2 次元 Heisenberg モデルは短距離で漸近的に自由であることを示している. これは連続極限で理論が存在することを示す.
- (ii) 2 次元 Ising 模型では、両極の球の部分が相対的にふくらみアレイは二つに分かれる .

Spin の分布が歪なモデルでは、繰り込み変換をおこなうと、色々なレベルで Hamilton の遭遇した現象にであうと期待されるが,最後はのっぺりした球面上のスピン分布になりそうである.以下の図で左は対称空間,右はじゃがいも型に分布するスピンモデルというわけである.

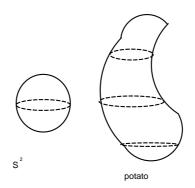


図 4.10 Pirogov-Sinai 定理と Ricci Flow

多様体の形状によって色々なタイプの相転移が出現することを示唆される. 統

計力学ではエネルギー的に得で、かつエントロピーの大きいところが部分が強 調されていくので、Ricci flow の流れもその方向に順ずると考えられる.明ら かに凹部は面積が狭い部分に密集し滞在確率が高く(相転移),凹部が崩壊する ことが多いと考えられる. これは Pirogov-Sinai の定理に近い内容である. 詳 しい定理の内容は [53] でも見ていただくとして雑にいえば,パラメータ空間で のミニマムを具現化する状態を ( $\beta$  を大きくとることによって) 作れるという 内容である.

定理 4.5.1 Pirogov-Sinai の定理:  $\beta > 0$  が十分大きいとき,  $V(\{\sigma\})$  の極小 値の いくらでも近い近傍に Gibbs 測度  $e^{-\beta V}$  の真空がある.

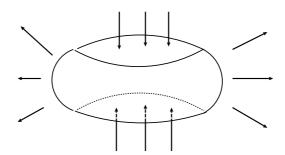


図 4.11 Ricci Flow は凹部を消し去り凸部を拡大する

さて逆に Ricci Flow を Lagrange 方程式のように考え, Ricci flow を導く, 力学系とその作用 (action) を考えることができる.この場合、ストリング理論 でいう、Dilaton 場  $\Phi$  が必要になるが、Perelman 理論では、この Dilaton 場 は本質的役割を果たす . (Perelman's Dilaton という場合がある . ) この場合  $\sigma$ 模型の Ricci flow (パラメータを変えて) は, Dilaton 場 Φ 付きになり

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{ij} = -2R_{ij} - 4\nabla_{\mu}\partial_{\nu}\Phi$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi = -\frac{D}{3\alpha'} + \nabla^2 \Phi - 2(\partial_i \Phi)^2$$

が Langrane 方程式として得られる.

またこれを導く作用 (Lanrangian) であるが、Perelman のそれ ( $e^{-f}$  付 Einstein-Hilbert action) と同じである.

$$S[g_{ij}, \Phi] = -\frac{1}{2\kappa^2} \int_M \sqrt{g} e^{-2\Phi} \left( R + 4(\partial_i \Phi)^2 - \frac{2D}{3\alpha'} \right) d\text{vol} + \cdots$$

ここでは  $\sigma$  が消え R と  $\Phi$  のみの汎関数. この Perelman's Dilaton の物理的 説明は小林氏の解説[47] を見よ.

# 第5章

# 漸近的自由の起源: $\sigma$ モデル

前に述べたように、場の理論では漸近的な自由ということがキーワードであって、これを満さないものは存在しえないというのが、現代数理物理の conventional wisdom (便宜的な知恵)である.

では何が理由かとなって、最初は「やってみたらそうだった」というのが、当初ヤン・ミルズ 理論でそうであることを発見したときの状況だったように思われる.4 次元ではヤン・ミルズ理論、2 次元では  $\sigma$  模型というわけで、「一体何者がその性質を保証しているか」ということが問題になる.

この問題をここで論じ、これを用いて 2 次元の  $\sigma$  模型の自発的質量生成の証明への、さらにはクォーク粒子幽閉の証明の第一歩にしたい (次章でクォーク幽閉に触れる。)

#### **5.1** 2次元 σ 模型

さて前の章では、Ricci flow の形で、 $\sigma$  模型を論じたがまず 2 次元格子空間 の上での  $\sigma$  模型を考えて、通常のブロックスピン変換を考えてみよう.前章で 述べたように

$$\langle \phi_0 \phi_\zeta \rangle = \frac{1}{Z} \int \phi_0 \phi_\zeta \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{|x-y|=1} (\phi_x - \phi_y)^2 \right] \prod d\phi_x$$

 $(\phi \in S^{N-1})$  の振る舞いを問題とする.イジング模型では $\langle s_0 s_\zeta \rangle$  は  $|\zeta|$  が大きくなると  $\beta$  が小さいときは境界条件によらず指数的に減少し, $\beta$  がある値以上では,値は境界条件によって決まる定数に収束する. $S^1$  (XY 模型) では,常に  $|\zeta|$  が大きくなると 0 に収束するものの,ある  $\beta$  以上では  $|\zeta|^{-1/\beta}$  位でしか減少しない (Kosterlitz-Thouless 転移)  $N \geq 3$  以上では,系は常に指数関数的に減少すると信じられており,これは次の章で議論するクォーク粒子の幽閉問題と密接に関連すると信じられている.

このことを繰りこみの立場からみると算術平均で定義されたブロックスピンを

$$\phi_1(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{\zeta \in \Box_x} \phi(\zeta)$$

( $\Box_x$  は Lx を中心とする、一辺の長さ L の正方形)とすれば、 $\{\phi_1(x); x \in Z^2\}$  は L が大きいとき、指数的に減少する相関を持つスピン系に見えることになる. すなわち  $\phi_x$  達のサイズは最終的には指数的に縮んでいくことになる.

2 次元の spin 系 で素朴にプロックスピン変換をしてみると、一辺の長さが L の正方形内部で算術平均

$$(C\phi)(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{\zeta \in \Box} \phi(\zeta)$$

を  $\phi_1$  に固定し、残りの自由度で積分する操作を □ に限定して考えると、

$$\exp[-v_1(\phi)] = \int \exp\left[-\frac{1}{2} < \phi, (-\Delta)_{\square}\phi > \right] \prod_{\zeta} \exp[-v_0(\phi(\zeta))]$$
$$\times \delta\left(\phi_1 - (C\phi)\right) \prod_{\zeta} d\phi(\zeta)$$

が得られる.ただし  $\phi \in \mathbb{R}^N$  で,  $v_0$  は O(N) 対称性をもっていて,

$$g_0(\varphi^2) = \exp[-v_0(\phi)], \quad \varphi^2 = \phi^2$$

の形を想定しておく. 言うまでも無く

$$g_1(\varphi^2) = \exp[-v_1(\phi)]$$

なども、今の近似内では回転対称性をもっている.

さて直感的には

$$g_1(\varphi^2) = \exp[-v_1(\varphi^2)] \sim P(\varphi^2) \exp[-E(\varphi^2)]$$
 (5.1.1)

ここで, $P(\varphi^2)$  は  $L^2$  この球面上に値をとるスピンの算術平均が  $\phi$  になる確率密度で, $E(\phi)$  はそのような配位のエネルギーである.

$$S^{N-1} = \{s = (s_1, \dots, s_N), ||s|| = 1\},\$$

 $s(\zeta) \in S^{N-1}$  ,  $\kappa$  を逆温度 ( $\beta$ ) として

$$\begin{split} P(\varphi^2) &= \text{const.} \int \delta(L^2 \phi - \sqrt{\kappa} \sum_x s_x) \prod ds_x, \\ &= \text{const.} \int_0^\infty \zeta^{N-1} d\zeta E_0(\exp[iL^2 \zeta \varphi_1]) E_0^{L^2}(\exp[-i\sqrt{\kappa}\zeta s_1]) \end{split}$$

が得られる.ここで  $E_0$  は  $s \in S^{N-1}$  に関する期待値で、

$$E_0(\exp[ixs_1]) = J_{-1+N/2}(x)x^{-1+N/2}.$$

有名な中心極限定理を反映して、小さい  $\varphi$   $(|\varphi| < L^{-\varepsilon})$  に対しては

$$P(\varphi) \sim \exp[-\text{const.} NL^2 \varphi^2/\kappa].$$

他方エネルギーは大雑把に

$$E(\varphi) = \sum_{|x-y|=1} (2\kappa - 2\varphi_x \varphi_y) \sim 2L^2 \kappa - 2L^2 \varphi^2$$

なので,  $N/\kappa$  が小さい場合には, すなわち  $\beta \equiv \kappa$  が大きい場合には,  $\exp[-E(\varphi)]$  は大きい  $\varphi$  を好む傾向を示し,  $P(\varphi)$  内の  $-\varphi^2$  に打ち勝ってしまい, これは余り助けにならない .

ここは幾分説明が必要である.すなわちこのスピン系は、フェロマグネチック(強磁性的、ferromagnetic)なので、スピン達は互いに同じ方向を向いたほうが、エネルギー的に得であり、同じ方向に揃おうとする傾向がある.すなわち自発磁化を示す傾向があって、 $\phi_0$  は同じ方向に向く可能性が大変高い.よって算術平均である  $\phi$  は幾分小さくなることはあっても、極端に小さくなることは期待しがたい(磁化の発現).これが自発磁化である.これは離散的な対称性をもつイジング模型で現れる.また O(2) 対称性をもつ、XY 模型では,自発磁化はないものの,相関は距離の逆羃でしか減少せず,非指数関数的である.これが前に述べた Kosterlitz-Thouless 転移(Kosterlitz-Thouless transition)の特徴である.

我々の要求は 2 次元でかつ非可換対称性があれば、たとえ温度が小さくても ( $\beta$  が大きくても)、スピン達はフラフラと、方向を違え、マクロには系は自発 磁化も長距離相関も示さないというシナリオである .

いまの大まかな評価を精細にしたものが、繰りこみ群的分析に他ならない.これが繰りこみ的思考の必要な所以でもあるが、 $\varphi$  が比較的大きいときは、中心極限定理よりは、大偏差理論になることに注意したい. すなわち大きな  $\varphi$  に関しては

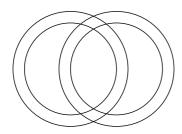
$$P(\varphi) \sim \exp\left[\text{const.}(N-1)L^2\log\left(1-\frac{\varphi^2}{\kappa}\right)\right]$$

が成り立ち , これによって エネルギー部分  $\exp[-E(\varphi^2)] \sim e^{\varphi^2}$  に打ち勝つことになる .

問題 5.1.1  $P(\phi^2)$  について  $\phi^2$  が大きいときと、小さいときに分けて評価せよ.

残念ながら,このことをあらわに漸化式に持ち込むのは簡単には行かないので(これは格子ゲージ理論でも然りである)次の節で詳述するとして,ここでは例によって,Dyson 近似で傾向をみておこう.前のように, $L^2=2$  として最も単純化された Dyson 近似では  $g_0(x)$  は  $[0,\kappa]$  以外では 0 になるとして,以下のような漸化式を考えることになる.

$$g_n(\varphi^2) \exp[-\varphi^2/2] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int f_{n-1}((\phi+z)^2) f_{n-1}((\phi-z)^2) dz, (5.1.2a)$$
$$f_n(\varphi^2) = g_n(\varphi^2) \exp[-\varphi^2/4]. \tag{5.1.2b}$$



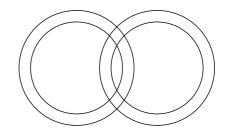


図 5.1 2 つの球殻の重なり、左では互いの中心を含み、右では離れて含まない、球対称の内部密度の分布に関わらず、中心から離れると重なり積分は単調減少、

積分(5.1.2a)は、次のステップの量を 2 つの、中心距離が  $2|\phi|$  の球殻の重なり積分として表している。ゆえに球対称の内部密度  $f_{n-1}((\phi\pm z)^2)$  に関わらず、中心間距離が大きくなると(互いの中心を含まなくなると) 重なり積分は単調減少する。図 (5.1) をみれば、表記の幾何学的意味が直感的に判るであろう  $*^{11}$  このことからこの漸化式は、あるア・プリオリな評価を満たすことがわかる.

定理  ${\bf 5.1.1}$   $f_{n-1}\geq 0$  ,  ${\rm supp}\,f_{n-1}\subset [0,\kappa]$  である任意の  $f_{n-1}$  に対して ,もし  $N\geq 3$  ならば  $g(x)e^{-x/2}$  は  $x\geq \kappa/4$  で単調減少であり ,もし  $N\geq 4$  ならば

$$-[\log g(x)e^{-x/2}]' \ge \frac{1}{2x} + \frac{k}{\kappa - x}$$
 (5.1.3)

が  $x \ge \kappa/4$  でなりたつ . ここに k = (N-3)/2 .

証明 回転対称性から  $\phi=(\varphi,0)$  ,  $z=(s,u)\in R\times R^{N-1}$  とおけば右辺は

const. 
$$\int f_{n-1}((\varphi+s)^2+u^2)f_{n-1}((\varphi-s)^2+u^2)u^{N-2}duds$$
.

そこで

$$1 = \int_0^{\kappa} \int_0^{\kappa} dp dq \delta(p - (\varphi + s)^2 - u^2) \delta(q - (\varphi - s)^2 - u^2)$$

を代入して積分して

<sup>\*1)</sup> このような直感的,ア・プリオリな評価が格子ゲージ理論にあると思われるが,今のところ考えられていない.

$$g_n(x) \exp[-x/2]$$

$$= \frac{1}{N\sqrt{x}} \int \int dp dq \theta(\mu(p, q; x)) \mu(p, q; x)^k f_{n-1}(p) f_{n-1}(q), (5.1.4)$$

$$\mu(p, q; x) = \frac{p+q}{2} - x - \frac{(p-q)^2}{16x}.$$
(5.1.5)

すなわち二つの球面の重なりとして  $\phi$  を表している .  $\mu(p,q;x)$  は  $x\geq |p-q|/4$  で単調減少なので , 主張の前半は明らかである . 後半を示すには微分して

$$-[\log g(x)e^{-x/2}]' = \frac{1}{2x} + k\frac{B}{A}$$
 (5.1.6)

が得られる.ここで

$$A = \int \int_{D} \mu(p, q; x)^{k} f_{n-1}(p) f_{n-1}(q) dp dq,$$

$$B = \int \int_{D} \mu(p, q; x)^{k-1} \left[ 1 - \frac{(p-q)^{2}}{16x^{2}} \right] f_{n-1}(p) f_{n-1}(q) dp dq,$$

$$D = \{ (p, q) \in [0, \kappa]^{2}; \mu(p, q; x) \ge 0 \}$$

である.

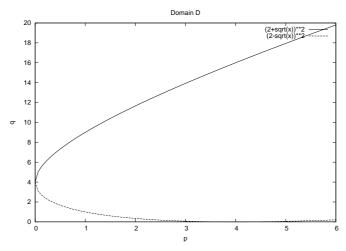


図 5.2 放物線の内部領域が D, x=2 で書かれている.

もし  $x>\kappa/4$  , つまり  $|\phi|=\sqrt{x}>\sqrt{\kappa}/2$  で  $|\phi|$  が球の半径の半分より大きければ ,  $1-(p-q)^2/(16x^2)>0$  なので不等式

$$\frac{B}{A} \ge \inf \frac{1}{\mu(p,q;x)} \left( 1 - \frac{1 - (p-q)^2}{16x^2} \right) \ge \frac{1}{\kappa - x}$$

が成り立つ ( $p = q = \kappa$ ).

この定理は常に成立し,実効的ポテンシャルの微分係数(傾き)に対するア・ プリオリな下限を与えている.漸化式を続けていくためには,これを精密化す る必要があるが,

$$D_1 = \{(p,q); (p,q) \in D, x \le q \le p \le \kappa\},\$$

$$D_2 = \{(p,q); (p,q) \in D, (2\sqrt{x} - \sqrt{p})^2 \le q \le x\}$$

として  $D=D_1\cup D_2$  , そして  $A_i$   $(B_i)$  を上の A (B) の定義式で積分領域を  $D_i$  に制限したものとすれば ,

$$\frac{B}{A} = \frac{B_1 + B_2}{A_1 + A_2} \le \min\left\{\frac{B_i}{A_i}; i = 1, 2\right\}$$

が成立することに注意する.この各々の  $B_i/A_i$  の評価は  $g_n=\exp[-v_n(x)]$  の振る舞いに依存するが, $x>\kappa_n$  で  $v_n'(x)>\tau_0$ , $\tau_0$  が十分大きければ

$$k\frac{B_2}{A_2} > \frac{2k}{k+1}v'_n(x), \quad k\frac{B_2}{A_2} > 2v'_n(x)$$

を示すことはそれほど難しくない.すなわち外部では分布密度は  $2^{-n}$  的に減少していく.ゆえにたまねぎの皮をむくようにこの球殻の半径は  $\kappa_n \to \kappa_{n+1} = \kappa_n - (N-3)/2$  というふうに漸次減少して行く.

積分表示 (5.1.4) は  $\phi_1=(\phi+z)/2$ ,  $\phi_2=(\phi-z)/2$  の二つの球面上のベクトルの合成が, 球体の内部のベクトル  $\phi$  になる確率の小ささがエネルギー的にベクトルがそろおうとする力を凌駕することを表している。したがって, 二つのベクトルが球面の場合には, 同じ方向を向くのは N が大きいほど難しいので, ここから N=2 (Kosterlitz-Thouless 転移) と  $N\geq 3$  の差異が出てくると期待される。実際これから以下を証明するのは比較的簡単である。

定理 5.1.2  $D=2, N\geq 3$  ならば Dyson 近似された階層 O(N) スピンモデルはこの漸化式で、任意の  $\kappa$   $(=\beta)$  に対して高温領域に収束する.

問題  ${\bf 5.1.2}$  上の定理を証明し,2 点関数  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  が質量のある階層ガウス系と同じに減少することを示せ.

このようにスピン系が高度の対称性をもっていれば,このような傾向が高まると期待される. N=2 のときこの O(2) Dyson-Wilson 系が Kosterlitz-Thouless 転移を示すか否かは未だ確かめていない $^{*2}$ .

### **5.2** 2次元実 σ 模型の分析

では実際にどのように,前の節で議論された論理を現実の系に応用していくのであろうか? これは ハミルトニアンが局所的に分解できない現実の系では極めて難しい問題である.

<sup>\*2)</sup> 本来の系では、Fröhlich と Spencer の有名な論文 [16] があるので、必要がないと言えばないのだが.

少し前, O(N) スピン模型をランダムウオーク (乱歩) で表し, 得に自分と交差しない乱歩 (self-avoiding walk) で記述出来ることを証明していくつかの結果を得, さらに 1 段のみの繰りこみ群変換で (と言えるだろう)  $^{[39]}$ , O(N) シグマモデルの臨界温度  $\beta_c$  に対して

$$\frac{\beta_c}{N} \ge \operatorname{const} \log N \tag{5.2.1}$$

の評価を得たが,これはかなりの計算を要したにも関わらず期待はずれの結果になってしまった[39]-[41]. 我々の期待するものは,

期待される定理. N>2 が十分大きければ、全ての  $\beta\geq 0$  に対して 2 次元 O(N) スピンモデルは , いかなる相転移も示さない .

さてこの結論を、前述のアイデアを元に考えていきたいのだが,これが至難の業である.読者とともに少し状況をみてみよう.当面前と同様,N が大変大きいと仮定しなければならない. $\beta$  を N だけスケールして  $N\beta$  とし,モデルの Gibbs 測度を

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{Z_{\Lambda}(\beta)} \int f(\phi) \exp[-H_{\Lambda}(\phi)] \prod_{i} \delta(\phi_{i}^{2} - N\beta) d\phi_{i}$$
 (5.2.2)

とする. ただし

$$\Lambda = [-(L/2)^M, (L/2)^M)^{\nu} \subset \mathbf{Z}^{\nu}$$

は理論を考える正方形領域である.さらに  $\phi(x)=(\phi(x)^{(1)},\cdots,\phi(x)^{(N)})$  は  $S^{N-1}$  に値をとるスピンで, $Z_{\Lambda}$  は分配関数で  $\langle 1 \rangle=1$  ととられる.さらに  $H_{\Lambda}$  は Hamiltonian で

$$H_{\Lambda} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{|x-y|_1=1} \phi(x)\phi(y),$$
 (5.2.3)

 $|x|_1 = \sum_{i=1}^{\nu} |x_i|.$ 

まず恒等式  $\delta(\phi^2-N\beta)=\int \exp[-ia(\phi^2-N\beta)]da/2\pi$  を式 (5.2.2) に代入し ,  ${\rm Im}\,a_i<-\nu$  としておく .

Im 
$$a_i = -(\nu + m^2/2)$$
, Re  $a_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\psi_i$  (5.2.4)

ここで  $m^2 > 0$  は後で定義しよう. かくして

$$Z_{\Lambda} = c^{|\Lambda|} \int \cdots \int \exp[-W_0(\phi, \psi)] \prod \frac{d\phi_j d\psi_j}{2\pi}$$
$$= c^{|\Lambda|} \det(m^2 - \Delta)^{-N/2} \int \cdots \int F(\psi) \prod \frac{d\psi_j}{2\pi}$$
(5.2.5)

が得られる. ただしここで

$$W_0(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \left\langle \phi, \left( m^2 - \Delta + \frac{2i}{\sqrt{N}} \psi \right) \phi \right\rangle - \sum_j i \sqrt{N} \beta \psi_j, \quad (5.2.6a)$$

$$F(\psi) = \det^{-N/2} \left( 1 + \frac{2iG}{\sqrt{N}} \psi \right) \exp[i\sqrt{N}\beta \sum_{j} \psi_{j}]$$
 (5.2.6b)

であり,c は行毎に異なる定数で  $\Delta_{ij}=-2\nu\delta_{ij}+\delta_{|i-j|,1}$  は格子上の Laplacian,また  $G=(m^2-\Delta)^{-1}$  は分散行列である.2 点の相関関数はこの書き換えによって

$$\langle \phi_0 \phi_x \rangle = \frac{1}{\tilde{Z}} \int \cdots \int \left( m^2 - \Delta + \frac{2i}{\sqrt{N}} \psi \right)_{0x}^{-1} F(\psi) \prod \frac{d\psi_j}{2\pi}.$$
 (5.2.7)

で与えられることが分かる.ここで  $\tilde{Z}$  は規格化定数.質量  $m \geq 0$  を  $G(0) = \beta$  であるように選ぶ,ただし

$$G(x) = \int \frac{e^{ipx}}{m^2 + 2\sum(1 - \cos p_i)} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{dp_i}{2\pi}.$$
 (5.2.8)

である.これは  $\nu \leq 2$  でのみ可能であり, $\beta \to \infty$  のとき  $m^2 \sim 32e^{-4\pi\beta}$   $(\nu=2)$  であって,これは通常の繰りこみ群計算の結果と整合している  $^{[9]}$ :

$$m^2 \sim 32 \left(\frac{e^{1-\pi/2}}{8}\right)^{\frac{-2}{N-2}} \Gamma\left(1+\frac{1}{N-2}\right) \left[\frac{2\pi\beta}{1-\frac{2}{N}}\right]^{\frac{2}{N-2}} \exp\left[-\frac{4\pi\beta}{1-\frac{2}{N}}\right]$$

そこで

$$F(\psi) = \det_{3}^{-N/2} \left( 1 + \frac{2iG}{\sqrt{N}} \psi \right) \exp\left[ -\langle \psi, G^{\circ 2} \psi \rangle \right]$$
 (5.2.9)

と  $\nu \leq 2$  で書き換えておこう.ここで  $\det_3(1+A) = \det[(1+A)e^{-A+A^2/2}]$  で  $G^{\circ 2}(x,y) = G(x,y)^2$ ,故に  $\mathrm{Tr}\,(G\psi)^2 = <\psi, G^{\circ 2}\psi>$ .さらに  $F(\psi)$  は N>2 のときのみ積分可能であることに注意しよう.つまり  $\nu \leq 2$  と N>2 が要求される.

もし m がそう選ばれれば,行列式  $\det_3\left(1+2iG\psi/\sqrt{N}\right)^{-N/2}$  はガウス積分  $\sim \exp[-<\psi,G^{\circ 2}\psi>]\prod d\psi$  への小さい摂動と見なしうるであろうか? すなわち  $\det_2(1+2iG\psi/\sqrt{N})^{-N/2}$  は殆どの  $\psi$  に対して正と期待できれば,式(5.2.7)から

$$\langle \phi_{0}\phi_{x}\rangle \sim \frac{N}{\tilde{Z}} \int \cdots \int \left(m^{2} - \Delta + \frac{2i}{\sqrt{N}}\psi\right)_{0x}^{-1} \times \det(1 + 4G^{1/2}\psi G\psi G^{1/2}/N)^{-N/4} \prod \frac{d\psi_{j}}{2\pi}$$

$$\leq |\sup_{\psi} (m^{2} - \Delta + \frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)_{0x}^{-1}|$$

$$\leq (m^{2} - \Delta)_{0x}^{-1} \leq c \exp(-m|x|)$$
(5.2.11)

( c>0 は正定数 ) となってめでたしめでたしである. しかしながら大きい  $\beta$  では,G は長距離に相関がおよび,ノルムが大きくなって展開が正当化できない.この方法では境界壁の問題(すなわちスピンの方向が食い違ってエネルギーが高くなる場所の処理の問題)が起きず,長所であるのだが.

そこで u 次元ボソンモデルで  $\phi^2\psi$  型相互作用を持つ  $W_0(\phi,\psi)$  に対して繰

り込み変換を応用していく.ひとつは N 成分ボソン  $\phi$  に対して,もうひとつは疑似場  $\psi$  に対してである. $\psi$  の役割は  $\phi_0=\phi$  を半径  $(N\beta)^{1/2}$  の球殻の上に保つことで,一回の変換で半径が  $(N\beta_1)^{1/2}$ , $(\beta_1=\beta-O(1))$  になることが分かるだろう.

未完成な仕事で、読者を生煮えの議論で迷路に誘うのはかなり気が引けるが、少し前この問題で長らく苦闘された碩学の方が「(もしも解けたら)死ぬ前にどうやって解けたかは知りたい」と仰られ、その方の考えと方向が一致したので、これを機会にこの問題を俎上にあげておくのも何がしかの意味があるだろう、我々の戦略は以下のようである。

1.  $\phi_0=A_1\phi_1+Q\xi_0$  とおく.ここで  $\xi_x$  は搖動場で x は  $\Lambda'=\Lambda\backslash LZ^2$  に取られ, $Q:R^{\Lambda'}\to R^\Lambda$  は,前述の零平均行列で  $Q\xi$  のブロックエリアの平均が零になるように取られ, $\phi_1$  はブロックスピンで,添字は  $\Lambda_1=\Lambda\cap L^{-1}\Lambda$ ,すなわち  $\Lambda$  からスケーリングで縮小された新しい単位格子に生きている.行列  $A_1$  は

$$\langle \phi_0, G_0^{-1} \phi_0 \rangle = \langle \phi_1, G_1^{-1} \phi_1 \rangle + \langle \xi_0, \Gamma_0^{-1} \xi_0 \rangle$$

で定められ, $G_1^{-1}=A_1^+G_0^{-1}A_1$  かつ  $Q^+G_0^{-1}Q=\Gamma_0^{-1}$  である.直感的には  $\phi_1$  は  $|p|< L^{-1}$  の運動量をにない, $\xi_0$  は  $L^{-1}<|p|<1$  の運動量をになう( $A^+$  は A の実内積〈,〉に関する A の共役である.)

- 2.  $\xi_0$  で積分しこれを繰り返す.すなわち  $\varphi_n$  は  $\phi$  の運動量 p が  $|p| < L^{-n}$  に制限されており  $\det z_n$  は  $\phi$  の運動量が  $L^{-n+1} \leq |p| < L^{-n}$  に制限されたスライスであり  $\varphi_n = \varphi_{n+1} + z_n$ .ここで  $\mathcal{G}_n$  及び  $\mathcal{T}_n$  を  $\varphi_n$  と  $z_n$  の共変行列とし、 $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n+1} + \mathcal{T}_n$  とする.同じく  $\Psi$  と  $\tilde{\Psi}_n$  を  $\Psi_n = \Psi_{n+1} + \tilde{\Psi}_n$  となるよう分解しておく. $\{\varphi_n, \Psi_n\}$  はブロックスピンで  $\{z_n, \tilde{\Psi}_n\}$  は揺動場である.
- $3. \,\, z_n \,\,$ の積分は $\det_3^{-N/2}(1+K(\psi_n))$  と  $\exp[-H(\psi_n)]$  を生じる,ただし

$$H(\psi_n) = \langle \Psi_n, (\mathcal{T}_n^{\circ 2} + (2/N)\mathcal{T}_n \circ (\varphi_{n+1}\varphi_{n+1}))\Psi_n \rangle$$

である.見慣れない記号。 は  $(A\circ B)(x,y)=A(x,y)B(x,y)$  として使われ,特に  $A^{\circ 2}(x,y)=A(x,y)^2$  である(これはアダマール積と呼ばれる.) 内積  $\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y)$  を 2 点相関関数  $N\mathcal{G}_{n+1}(x,y)$  で置き換える.この置き換えが正当化できない  $\varphi_{n+1}$  の分布する場所は境界壁(domain wall)と言われ,これはエネルギーが高いので起きる確率は小さいと期待される.

- 4. 以上から  $H(\psi_n) = \langle \Psi_n(\mathcal{T}_n^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_n \circ \mathcal{G}_{n+1})\Psi_n \rangle$  . H は  $\Psi_n$  の新しい ア h ミルトニアン と考えられる .  $\mathcal{T}_n^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_n \circ \mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n^{\circ 2} \mathcal{G}_{n+1}^{\circ 2}$  であり  $G^{\circ 2} = \sum (\mathcal{G}_n^{\circ 2} \mathcal{G}_{n+1}^{\circ 2})$  なので自然な分解である .
- $5.~(\mathcal{G}_n^{\circ 2}-\mathcal{G}_{n+1}^{\circ 2})=\mathcal{T}_n^{\circ 2}+2\mathcal{T}_n\circ\mathcal{G}_{n+1}\geq 0$  はそのスペクトルについて O(1) の部分と  $O(eta_n)$  の大きな部分からなる. $O(eta_n)$  の固有値には, $\Psi_n$  の 零

平均搖動場  $\tilde{\Psi}_n$  に対応し、O(1) の固有値はブロックスピン場  $\Psi_{n+1}$  に対応する.これは  $\tilde{\Psi}_n$  上の積分が殆んど影響を持たないことを言っている.

6. かくして我々の繰り返しは 大きい場の場所と,境界壁のある部分を除いて成立し,そこでは高温領域 に到達することになる.

### 5.3 W1 の導出の準備

#### 5.3.1 $\phi$ と $\psi$ のブロックスピン

領域  $\Lambda=[-(L/2)^M,(L/2)^M)^2\subset Z^2$  をサイズが  $L\times L$  のブロック  $\Delta_i$  に分けて以下のプロセスを繰り返す:

- (1)  $\phi$ ,  $\psi$  が大きいところを抜き出して分離する,
- (2) 小さい場のところで、fluctuation fields z(x) で積分,
- (3) 小さい場のところで  $\psi(x)$  の fluctuation fields で積分,
- (4) 結果を集めて,積分結果を係数に押し込めて次の積分に移る.

揺動場(fluctuation fields)は全空間に広がっているので、 $\Delta$  の集りからなる正方形区画(paved sets といわれる)に分解して局所的な積分にし,まとめ直して次のステップに移らなければならない.このプロセスが一番大変であり,この技巧を,クラスター展開(cluster expansion),あるいはポリマー展開(polymer expansion)と呼ぶ. 例えば文献 [7],[63] および先達の論文 [25] を見よ.またその具体的使用例としては [23] などを見よ.

計算を始めるにあたって

$$W_0(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \langle \phi, G_0^{-1} \phi \rangle - i \sum_x J_0(x) \psi(x),$$
 (5.3.1a)

$$J_0 = \sqrt{N}\beta - \frac{1}{\sqrt{N}}\phi^2(x) = -\frac{1}{\sqrt{N}}: \phi^2(x):_{G_0}, \tag{5.3.1b}$$

$$G_0^{-1} = -\Delta + m^2 (5.3.1c)$$

とおく.ここで: $A:_{G_0}$  は A のガウス測度  $d\mu_0(\phi_0)$  (平均が零,分散が  $G_0$  )に関する  $\mathrm{Wick}$  積とする.

すでに説明したように,元のスピン  $\phi(x)\equiv\phi_0(x)$  と  $\psi(x)\equiv\psi_0(x)$  をブロックスピン変数  $\phi_1(x)=(C\phi)(x)$  と  $\psi_1(x)=(C'\psi)(x)$ ,及び搖動場  $z(\zeta)$  と  $\tilde{\psi}(\zeta)$  で表しておくと便利である.ここで  $\zeta\in\Lambda'\equiv\Lambda-L\Lambda_1$  であり

$$(C\phi)(x) \equiv L^{-2} \sum_{\zeta \in \Delta} \phi(Lx + \zeta), \tag{5.3.2}$$

$$(C'\psi)(x) \equiv L^2(C\psi)(x) = \sum_{\zeta \in \Delta} \psi(Lx + \zeta), \tag{5.3.3}$$

$$\Lambda_1 = Z^2 \cap L^{-1}\Lambda. \tag{5.3.4}$$

従前通り,C は  $\phi$  の算術平均をとり,C' は単に  $\psi$  の和をとるだけである.この違いは,C については  $\phi$  の相関が対数的であること,C' については  $\psi$  が和が零で,微分作用素のように振る舞うことに起因している.

搖動場  $z_0(\zeta)$  と  $\tilde{\psi}(\zeta)$  は  $\Lambda' = \Lambda \setminus L\Lambda_1$  の上に生きていて,  $\phi_1(x)$  は分散

$$G_1(x,y) = CGC^+(x,y) = L^{-4} \sum_{\zeta_1,\zeta_2 \in \Delta} G_0(Lx + \zeta_1, Ly + \zeta_2)$$
 (5.3.5)

を持っている.同様にして

$$G_n(x,y) = CG_{n-1}C^+(x,y) = L^{-4} \sum_{\zeta_1,\zeta_2 \in \Delta} G_{n-1}(Lx + \zeta_1, Ly + \zeta_2),$$
(5.3.6a)

$$A_n(x,y) = G_n C^+ G_{n+1}^{-1}(x,y) = \sum_{\zeta} G_n(x,\zeta) C^+ G_{n+1}^{-1}(\zeta,y)$$
 (5.3.6b)

が定義される.さらに零平均作用素  $Q:R^{\Lambda\setminus L\Lambda_1}\to R^\Lambda$  とその共役  $Q^+:R^\Lambda\to R^{\Lambda\setminus L\Lambda_1}$  を定める:

$$(Qz)(x) = \begin{cases} z(x) & \text{if } x \notin LZ^2 \\ -\sum_{y \in \Delta(x)} z(y) & \text{if } x \in LZ^2 \end{cases}$$
 (5.3.7)

$$(Q^+f)(x) = f(x) - f(x_0), x \in \Lambda \backslash L\Lambda_1$$
(5.3.8)

ここで  $x_0\in L\Lambda_1$  は x にもっとも近い点で、混乱がないときは  $L[x/L]\in L\Lambda_1$  と書く、上から判るように ,  $Q^+$  は微分として働く、

#### 5.3.2 $z_0$ による積分

$$\varphi_0(x) = \phi_0(x) = (A_1\phi_1)(x) + (Q\xi_0)(x), \tag{5.3.9a}$$

$$\psi(x) = (\tilde{A}_1 \psi_1)(x) + Q\tilde{\psi}_0(x) \tag{5.3.9b}$$

を  $W_0(\phi,\psi)$  に代入し  $\{\xi_0(x),\tilde{\psi}_0(x);x\in\Lambda\backslash L\Lambda_1\}$  で積分する.結果は $F_1(\phi_1,\psi_1)=\exp[-W_1(\phi_1,\psi_1)]$  でこれを繰り返す:

$$F_{0}(\phi, \psi) = \exp[-W_{0}(\phi, \psi)],$$

$$F_{1}(\phi_{1}, \psi_{1}) = \int F_{0}(A_{1}\phi_{1} + Q\xi_{0}, \tilde{A}_{1}\psi_{1} + Q\tilde{\psi}) \prod d\xi_{0}(x) \prod d\tilde{\psi}(x).$$

$$(5.3.11)$$

ここで  $\{\tilde{\psi}_x;x\in\Lambda\backslash L\Lambda_1\}$  は  $\psi_x$  の搖動場で行列  $\tilde{A}_1$  は後で考えよう . (5.3.11) の  $z_0$  による積分は簡単になされ,係数を除いて

$$\int \exp\left[-\frac{1}{2}\{\langle\phi_{1},G_{1}^{-1}\phi_{1}\rangle + \langle\xi_{0},Q^{+}G_{0}^{-1}Q\xi_{0}\rangle\} + i\sqrt{N}\beta\sum_{x}\psi_{x}\right]$$

$$-\frac{i}{\sqrt{N}}\sum_{x}[(A_{1}\phi_{1})_{x}^{2} + 2(A_{1}\phi_{1})_{x}(Q\xi_{0})_{x} + (Q\xi_{0})_{x}^{2}]\psi_{x}\right]\prod d\xi_{0,x}$$

$$= \det_{3}^{-N/2}(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\Gamma_{0}Q^{+}\psi Q)$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi_{1},G_{1}^{-1}\phi_{1}\rangle + i\sqrt{N}\sum_{x}(\beta - Q\Gamma_{0}Q^{+} - \frac{1}{N}(\varphi_{1})_{x}^{2})\psi_{x}\right]$$

$$-\langle\psi,(Q\Gamma_{0}Q^{+})^{\circ 2}\psi\rangle - \frac{2}{N}\langle Q^{+}(\varphi_{1}\cdot\psi),\frac{1}{P}Q^{+}(\varphi_{1}\cdot\psi)\rangle\right]$$

$$\equiv \exp[-\tilde{W}_{1}(\phi_{1},\psi)] \qquad (5.3.12)$$

が得られる.ここで

$$\varphi_1(x) = (A_1 \phi_1)(x), x \in \Lambda, \tag{5.3.13a}$$

$$\Gamma_0 \equiv [Q^+(-\Delta + m^2)Q]^{-1},$$
(5.3.13b)

$$P \equiv Q^{+}(-\Delta + m^{2} + \frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)Q = \Gamma_{0}^{-1} + \frac{2i}{\sqrt{N}}Q^{+}\psi Q \quad (5.3.13c)$$

であり、 $\Gamma_0$  と  $P^{-1}$  は共に  $R^{\Lambda \setminus L\Lambda_1}$  から自分自身への写像であり、 $P^{-1}$  は $m_0^2$  の大きさに関係なく一様に指数的に減少する  $(P^{-1} \sim \Gamma_0)$  . さらに  $\Gamma_1$  は  $(m^2 + L^{-2})^{1/2}$  のオーダーの質量をもち行列式は一様な局所性をもつ .

さて次に  $\psi$  での積分を遂行する  $\cdot \psi$  が小さければ  $\det_3^{-N/2}(\cdots)$  を無視して

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi_1, G_1^{-1}\phi_1\rangle - \langle\psi, \hat{H}_0^{-1}\psi\rangle + i\sum J_1(x)\psi(x)\right]$$
 (5.3.14)

を考えればよい.ここで

$$\hat{H}_{0}^{-1} = (Q\Gamma_{0}Q^{+})^{\circ 2} + \frac{2}{N}[(Q\frac{1}{K}Q^{+})\circ(\varphi_{1}\cdot\varphi_{1})], \qquad (5.3.15)$$

$$J_{1}(x) = \sqrt{N}\beta - \sqrt{N}(Q\Gamma_{0}Q^{+})(x,x) - \frac{1}{\sqrt{N}}(\varphi_{1})_{x}^{2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{N}}:\varphi_{1}^{2}(x):G_{1} \qquad (5.3.16)$$

であり:  $:_{G_1}$  はガウス測度  $d\mu_{G_1}$  に関する  $\mathrm{Wick}$  積 ( ガウス測度での期待値をあらかじめ引いておくこと ) で

$$: \varphi_i(x)\varphi_j(y) :_{G_1} \equiv \varphi_i(x)\varphi_j(y) - \delta_{ij}\mathcal{G}_1(x,y),$$
  
$$: \varphi_1 \cdot \varphi_1 :_{G_1} (x,y) \equiv \sum_i : \varphi_{1,i}(x)\varphi_{1,i}(y) :_{G_1}$$

である.ここで既出であるが

$$\mathcal{G}_1 = A_1 G_1 A_1^+, \tag{5.3.17a}$$

$$A_1 = G_0 C^+ G_1^{-1}, (5.3.17b)$$

$$\mathcal{T}_0 = Q\Gamma_0 Q^+$$
 (5.3.17c)  
=  $G_0 - G_0 C^+ G_1^{-1} C G_0 = G_0 - \mathcal{G}_1$ 

であり、 $\mathcal{T}_0 = Q\Gamma_0Q^+$ が

$$\mathcal{T}_0 = Q(Q^+(-\Delta + m_0^2)Q)^{-1}Q^+ = E^{\perp}(-\Delta + m_0^2)^{-1}E^{\perp}$$
 (5.3.18)

を満たすことに注意する. というのは  $Q=V|Q|,\ |Q|=(Q^*Q)^{1/2},\$ かつ  $VV^*=E^\perp$  なので  $(E^\perp$  はブロック毎に平均が零になる空間への射影).

そこで  $\varphi_1(x)\varphi_1(y)$  を期待値  $N\mathcal{G}_1(x,y)$  で置き換えて,  $\hat{H}_0^{-1}$  から主要項  $M_0$ を抜き出せば

$$\hat{H}_{0}^{-1} \equiv M_{0} + R_{0},$$

$$M_{0} = \mathcal{T}_{0}^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_{0} \circ \mathcal{G}_{1} = \mathcal{G}_{0}^{\circ 2} - \mathcal{G}_{1}^{\circ 2},$$

$$R_{0} = 2[Q(\frac{1}{P} - \Gamma_{0})Q^{+}] \circ \mathcal{G}_{1} + \frac{2}{N}(Q\frac{1}{P}Q^{+}) \circ (:\varphi_{1} \cdot \varphi_{1} :_{G_{1}})$$

ゆえに

$$\tilde{A}_1 = M_0^{-1}(C')^+ H_1^{-1}, \ H_1 = C' M_0^{-1}(C')^+.$$
 (5.3.19)

と  $\psi$  の変換行列を選ぶことになる.

# 5.3.3 $\hat{H}_0^{-1}$ の構造と積分可能性

$$\mathcal{H} = R^{|\Delta|} = \bigoplus_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x, \quad \mathcal{H}_x = R^{|\Delta|_x} \sim R^{L^2}$$
 (5.3.20)

とおく . ここで  $x\in\Lambda_1$  であり  $\Delta_x$  は中心 Lx のサイズ  $L\times L$  の正方形であり ,  $E_0$  をこの上でのブロック毎に定数である関数への射影とすれば

$$\mathcal{H}_L = \bigoplus_{x \in \Lambda_1} \mathcal{H}_x^0, \quad \mathcal{H}_x^0 = \{ce_x; c \in R\}, \tag{5.3.21a}$$

$$e_x = (1, \dots, 1)/L \in R^{L^2},$$
 (5.3.21b)

すなわち

$$E_0 \lceil_{H_x} \equiv E_{0,x} = \frac{1}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |e_x\rangle\langle e_x|$$
 (5.3.22)

である.そこで

$$E_1 = E^{\perp} = 1 - E_0 = \bigoplus_{x \in \Lambda_1} E_{1,x}, \quad E_{1,x} \equiv E_1 \lceil \mathcal{H}_x = 1_x - E_{0,x}$$
 (5.3.23)

とおけば、零平均関数の集合  $\mathcal{H}_L^\perp=\{Qz\}$  への射影で、(5.3.18) によって

$$E_0 \mathcal{T}_0 E_0 = 0, \quad \mathcal{T}_0 \lceil_{\mathcal{H}_L^{\perp}} > O(L^{-2}).$$
 (5.3.24)

さらに  $\mathcal{G}_1(x,y)\sim \beta$  は  $G_0(x,y)$  同様  $|x-y|< m^{-1}$  ではゆっくり変動するので, $\mathcal{T}_0\circ\mathcal{G}_1\sim \beta\mathcal{T}_0$  が成り立つ.故に前の分析から

$$E_0 M_0 E_0 \sim E_0 \mathcal{T}_0^{\circ 2} E_0, \quad E_1 M_0 E_1 \sim 2\beta \mathcal{T}_0$$
 (5.3.25)

が成り立つが,これらは指数的に減少する正の演算子である.さらに

$$\sum_{x \in \Lambda} (E_0 M_0 E_1)(x, y) = \sum_{y \in \Lambda} (E_0 M_0 E_1)(x, y) = 0$$
 (5.3.26)

なので,これらから

$$\begin{split} \frac{1}{M_0} &\equiv \frac{1}{\mathcal{T}_0^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{G}_1} \\ &\sim \frac{1}{\mathcal{T}_0^{\circ 2}} \oplus \frac{1}{2\beta} \mathcal{T}_0^{-1} \\ &= \frac{1}{\mathcal{T}_0^{\circ 2}} \oplus \frac{1}{2\beta} E^{\perp} (-\Delta + m_0^2) E^{\perp} \quad \text{(} H_L \oplus H_L^{\perp} \text{ DLT)} \end{split}$$

が得られる.

補題  ${\bf 5.3.1}$  大きな  $eta > L^2$  に対しては  $ilde{H}_1$  と  $ilde{A}_1$  が厳密にもとまる . すなわち

$$\begin{split} \tilde{A}_{1}(x,y) &= \frac{1}{L^{2}} \delta_{\left[\frac{x}{L}\right],y} + \frac{1}{\beta} \delta \tilde{A}_{1}(x,y), \quad x \in \Lambda_{1}, y \in \Lambda, \\ |\delta \tilde{A}_{1}(x,y)| &\leq O(1) \exp[-c|x/L - y|], \\ H_{1}^{-1}(x,y) &= \frac{1}{L^{4}} \sum_{\zeta,z \in \Delta} M_{0}^{-1}(Lx + \zeta, Ly + z) \\ &\sim \frac{1}{L^{4}} \sum_{\zeta,z \in \Delta} [\mathcal{T}_{0}^{\circ 2}]^{-1}(Lx + \zeta, Ly + z) \sim \delta_{xy}, \quad x, y \in \Lambda_{1} \end{split}$$

ここで c=O(1)>0 は  $\beta$  と L に独立な数で、 $H_1(x,y)$  は x-y のみに依存し

$$(C'\delta\tilde{A}_1)(x,y) = 0, \quad \sum_{y} \delta\tilde{A}_1(x,y) = 0.$$
 (5.3.27)

証明  $M=M_0,\, ilde{H}=M^{-1}$  と置きさらに, $M_{ij}\equiv E_iME_j$  と置けば

$$M \equiv \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} \equiv M^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{H}_{00} & \tilde{H}_{01} \\ \tilde{H}_{10} & \tilde{H}_{11} \end{pmatrix}$$
 (5.3.28)

ここで

$$\tilde{H}_{00} = (M_{00} - M_{01}M_{11}^{-1}M_{10})^{-1}, \quad \tilde{H}_{10} = -M_{11}^{-1}M_{10}\tilde{H}_{00}$$

$$\tilde{H}_{11} = (M_{11} - M_{10}M_{00}^{-1}M_{01})^{-1}, \quad \tilde{H}_{01} = -M_{00}^{-1}M_{01}\tilde{H}_{11}.$$

104 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

さらに  $e_x=(1,\cdots,1)/\sqrt{L^2}\in\mathcal{H}_x$  および

$$m_{00}(x_1, y_1) = \frac{1}{L^4} \sum_{\zeta, z} M(Lx_1 + \zeta, Ly_1 + z)$$

として

$$M_{00}(x,y) = L^2 m_{00}([x/L], [y/L]) \circ (|e_x\rangle\langle e_y|),$$
  
$$M_{00}^{-1}(x,y) = L^{-2} m_{00}^{-1}([x/L], [y/L]) \circ (|e_x\rangle\langle e_y|).$$

 $ilde{H}_{00}$  に対しても同様で

$$M_{00}^{-1}(C')^{+}(C'M_{00}^{-1}C'^{+})^{-1} = \tilde{H}_{00}(C')^{+}(C'\tilde{H}_{00}C'^{+})^{-1} = \frac{1}{L^{2}}\delta_{[x/L],y}.$$

ここで

$$H = C'\tilde{H}(C')^{+} = \begin{pmatrix} C'\tilde{H}_{00}C'^{+} & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3.29}$$

なので  $(\tilde{A}_1)(x,y) = [\tilde{H}_0(C')^+ H_1^{-1}](x,y) \; (x \in \Lambda, \, y \in \Lambda_1)$  は

$$(\tilde{A}_1)(x,y) = \frac{1}{L^2} \delta_{[x/L],y} - (M_{11}^{-1} M_{10} C^+)(x,y)$$
 (5.3.30a)

$$= (1 - M_{11}^{-1} M_{10}) C^{+}$$
 (5.3.30b)

$$\equiv \frac{1}{L^2} \left( \delta_{\Delta} + \frac{1}{\beta_1} \delta \tilde{\mathcal{A}}_1 \right) \tag{5.3.30c}$$

ここで  $y \in \Delta = \Delta_x$  ならば  $\delta_{\Delta}(y) = 1$  であり, さもなければ  $\delta_{\Delta} = 0$  . よって

$$H_1^{-1} = \tilde{A}_1^+ M_0 \tilde{A}_1 = C[M_{00} - M_{01} M_{11}^{-1} M_{10}] C^+$$
 (5.3.31a)

$$Q^+ M_0 Q = Q^+ M_{11} Q (5.3.31b)$$

が得られる.

つぎに行列式が  $N \geq 3$  ならば積分可能であることを示さなけらばならないここに  $N \geq 3$  と N < 3 を峻別する事実がある.さて

$$(Q^{+}\psi Q)_{ij} = \psi_{i}\delta_{ij} + \psi_{x}\delta_{[i/L],[j/L]}$$
(5.3.32a)

$$= \operatorname{diag}(\psi) + \psi_x P_0. \tag{5.3.32b}$$

ただし  $i,j\in\Lambda\backslash L\Lambda_1,$  で [i/L] は  $Z^2$  の点で  $(i_1/L,i_2/L)$  に最近接のもの, x は  $L\Lambda_1$  の点で  $i=(i_1,i_2)$  に最近接のものとする.また  $P_0$  はブロック毎に定数である行列で具体的には

$$(P_0)_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \Delta_x, j \in \Delta_x \text{ のとき} \\ 0 & それ以外のとき \end{cases}$$
 (5.3.33)

で与えられる.ここで  $\Delta_x$  は中心  $x\in L\Lambda_1$  , サイズ L imes L の正方系内部の点である.

以下の議論および定理では  $\Gamma_0>O(1)>0$  なので簡単のため  $\Gamma_0=1$  と一般性を失わずに置いている.単純のため原点を含むサイズ  $L\times L$  の正方形  $\Delta_0$  に話を制限すれば

$$\frac{1}{1+i\lambda Q^+\psi Q} = (1+i\lambda \operatorname{diag}(\psi)+i\lambda\psi_0 |e_0\rangle\langle e_0|)^{-1}$$
$$= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+i\lambda\psi}\right)\left(1-\frac{1}{1+\langle e_0,e_1\rangle}|e_0\rangle\langle e_1|\right)$$

である.ここで

$$|e_0\rangle = (1, \dots, 1),$$

$$|e_1\rangle = \left(\frac{i\lambda\psi_0}{1 + i\lambda\psi_1}, \dots, \frac{i\lambda\psi_0}{1 + i\lambda\psi_{L^2 - 1}}\right).$$

それゆえ

$$\det (1 + i\lambda Q^+ \psi Q) = \prod_{x \in L\Lambda_1} \prod_{j \in \Delta_x, j \neq x} (1 + i\lambda \psi_j)$$

$$\times \left( 1 + i\lambda \psi_x \sum_{j \in \Delta_x} \frac{1 - i\lambda \psi_j}{1 + \lambda^2 \psi_j^2} \right)$$

が成り立つ.

定理 5.3.2  $d\psi=\prod_{i\in\Lambda}d\psi_i$  および  $d\tilde{\psi}=\prod_{i\in\Lambda\setminus L\Lambda_1}d\psi_i$  とせよ. もし N>2 ならば

$$\det^{-N/2} \left( 1 + i\lambda Q^+ \psi Q \right) \in L^1(d\tilde{\psi}) \tag{5.3.34}$$

である. さらに N>2 かつ  $L^2$  が十分大きければ (N によって),

$$\det^{-N/2} (1 + i\lambda Q^+ \psi Q) \in L^1(d\psi)$$
 (5.3.35)

が成り立つ.

もっと精細なバウンドも可能であって,

$$\det^{-N/2}(1+\lambda Q^+\psi Q)\in L^1(d\psi)$$

である必要十分条件は

$$(L^2 - 1)(N/2 - 1) > 1 (5.3.36)$$

である.

問題 5.3.1 この行列式の積分可能性に関する定理を証明せよ.

# 5.4 大場領域と大変動領域の処理

ブロックスピン変換は性質のいいところはガウス積分で、性質の悪いところ はエネルギーが高かったり、配位は起こりにくかったりで、ア・プリオリ的な 上限評価で抑えていく.この積分し難いところは場 $(\phi_n \mathrel{\; arphi}_n)$ が大きかった リ,揺動場 ( $\xi_n$ と $\tilde{\psi}_n$ ) が大きかったりするので,前もってこのような領域を抜 き出しておく必要がある、このような場の演算子を英語で large field 、その存 在領域を large field region , その配位の全体を large field configuration とい うので,ここでは直訳してそれぞれ大場,大場領域及び大場配位と言うことに する.

またガウス積分でよく近似できるような場は  $\psi_1$  や  $\tilde{\psi}$  が小さいところ , つま り small field なのでこれを直訳して小場,その存在領域を小場領域,そして その配位の集合をを小場配位と言うことにする.

ブロックスピンを定義するために導入された  $L \times L$  のサイズの正方形  $\{\Delta_x\}$ の他に, $k^2$  個のこれらからなる正方形領域  $\{\Box\}$  の集合を考えよう.これらは 敷石集合 (paved set) と呼ばれる,幾分大きめの正方形領域である. 各  $\square_x$  は

$$\Box_x = \bigcup_{\ell} \Delta_{L(x+(\ell_1,\ell_2))}, \quad |\ell_i| \le k/2$$
 (5.4.1)

と表される. ここで k > 2 は後ほど決定される整数でクラスター展開が収束す るように決められる. 与えられた  $\varphi_1$  に対して大きい場の領域  $D=D(\varphi_1)$  を 最小の敷石集合 (paved set) で以下の条件を満たすものとしておく:

$$|\varphi_1^2(x) - N\beta_1| < N^{1/2+\varepsilon} \exp\left[\frac{c}{10}\operatorname{dist}(x, D^c)\right], x \in D$$
 (5.4.2)

すなわち  $|\varphi_1(x)|$  は  $D(\varphi_1)$  の内部で大きくなるが, 境界  $\partial D$  からの距離につ いて高々指数的にしか大きくならないように、大場領域を十分な小場領域を近 傍にまとわせ、さらにその周りを一個分の厚さの小場領域からなる敷石集合で 囲んで定義しておく、この厚さが敷石一個分 の小場領域を,ここでは襟領域 (collar region) ということにする $^{*3}$ ). その意味は図 5.3 から直ぐわかる.

 $x_0 \in D$  を  $\max |\varphi_1^2(x) - N\beta_1| = |\varphi_1^2(x_0) - N\beta_1|$  であるような点とし、  $\ell = \operatorname{dist}(x_0, D^c)$  とすれば, D は半径  $\ell$ , 中心  $x_0$  の円  $D_0$  を含む  $\varphi_1^2(x)$  は  $\partial D$  での値  $N\beta$  から中心  $x_0 \in D$  での値  $N\beta + N^{1/2+\varepsilon}e^{c\ell/10}$  まで変化する.

さらに境界壁領域  $D_w$  を定義する. これは小さい結合定数の  $\phi^4$  模型や階層 近似模型では、今のモデルでは、一番重要な因子である。 $D_w$  は以下の条件を満 たす最小の敷石集合 (paved set) である:

$$|\varphi(x)\varphi(y) - N\mathcal{G}_1(x,y)| \le N^{1/2} (N\beta_1)^{\varepsilon} \exp\left[\frac{c}{10}|x-y|\right]$$
$$\forall x \in D_w, \, \forall y \in D_w^c$$

<sup>\*3)</sup> フランス派は回廊領域 (corridor region) と呼んでいる.

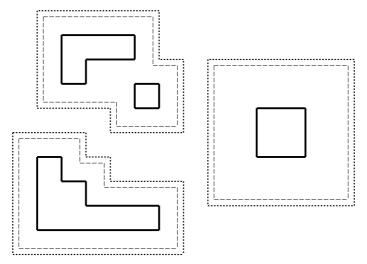


図 5.3 太線内が真の大場領域. 周りの点線領域が場の強さの対数に比例する厚さの 領域と襟領域. 大場はこれらで繋がれる場合もある.

すなわち, 2 点の期待値からのずれが大きいところを囲むように定義してある. さらに  $X\subset \Lambda$  の上の小場配位  $\mathcal{K}(\varphi_1,X)$  を

$$\mathcal{K}_1(\varphi_1, X) = \left\{ \left\{ \varphi_1(x); x \in X \right\}; |\varphi_1^2(x) - N\beta_1| < N^{1/2 + \varepsilon}, \quad \forall x \in X \right\}$$

$$(5.4.3)$$

で定義しよう.大場領域の定義から,  $x\in \Delta$  が小場領域に属するには  $|arphi_1^2(x)-Neta_1|< N^{1/2+arepsilon}$  が成立するのみならず,大場領域が近傍に無いことが必要である.

かくして我々は大場配位  $\mathcal{D}(D,X)$  を

$$\mathcal{D}(D,X) = \bigcup_{\substack{\varphi_1 = A_1 \phi_1 \\ D(\varphi_1) \subset D}} (\varphi_1 + \mathcal{K}_1(X))$$
 (5.4.4)

で定めよう. ここで  $\phi_1$  の上の和は  $D(\varphi_1)\subset D$  であるように取る. 同様に

$$\mathcal{K}_2(\varphi_1, X) = \{ \{ \varphi_1(x); x \in X \}; |\varphi_1(x)\varphi_1(y) - N\mathcal{G}_1(x, y)| \le N^{1/2} (N\beta_1)^{\varepsilon}$$

$$\forall y \in \Lambda, |x - y| < L^d \}$$

$$(5.4.5)$$

を定義し、境界壁領域  $\mathcal{D}_w(D,X)$  を

$$\mathcal{D}_{w}(D_{w}, X) = \bigcup_{\substack{\varphi_{1} = A_{1}\phi_{1} \\ D_{w}(\varphi_{1}) \subset D_{w}}} (\varphi_{1} + \mathcal{K}_{2}(X))$$
 (5.4.6)

で定める.ここで前と同じく  $\phi_1$  上の和は  $D_w(\varphi_1)\subset D_w$  であるようにとる. そこで我々は

$$\mathcal{K}_{\varphi_1} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2, \quad \mathcal{D}_{\varphi_1} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_w$$
 (5.4.7)

と定義する.近似的に

$$D \subset D_w \tag{5.4.8}$$

108 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

$$\mathcal{D}(D,X) \subset \mathcal{D}_w(D_w,X) \tag{5.4.9}$$

である.

さて  $D_{\varphi}=D\cup D_w=\cup_i D_{\varphi,i}$  を連結成分への分解とし、その一つ  $D_{\varphi,i}$  をとり、その存在確率は小さいことを示したい.さて大場配位からの寄与を考えたい. $D_{\varphi,i}$  を簡単のため  $D_0$  と書いて

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi_{1},\chi_{D_{0}}G_{1}^{-1}\chi_{D_{0}}\phi_{1}\rangle - \frac{i}{\sqrt{N}}\sum_{x\in D_{0}}\left(\varphi_{1}^{2}(x) - N\beta_{0}\right)\psi(x)\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi,(N\mathcal{G}_{1} + :\varphi\varphi:)\circ\left(Q\frac{1}{P(\psi)}Q^{+}\right)\psi\rangle\right]$$

$$\times \det^{-N/2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\Gamma_{0}Q^{+}\psi Q\right)\prod_{x\in D_{0}}d\phi_{1}(x)d\psi(x)$$

である.ここで分解  $\psi=\tilde{A}_1\psi_1+Q\tilde{\psi}_0$  を用いた.我々は  $\tilde{A}_1\psi_1$  が近似的にプロック毎に定数関数であることを示したので,零平均揺動場  $Q\tilde{\psi}_0$  が大きな係数  $\beta_1$  を持つことになる.そこで  $|\tilde{\psi}_0|<\beta^{-1/2}$  とすれば

$$\exp\left[-\sum_{x} \frac{i}{\sqrt{N}} \left(\varphi_{1}^{2}(x) - NG_{0}(x, x)\right) \left(\tilde{A}_{1}\psi_{1} + Q\tilde{\psi}_{0}\right)(x)\right] \\ -\langle \psi, \mathcal{G}_{1} \circ \mathcal{T}_{0}\psi \rangle\right] \times \det^{-N/2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}} \mathcal{T}_{0}\psi\right) \\ \sim \exp\left[-\frac{i}{\sqrt{N}} \left(\langle \varphi_{1}^{2} - N\beta_{0}, \tilde{A}_{1}\psi_{1} \rangle + \langle Q^{+}\varphi_{1}^{2}, \tilde{\psi}_{0} \rangle\right) \\ -\beta \langle \tilde{\psi}_{0}, (Q^{+}\mathcal{T}_{0}Q)\tilde{\psi}_{0} \rangle\right] \times \det^{-N/2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}} \mathcal{T}_{0}(\tilde{A}_{1}\psi_{1})\right).$$

ここで  $ilde{\psi}_0=M_0^{-1/2}z_0$  を代入すれば ,  $M_0\sim 2\beta Q^+T_0Q$  は測度が  $z_0$  に関して対角化される .

前節で議論したが, $(\tilde{A}_1\psi_1)(x)$  に関する積分は直接に O(N) スピンのブロックスピンの確率的意味につながる. $^{[38]}$ . $\tilde{\psi}_0$  は小さく,かつ  $\tilde{A}_1(x,y)\sim L^{-2}\delta_{[x/L],y}$ なので, $\psi=\psi_1$  からの寄与は近似的に

$$\int \exp\left[-\frac{i}{\sqrt{N}}(\varphi_1^2 - N\beta)\psi\right] \times \left(1 + \frac{2i\psi}{\sqrt{N}L^2}\right)^{-L^2N/2} d\psi$$

であるが , この積分は  $arphi_1^2-Neta>0$  で 0 ,  $arphi_1^2-Neta<0$  では

l.h.s. = 
$$C_1 \exp \left[ \frac{L^2}{2} (\varphi_1^2 - N\beta) + (\frac{L^2 N}{2} - 1) \log(N\beta - \varphi^2) \right] (5.4.10a)$$
  
  $\sim C_2 \exp \left[ -\frac{L^2}{4N} \left( \varphi_1^2 - N(\beta - 1) - \frac{1}{L^2} \right)^2 \right]$  (5.4.10b)

である( $C_i$  は定数). これは前に議論した  $L^2$  個の半径  $\sqrt{N\beta}$  のボール上に値

をとるベクトルの算術平均が  $\varphi_1$  になる確率密度に他ならない.これは前節で研究した階層モデルと同じ構造を持っていることを暗示する  $^{\tiny{[39]}}$ .すなわちこのことは  $\varphi_1^2$  の  $N\beta_1=N(\beta-\kappa_1)$  からのずれは小さく  $O(N^{1/2+arepsilon})$  で抑えられることを意味し, $(Q^+\varphi_1^2)(x)$  が小さくなって  $z_0$  に関するガウス積分が遂行できることを示す.

定理 5.4.1

$$\kappa_1 = \frac{1}{L^2} \operatorname{Tr} \mathcal{T}_0, \quad \kappa_2 = \frac{2}{L^4} \operatorname{Tr} \mathcal{T}_0^2$$

および

$$X = N\beta - \varphi_1^2$$
,  $X_1 = N\beta_1 - \varphi_1^2$ 

とする.ここで

$$\beta_1 = \beta - \kappa_1.$$

このとき  $\psi(x) = \psi/L^2$  ,  $\forall x \in \Delta$  とおけば

$$\int \exp\left[\frac{i}{\sqrt{N}}X\psi\right] \det^{-N/2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}L^2}\mathcal{T}_0\psi\right) d\psi$$
$$= \exp\left[-\frac{3}{2\kappa_2 N}X_1^2 + O\left(\frac{X_1^3}{N^2}\right)\right] \times O(1).$$

証明 .  $\{\alpha_1^{-1},\alpha_2^{-1},\cdots,\alpha_{L^2}^{-1}\}$   $(\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots)$  を  $\mathcal{T}_0/L^2$  の固有値とし, $\psi=\psi_r+i\gamma$ , $0<\gamma<\alpha_1$  とおく.このとき積分は

$$\exp[-X\gamma/\sqrt{N}] \prod_{i} \left(1 - \frac{2\gamma}{\sqrt{N}\alpha_{i}}\right)^{-N/2}$$

$$\times \int \frac{\exp[iX\psi_{r}/\sqrt{N}]}{\prod_{i} \left(1 + 2i(\sqrt{N}\alpha_{i} - 2\gamma)^{-1}\psi_{r}\right)^{N/2}} \frac{d\psi_{r}}{2\pi}.$$

となるが , ここで  $\gamma$  を

$$-\frac{X}{\sqrt{N}} + \sum \frac{N}{\sqrt{N}\alpha_i - 2\gamma} = 0$$

または

$$-\frac{1}{\sqrt{N}}X_1 + \kappa_2 \gamma = 0$$

と選ぶ.ここで  $0<\gamma\ll\sqrt{N}\alpha_1\sim\sqrt{N}\pi^2$  を仮定する. $|X_1|\leq N^{1/2+\varepsilon}$  である  $\varphi_1^2$  に対しては非積分関数を展開できて

$$\exp\left[-\frac{XX_1}{N\kappa_2} + \sqrt{N}\kappa_1\gamma - \sum \alpha_i^{-2}\gamma^2\right]$$

$$\times \int \exp\left[-\sum_i \frac{N}{(\sqrt{N}\alpha_i - \gamma)^2}\psi^2\right] d\psi$$

$$= \exp\left[-\frac{3}{2N\kappa_2}X_1^2\right] \int \exp\left[-\sum_i \frac{N}{(\sqrt{N}\alpha_i - \gamma)^2}\psi^2\right] d\psi$$

この定理は元の  $\beta$  が 1 回のブロックスピン変換で  $\kappa_1$  だけ減少し ,  $X_1$  の分散は N であることを示す . 具体的には

$$\kappa_1 = \sum \alpha_i^{-1} = \sum \frac{1}{L^2 m_0^2 + 4L^2 \sum \sin^2(n\pi/L)}$$

$$= O(\log L) \qquad (5.4.11)$$

$$\kappa_2 = 2 \sum \alpha_i^{-2} = \sum \frac{2}{(L^2 m_0^2 + 4L^2 \sum \sin^2(n\pi/L))^2}$$

$$= O(1) \qquad (5.4.12)$$

である、ここで幾つかの状況に遭遇する、すなわち:

【ケース 1】  $D_w=\emptyset$  かつ  $|\varphi_1^2(x)-N\beta_1|>N^{1/2+\varepsilon}, x\in D$ 

この場合  $\exp[-2\beta\langle Q^+\psi,\Gamma_0Q^+\psi\rangle]$  が主要項である .  $\psi=\tilde{A}_1\psi_1+Q\tilde{\psi}_0$  とおけば  $Q^+\tilde{A}_1=O(\beta^{-1})$  である .  $\beta^{1/2}\tilde{\psi}_0$  を  $\tilde{\psi}_0$  で置き換え  $d\psi$  の積分で

$$\beta^{-|D|/2} \exp\left[-\frac{1}{N}\sum_{x}(\varphi_1^2(x)-N\beta_1)^2\right] \sim \beta^{-|D|/2} \exp\left[-|D|N^{2\varepsilon}\right]$$

ただし  $\beta_1 = \beta_0 - O(1)$  である.

【ケース 2】 $|\varphi_1(x)\varphi_(y)-N\mathcal{G}(x,y)|$   $< N^{1/2}(N\beta)^{\varepsilon}\exp[(c/10)|x-y|]$  が  $\forall x\in D_w$  と  $\forall y\in D_w^c$  で成立

ここで  $\cup D_w^i \subset D_w$  と仮定する.ただし  $D_w^i$  は中心  $r_i \in D_w^i$  半径  $d_i$  のディスクで  $D_w^i \cap D_w^j = \emptyset, \ (i \neq j)$  であるものとする.領域境界壁が  $r_i$  にあるとすれば

$$\varphi_1(y) = ((N\beta_1)^{1/2}, 0) \in \mathbb{R}^N, y \in (D_w^i)^c$$

ととる.よって  $r_i \in D_w^i$  に対して

$$\varphi_1(r_i) = ((N\beta_1)^{1/2} \pm \frac{(N\beta)^{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} e^{cd_i/10}, \varphi_1^{\perp}(r_i)) \in \mathbb{R}^N$$

۲

$$\varphi_1(r_i)^2 - N\beta_1 = \pm 2N^{1/2}(N\beta)^{\varepsilon} e^{cd_i/10} + \varphi_1^{\perp}(x)^2$$

なので、この配位は小さい確率でおこる:

$$g(D_w) = \exp[-(N\beta)^{\varepsilon}|D_w|].$$

注意 **5.4.1** Brydges 氏のグループ  $^{[8]}$  は、 $|\phi(x)^2-NG(x)|\sim \sqrt{N}\beta$  と想像しているが、これは  $\exp[-iN^{-1/2}\langle:\phi_2^2:_{G_1},\psi\rangle]$ 、 $(:\phi_2^2(x):_{G_1}=\phi_2^2(x)-NG_1)$  があるときには変更がいると考えられる. $\varphi\varphi=O(N\beta)$  とすれば

$$|\varphi^2(x) - N\beta| > \beta^{1/2 + \varepsilon}$$

である配位は強く忌避される.これは  $\psi \to \psi/\sqrt{\beta}$  のようなスケーリングで理解される.

$$|\varphi^2(x) - N\beta| < \beta^{1/2 + \varepsilon}$$

であるような配位は摂動で処理できる.

そこで摂動的計算が遂行できる領域を定義しておこう. これ以外の場所では 摂動的計算(ガウス積分に帰着)は難しく,適当な上限計算で成されなければ ならない.

定義 1 連続小場領域  $\mathcal{K}_1(X)$  は  $\{\phi_1(x),\psi_1(x)\}$  の部分集合で,  $X=\mathcal{K}_{\varphi}\cap\mathcal{K}_{\psi_1}$ , としたときに、全ての  $x\in X\subset\Lambda_1$  に対して、次式が成り立つ:

$$|\varphi_1^2(x) - N\beta_1| < N^{1/2+\varepsilon},$$

$$|\varphi_1(x)\varphi_1(y) - N\mathcal{G}(x,y)| < N^{1/2}(N\beta_1)^{\varepsilon}, \ \forall y, \ |x-y| < L^d,$$
(5.4.13b)

$$|\psi_1(x)| < N^{\alpha}, \tag{5.4.13c}$$

$$|(\tilde{A}_1\psi_1)(x+e_\mu) - (\tilde{A}_1\psi_1)(x)| < \frac{N^{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}}.$$
 (5.4.13d)

ここで  $0 < \alpha < 1/2$  と  $0 < \varepsilon < \alpha$  は小さい正定数、また d > 1 は正定数.

#### 5.4.1 小さい $\varphi_1$ 領域での $\psi$ 積分

まず大きな  $\varphi_1$  の領域  $D_i$  の部分を  $g(D_i)$  として抜き出し,  $\varphi_1$  が小さくスムースな場所で考える.さらに  $\tilde{A}_1\psi_1$  も小さい.ゆえに

$$|\varphi_1(x)\varphi_1(y)-N\mathcal{G}_1(x,y)|\leq N^{1/2}\mathcal{G}_1(x,y)$$
 が  $|x-y|< L^{n_0}$  である、全ての  $x,y\in\Lambda$  に対して成り立つ.ここで  $n_0>1$  である.

最初に  $\exp[-\tilde{W}_1(\varphi_1,\psi_0)]$  を遥動場  $\psi_0$  で積分するが、そのため主要ガウス項を抜き出し、残りの非ガウス項を適宜展開する、 $\psi$  のガウス項は

$$d\nu(\psi) = \exp[-\langle \psi, M_0 \psi \rangle] \prod d\psi_0, \tag{5.4.14a}$$

$$M_0 = (Q\Gamma_0 Q^+)^{\circ 2} + 2(Q\Gamma_0 Q^+) \circ \mathcal{G}_1$$
 (5.4.14b)

$$= \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{5.4.14c}$$

で与えられる.ここで  $M_{ij}=E_iM_0E_j$ .さらに

$$\psi = \tilde{A}_1 \psi_1 + Q \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{A}_1 = \frac{1}{L^2} \delta_{[x/L],y} - M_{11}^{-1} M_{10} C^+$$

と置いてMを対角化する.

$$T_0 = (Q^+ M_0 Q)^{-1/2} = \left(\frac{1}{Q^+ [2(Q\Gamma_0 Q^+) \circ \mathcal{G}_1 + (Q\Gamma_0 Q^+)^{\circ 2}]Q}\right)^{1/2}$$

と置き、新変数  $z_0(x), x \in \Lambda \setminus L\Lambda_1$  を

112 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

$$\psi_0(x) = (T_0 z_0)(x) \tag{5.4.15}$$

で導入すれば,

$$d\nu(\psi_0) = \det(T_0) \exp\left[-\sum_x z_0^2(x)\right] \prod dz_0(x).$$
 (5.4.16)

# 5.4.2 大きい $\psi=\Psi_1+Q ilde{\psi}_0$ からの寄与

 $\psi$  に対しても大場領域 (large field region), 小場領域 (small field region) が定義される .  $\psi$  については以下述べるよう ,  $\phi$  に対するものと幾分異なるが小場領域の襟領域 (collar region) でその周りを囲んでおくのは同じである . これら , 大場領域や襟領域を定義する最小単位の領域は前に定義した敷石集合 (paved set)  $\{\Box\}$  である .

さて $\psi$ の前小場領域 (pre-small field region)  $S_0$  を  $|\psi(x)|$  が  $c_1N^{\varepsilon_1}$  より小さい敷石集合 (paved set) として定める:

$$S_0(\psi) = \bigcup \{ \Box : |\psi(x)| \le c_1 N^{\varepsilon_1} \text{ for all } x \in \Box \}$$
 (5.4.17)

そこで  $S_0^c=\Lambda-S_0$  を前大場領域 (pre-large field region) と呼ぶことにする.  $\psi=\tilde{A}_1\psi_1+Q\tilde{\psi}$  とおいて,

$$I_p = [pc_1 N^{\varepsilon_1}, (p+1)c_1 N^{\varepsilon_1}), \quad p = 0, 1, \cdots$$
 (5.4.18)

を定め

$$\tau_p(x) = \chi_{I_p}(|x|)$$
 (5.4.19)

とおく. そこで我々は2種類の大場領域 $D(\psi_1)$ と $R(\tilde{\psi})$ を

$$D(\psi_1) = \{ \Box \subset \Lambda; |\psi_1(x)| \in I_p, p \ge 1,$$

$$\exists x \in \Box, \text{ or } \exists x \in \Box', \operatorname{dist}(\Box, \Box') \le 1, \qquad (5.4.20a)$$

$$R(\tilde{\psi}) = \{ \Box \subset \Lambda; |\tilde{\psi}(x)| \in I_p, p \ge 1,$$

$$\exists x \in \Box, \text{ or } \exists x \in \Delta', \operatorname{dist}(\Box, \Box') \le 1 \} \qquad (5.4.20b)$$

で導入しよう.両者とも小場領域  $S_0$  から薄い襟領域を借りてきている.しかし全ての展開を収束させるために,さらに周りに小場をつけて大場領域の概念を再定義しなければならない.

 $D_i$  ,  $D_j$  を上で定義された大場の連結成分とする.行列式  $\det(1+K_\Lambda)$  を展開するには  $D_i$  と  $D_j$  が十分に離れていないと, $K_{D_i}$  と  $K_{D_j}$  が干渉しあって局所的な積分に分解出来ない.そこで大場  $D_i$  は少なくとも  $\operatorname{diam}(D_i)$  の対数分, $\operatorname{log}(\operatorname{diam}(D_i))$  の厚さの小場が周りにあるよう十分疎であるように再定義する.すなわち

$$\operatorname{dist}(D_i, D_j) \ge \log(r_{rj}), \quad r_{ij} = \min\{\operatorname{diam}(D_i), \operatorname{diam}(D_j)\}\$$

が成立するよう  $\{D_i\}$  をまとめ直して再定義する . さらに  $\xi_0$  の積分から生じる因子

 $F_D = \langle \psi_D, (\varphi \varphi) \circ \left( Q \frac{1}{P_D} Q^+ \right) \psi_D \rangle$  (5.4.21)

は離れた大場領域  $\psi_{D_1}$  と  $\psi_{D_2}$  を連結する長距離相互作用を含んでいる.ゆえにこれらを分断して,局所的な積分に分解し残りをポリマーと呼ばれる非局所的で,かつ小さい量に分解しなくてはいけない.

この  $F_D$  の分析のため

$$F_{\Delta}(\psi) = \langle Q^{+}\psi_{\Delta}, \frac{1}{P_{\Delta}(\psi)}Q^{+}\psi_{\Delta} \rangle, \tag{5.4.22}$$

$$P_{\Delta} = \chi_{\Delta} Q^{+} [(-\Delta + m_0^2) + i\alpha\psi] Q \chi_{\Delta}$$
 (5.4.23)

とする.これは  $\xi$  のガウス積分後に指数関数の肩に現れるもので  $\psi_{D_i}$  と  $\psi_{D_j}$  が  $P(\psi)^{-1}$  を通じて相互作用している形になっている. $P(\psi)^{-1}$  は指数関数的に減少しているのでこれらは強さの対数ほど離れていれば十分である.すなわち大きい場は強さの対数の距離より近ければまとめて考えないといけないし,大きい $F_\Delta$  は他の配位から離されていなければならない.いま  $\operatorname{Re} F_\Delta \in I_{p(\Delta)},\ \Delta \subset \Lambda,$ とすれば

$$D_F^{(0)}(\psi) = \{\Box; \operatorname{Re} F_\Delta > c_1 N^{\varepsilon_1}, \Delta \subset \Box\}$$
 (5.4.24)

$$D_F(\psi) = \bigcup_u \left\{ \Box; \exp\left[\frac{c}{10} \operatorname{dist}(u, \Box)\right] < p(u) + 1 \right\}$$
 (5.4.25)

として

$$D_F^0 \subset R(\tilde{\psi}) \tag{5.4.26}$$

である .  $D_F$  は幅  $\log |F(\Delta)|$  ほどの小場領域で囲まれている必要がある . そこで

$$D(\psi) = \bigcup D(\psi_1) \cup R(\tilde{\psi_1}) \cup D_F(\psi) = \bigcup D_i(\psi)$$
(5.4.27)

と置く.ここで  $D_i$  は連結成分である.

 $x\in LZ^2$  を中心とする  $L\times L$  サイズの正方形  $\Delta$  をとる .  $(Q^+\psi)=\psi_i-\psi_x$  また  $(P_\Delta)_{ii}$  は  $\psi_i+\psi_x$  を含むので , この  $\tilde\psi$  による積分には 3 つの部分があることがわかる .

- (i) 摂動領域: $|\psi_i+\psi_x|$  と  $|\psi_i-\psi_x|$  が、全ての  $i\in\Delta$  にわたって両方とも小さい( $\leq c_1N^{\varepsilon_1}$ )領域
- (ii) 制御可能領域: $|\psi_i+\psi_x|$  は大きいが (つまり  $\geq c_1N^{\varepsilon_1},\,\exists i\in\Delta)\;|\psi_i-\psi_x|$ は  $\forall j\in\Delta$  に対して小さい
- (iii) 注意を要する領域: $|\psi_i-\psi_x|\geq c_1N^{arepsilon-1}$  がある  $i\in\Delta$  でなりたつ領域

そこで(i),(ii)では展開が速く収束し、二つの大場領域 $D_1$ と $D_2$ は干渉するが強さはO(1)で大変弱い(ii)の場合、 $\tilde{\psi}$ による積分安定性は行列式

114 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

 $\det^{-N/2}\left(\Gamma_0^{-1}+i\alpha Q^+\psi Q\right)$  の積分可能性で保障されなくてはならない. というのは, ガウス部分は  $\tilde{\psi}$  にあまり拠らないからである.

大きなところの  $\tilde{\psi}$  については,  $F_{\Delta}$  が大変大きくなり, 他の場所と干渉する可能性があり, それを隔離するために  $\Delta \subset D$  を厚さが  $\log(1+\mathrm{Re}F_{\Delta})$  ほどの襟領域と言われる小場領域で囲んでおく. これは因子  $\exp[-\beta\mathrm{Re}F_{\Delta}]$  を生ずるが, これは非摂動的であり, 摂動 (i) で生ずる因子  $\beta^{-|D|/2}$  より遥かに小さい. これらの議論から大場領域  $D_i$  は  $\beta^{-|D|/2}\exp[-N^{\varepsilon}|D_i|]$  より小さい "damping factor" を持つことになり,期待通り,大場配位は忌避される.

さて実際積分するためには

$$1 = \prod_{x \in \Lambda'} (\sum_{p} \chi_{I_p}(\tilde{\psi}(x)) \equiv \sum_{\bar{p}} \tau_{\bar{p}}(\tilde{\psi})$$
 (5.4.28)

$$\tau_{\bar{p}}(\psi) = \prod_{x} \chi_{I_{p(x)}}(\psi_x)$$
(5.4.29)

を挿入し ,  $au_{ar p}$  によって如何なる大場領域が生ずるか考える. 与えられた  $\hat p$  によって大場領域  $D(\psi_1)$  ,  $R(\tilde\psi)$  及び  $D_F(\psi)$  が出来たとし ,

$$D(\psi) = \bigcup D(\psi_1) \cup R(\tilde{\psi}) \cup D_F(\psi) = \bigcup D_i(\psi)$$
 (5.4.30)

を連結成分への分解とする.

さて大場領域  $D(\tilde{A}_1\psi_1)$  が与えられたとして ,  $\tilde{\psi}(x)$  ,  $x\in\Lambda\backslash L\Lambda_1$  で積分すると

$$\exp[-W_1] = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi_1, G_1^{-1}\phi_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{N}}\langle:\phi^2:_{G_1}, \mathcal{A}_1\psi_1\rangle\right]\Omega_1$$
(5.4.31)

が得られる.ここで

$$\Omega_{1} = \int \det^{-N/2}(1 + K_{\Lambda}) \\
\times \exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi, (\varphi\varphi)\circ\left(Q\frac{1}{P}Q^{+}\right)\psi\rangle\right] \prod d\tilde{\psi} \\
= \sum_{\{D_{i}\}} \int \det^{-N/2}(1 + K_{\Lambda\setminus D}) \\
\times \exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi_{\Lambda\setminus D}, (\varphi\varphi)\circ\left(Q\frac{1}{P_{S}}Q^{+}\right)\psi_{\Lambda\setminus D}\rangle\right] \\
\times \prod_{i} \det^{-N/2}(1 + K_{D_{i}}) \\
\times \exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi_{D_{i}}, (\varphi\varphi)\circ\left(Q\frac{1}{P_{D_{i}}}Q^{+}\right)\psi_{D_{i}}\rangle\right] \\
\times (\text{ポリマー展開項}) \chi_{D}(\tilde{\psi}) \prod d\tilde{\psi} \tag{5.4.32}$$

であり, $\chi_D( ilde{\psi})$  は特性関数で今述べた大場領域 $\{D_i\}$ が生成されるように選

ばれる.かくして積分は、大場領域を小場領域を通ってつなぐ、いわゆるポリマー展開部分を除けば、局所積分に分解されている.まず大きい場を含むところには以下の上限を与える定理が証明できる:

定理 **5.4.2**  $\cup D_i(\Psi)\subset D$  が与えらたとせよ.  $\chi_D(\tilde{\psi})$  を  $\tilde{\psi}(x),x\in R(\tilde{\psi})$  の 特性関数で大きいか若しくは非スムースな場の配位  $D=D(\Psi)\cup R(\tilde{\psi})\cup D_F$  が生ずるものとする.  $\psi(x)=\Psi(x)+(Q\tilde{\psi}_0)(x)$  さらに  $P_D=\chi_DQ^+(-\Delta+m^2+i\alpha\psi)Q\chi_D$  とせよ. このとき

$$\left| \frac{1}{P_D}(x,y) \right| \le \text{const.} \, \Gamma_0(x,y)$$

が $\psi$ に一様に成り立つ. さらに

$$\rho(\varphi_1, \psi_1) = \int \det^{-N/2}(K_D)$$

$$\times \exp\left[-\frac{2}{N}\langle \chi_D \psi, (\varphi_1 \varphi_1) \circ \left(Q \frac{1}{P_D} Q^+\right) \chi_D \psi\rangle\right] \chi_D(\tilde{\psi}) \prod d\tilde{\psi}_x$$
(5.4.33)

とせよ. このとき

$$|\rho(\varphi_1, \psi_1)| \le (\beta)^{-|D'|/2} \exp[-\kappa_1 |D| N^{\varepsilon} + \kappa_2 |D|] \tag{5.4.34}$$

が成り立つ.

証明 こまかい証明は割愛しよう.前の議論と若干の行列不等式からでてくる.主要項については,以下のように局所的な項で評価される:

$$F(\psi_D) = \frac{2}{N} \langle \psi_D, [N\mathcal{G}_1 + : \varphi_1 \varphi_1] \circ \left( Q \frac{1}{\Gamma_0^{-1} + i\alpha Q^+ \psi_D Q} Q^+ \right) \psi_D \rangle$$

$$= 2\beta_1 \langle Q^+ \psi_D, \frac{1}{\Gamma_0^{-1} + i\alpha Q^+ \psi_D Q} Q^+ \psi_D \rangle$$

$$+ \frac{2}{N} \langle \psi_D, [N(\mathcal{G}_1 - \beta_1) + : \varphi_1 \varphi_1] \circ \left( Q \frac{1}{\Gamma_0^{-1} + i\alpha Q^+ \psi_D Q} Q^+ \right) \psi_D \rangle.$$

ここで

$$Q^{+}\tilde{A}_{1}\psi_{1} = -Q^{+}M_{11}^{-1}M_{10}C^{+} = O(\beta^{-1})\psi_{1}$$

に注意する.主要項を考えるために ,  $\tilde{A}_1\psi_1+Q\tilde{\psi}_0$  を  $\tilde{A}_1\psi_1+Q\tilde{T}_0z$  で変える.ここで

$$\tilde{T}_0^{-2} = 2\beta \chi_D (\Gamma_0 + i\alpha Q^+ \psi Q) \chi_D. \tag{5.4.35}$$

かくして局所化されて,ヤコビアンが結果として得られる:

$$\prod d\tilde{\psi}_x = \beta^{-|D'|/2} \det^{-1/2} \left( \Gamma_0^{-1} + i\alpha Q^+ \psi Q \right) \prod dz_x.$$

これは  $\xi$  の積分で得られた , 行列式の一部をキャンセルする . かくして z の積

116 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

分は局所化されて,証明の主要な部分は得られる.

 $\square\subset D$  をひとつ選び、 $\{z_x;x\in\square\}$  の大きさが  $D=D_i$  が構成されるようなものとする.故に  $|\psi_1|< N^\varepsilon$  が  $\square$  で成り立つならば, $|z_x|>N^\varepsilon$  が少なくとも一つの  $x\in\square$  に対して成立する.

という訳でそういう配置の一つの  $\square$  あたり  $\exp[-N^{2\varepsilon}]$  の因子が生ずる. $\langle \chi_D \psi, \mathcal{G}_1 \circ (Q P_D^{-1} Q^+) \chi_D \psi \rangle$  の中の  $Q^+ \tilde{A}_1 \psi_1$  を含む項は  $\beta^{-1}$  か  $\beta^{-1/2}$  の大きさである.すなわち,大きな  $\psi_1$  を含む項は  $\det^{-N/2}(1+\cdots)$  を通じて,小さな因子  $\exp[-N^{\varepsilon}]$  を生ずる.

#### **5.5** ポリマー展開と評価

 $\{D_i\}$  を  $\psi$  の  $\Psi_1=\tilde{A}_1\psi_1$  と  $z_0$  による大場領域および連結成分への分解とし,以下  $\psi_D=\chi_D(\Psi_1+QT_0\chi_Dz)$ ,すなわち  $\Psi_1$  と z は D 内に局所化していると考える.この局所化された場に対する記法  $\psi_{D_i}$  を  $K_D$  及び  $K_{\Lambda\setminus D}$  に対しても用いる.

$$\frac{1}{P_{\Lambda}} = \frac{1}{1 + K_{\Lambda}} \Gamma_{0}$$

$$\frac{1}{1 + K_{\Lambda}} = \frac{1}{1 + K_{\Lambda \setminus D} + \sum K_{D_{i}} + \sum' K_{D_{i};D_{j},D_{k}} + \cdots}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + K_{\Lambda \setminus D}} + \sum \frac{1}{1 + K_{D_{i}}}\right)$$

$$\times \left(1 + \sum' K_{D_{i};D_{j},D_{k}} (1 + K_{D_{k}})^{-1} + \cdots\right)^{-1}$$

ここで

$$K_{D_i;D_j,D_k} = \frac{2i}{\sqrt{N}} \chi_{D_j} Q \Gamma_0 Q^+ (\Psi + Q T_0 \chi_{D_i} z) \chi_{D_k}$$

$$K_{D_i} = K_{D_i;D_i,D_i}$$
(5.5.1)

の記号を導入し ,  $\sum'$  は  $D_i = D_j = D_k$  は除くこととした . 行列式を分解しよう . まず

$$\det^{-N/2} (1 + K_{\Lambda}) = \det^{-N/2} (1 + K_{\Lambda \setminus D}) \prod_{i} \det^{-N/2} (1 + K_{D_i})$$

$$\times \left( \sum_{i} \frac{1}{n!} \sum_{Y_i} \prod_{i} h(Y_i) \right)$$
(5.5.3)

が得られる.ここでいわゆるポリマーh(Y)は,通常の展開で得られるもので

$$\det^{-N/2} \left( 1 + \sum_{i} {}'K_{D_i;D_j,D_k} (1 + K_{D_k})^{-1} + \cdots \right)$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod ds_b \prod \left( \frac{d}{ds_b} + \delta(s_b) \right) \det^{-N/2} \left( 1 + \sum_b s_b K_b \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{Y_i \cap Y_i = \emptyset} \prod_{i=1}^n h(Y_i)$$
(5.5.5)

である . ただし  $\{b=(i,j,k)\},\, K_b=K_{D_i;D_j,D_k}(1+K_{D_k})^{-1}$  で

$$h(Y) = \sum_{\gamma \in T(Y)} \int \prod_{b \in \Gamma} ds_b \frac{\partial}{\partial s_b} \det^{-N/2} (1 + K(Y, s_\gamma)),$$

$$K(Y, s_{\gamma}) = \sum_{b \in \gamma} s_b K_b,$$

であり,T(Y) は 木型とは限らない  $\{\Delta_i\subset Y\}$  の上の連結グラフである. $\{D_i\}$  は疎に作られていて,従って i,j,k のうち一つでも異なれば, $K_{D_i,D_j,D_k}(1+K_{D_k})^{-1}$  は  $\psi$  に一様に小さい数で上限が抑えられる.ゆえに h(Y) が小さいことは,コーシー評価から従う.

 $P^{-1}$  も同様に分解されて ,  $\exp[-W_1]$  で残っている項は (5.4.32) の

$$\Omega_{1} = \sum_{\bar{p}(u)} \exp\left[-\frac{2}{N} \langle \Psi_{1}, (\varphi_{1}\varphi_{1}) \circ (Q\chi_{D^{c}}\Gamma_{0}Q^{+})\Psi_{1} \rangle\right] 
\times \int \prod_{i} g(D_{i}, \psi_{1}, \varphi_{1}, z_{0}) \times \det^{-N/2}(1 + K_{\Lambda \setminus D}) 
\times \exp\left[-\frac{2}{N} \langle \psi_{D^{c}}, (\varphi_{1}\varphi_{1}) \circ \left(Q\frac{1}{1 + K_{D^{c}}}\Gamma_{0}Q^{+}\right)\psi_{D^{c}} \rangle\right] 
\times \left(\sum \frac{1}{n!} \sum \prod \eta(Y_{i}) \chi_{\bar{p}}(z) \prod dz(x) \right)$$
(5.5.6)

であり,

$$g(D_i, \psi_1, \varphi_1, z_0) = \det^{-N/2} (1 + K_{D_i})$$

$$\times \exp \left[ -\frac{2}{N} \langle \chi_{D_i} \psi_{D_i}, (\varphi_1 \varphi_1) \circ \left( Q \frac{1}{1 + K_{D_i}} \Gamma_0 Q^+ \right) \chi_{D_i} \psi_{D_i} \rangle \right]$$

である.積分が $N \geq 3$ で収束することを示すには

$$\frac{1}{1 + K_{D_i}}(x, y) \sim \frac{1}{\chi_{D_i}[\Gamma_0^{-1} + i\alpha Q\psi Q^+]\chi_{D_i}}(x, y)$$
$$\det(1 + K_{D_i}) \sim \det(\chi_{D_i}[\Gamma_0^{-1} + i\alpha Q\psi Q^+]\chi_{D_i})$$

に注意する.

補題  ${f 5.5.1}$   $K_D=\chi_D K\chi_D$  および  $K_{X,Y}=\chi_X K\chi_Y$  とする. さらに  $\tilde{\Lambda}=\Lambda-D$  とする. このとき

(1)  $(1+K_D)^{-1}$  及び  $K_{\tilde{\Lambda}}(1+K_D)^{-1}$  は D と  $\psi$  に一様に有界である.

118 第5章 漸近的自由の起源:  $\sigma$  モデル

(2) 以下の上限が $\psi$ に一様に成り立つ:

$$|(1+K_D)^{-1}(x,y)| \le c_0 \exp[-c_1|x-y|]$$
(5.5.7)

ここで  $c_0$  と  $c_1$  は  $\psi$  に一様な定数.

(3) 以下の上限が $\psi$ とDに一様になりたつ:

$$\left| \left( K_{\tilde{\Lambda},D} \frac{K_D}{1 + K_D} \right) (x, y) \right| \le N^{-\varepsilon} e^{-c_1 |x - y|} \tag{5.5.8}$$

ここで  $x \in \tilde{\Lambda}$  かつ  $y \in D$ .

この証明は読者に任せておくことにする.

#### 5.5.1 行列式と: $\varphi \varphi$ :の展開

残るのは小場配位からの寄与と、今まで無視してきた: $\varphi\varphi$ :の処理である.これは非局所的な効果をもつ. $\square,\square_i,\cdots$  は  $\Lambda\backslash D$  の内部のブロックとし,行列式の中の K を分解しておく:

$$K_{\square} = \frac{2i}{\sqrt{N}} \chi_{\square} Q \Gamma_0 Q^+ (\Psi_1 + Q(T_0 \chi_{\Delta} z_0)) \chi_{\square}, \qquad (5.5.9a)$$

$$K_{\square_i,\square_j} = \frac{2i}{\sqrt{N}} \chi_{\square_i} \Gamma_0(\Psi_1 + Q(T_0 \chi_{\Delta_j} z_0)) \chi_{\square_i}, \tag{5.5.9b}$$

$$K_{\square_i,\square_j,\square_k} = \frac{2i}{\sqrt{N}} \chi_{\square_i} \Gamma_0(\Psi_1 + Q(T_0 \chi_{\square_j} z_0)) \chi_{\square_k}.$$
 (5.5.9c)

 $\det(1+\mathcal{K}_{\Lambda\setminus D})$  については,まず2次まで展開し,残った部分

$$\det_{3} \left( 1 + \sum_{i} K_{\square_{i}} + \sum_{i \neq j} K_{\square_{i}, \square_{j}} + \sum_{i \neq k} K_{\square_{i}, \square_{j}, \square_{k}} \right)$$
 (5.5.10)

をポリマー展開する.同じく

$$\frac{2}{N} \langle \psi, \left( \left( Q \frac{1}{1+K} \right) \Gamma_0 Q^+ \right) \circ (\varphi_1(x) \varphi_1(y)) \psi \rangle$$

$$= 2 \langle \psi, [(Q \Gamma_0 Q^+) \circ \mathcal{G}_1] \psi \rangle + \frac{2}{N} \langle \psi, [(Q \Gamma_0 Q^+) \circ (: \varphi_1 \varphi_1 :)] \psi \rangle$$

$$+ \frac{2}{N} \left\langle \psi, \left( Q \left( \frac{1}{1+\sum_i K_{\square_i} + \sum_b K_b} - 1 \right) \Gamma_0 Q^+ \right) \circ (\varphi_1(x) \varphi_1(y)) \psi \right\rangle$$
(5.5.11)

の中の最後の 2 項も展開する.ここで b は  $(\square_i,\square_j)$  あるいは  $(\square_i,\square_j,\square_k)$  を意味する.ここで  $D_i$  と異なるのは, $\{\square_i\}$  は隣り合うこともあり,このような項は一緒にまとめておく必要がある.故に

$$\det_{3}^{-N/2}(1+K) = \int_{0}^{1} \prod_{b} ds_{b} \left(\frac{\partial}{\partial s_{b}} + \delta(s_{b})\right) \det_{3}^{-N/2}(1+\sum_{i} K_{\square_{i}} + \sum s_{b}K_{b})$$

$$= \prod_{b} \det_{3}^{-N/2}(1+K_{\square}) \left[\sum_{n} \frac{1}{n!} \sum_{Y_{i} \cap Y_{j} = \emptyset} \prod_{i=1}^{n} h_{1}(Y_{i})\right]$$
(5.5.12a)

ここで

$$h(Y) = \prod_{\square \subset Y} \det_{3}^{N/2} (1 + K_{\square})$$

$$\times \left[ \sum_{\gamma \in T(Y)} \int \prod_{b \in \Gamma} ds_{b} \frac{\partial}{\partial s_{b}} \det_{3}^{-N/2} (1 + K(Y, s_{\gamma})) \right]$$

$$K(Y, s_{\gamma}) = \sum_{\square \subset Y} K_{\square} + \sum_{b \in \gamma} s_{b} K_{b}$$

ここで再び T(Y) は  $\{\Box_i\subset Y\}$  の上の木型とは限らぬ (つまりループを含む) 連結グラフでそれが小さいことは再びコーシー評価である.

同じく

$$\frac{1}{1+K(\psi)}-1 = \frac{1}{1+K(\Psi)}-1 + \left(\frac{1}{1+K(\psi)} - \frac{1}{1+K(\Psi)}\right)$$

とおき第2項目を展開する:

$$\frac{1}{1+K(\psi)} - \frac{1}{1+K(\Psi)}$$

$$= \sum_{i} \left( \frac{1}{1+K_{\square_{i}}(\psi)} - \frac{1}{1+K_{\square_{i}}(\Psi)} \right) + \sum_{Y,|Y| \ge 2} \hat{h}_{2}(Y) \tag{5.5.13}$$

ここで

$$\hat{h}_2(Y) = \sum_{\gamma \in T(Y)} \int \prod_{b \in \gamma} ds_b \frac{\partial}{\partial s_b} \left[ \frac{1}{1 + K(Y, s_\gamma)} - \frac{1}{1 + K(Y, s_\gamma)(z = 0)} \right]$$

故に

$$\exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi,\left(Q\left(\frac{1}{1+K}-1\right)\Gamma_{0}Q^{+}\right)\circ(\varphi_{1}(x)\varphi_{1}(y))\psi\rangle\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{2}{N}\langle\psi,\left(Q\left(\sum_{i}\left(\frac{1}{1+K_{\square_{i}}}-1\right)+\sum_{Y}\hat{h}_{2}(Y)\right)\Gamma_{0}Q^{+}\right)\right]$$

$$\times\circ(\varphi_{1}(x)\varphi_{1}(y))\psi\rangle\right]$$

細かい計算は省略するが,これらを全て一緒にして最終の形が得られる:

$$\exp[-W_{1}] = \exp[-\frac{1}{2}\langle\phi_{1}, G_{1}^{-1}\phi_{1}\rangle$$

$$-\langle\Psi_{1}, \left(T_{0}^{\circ 2} + \frac{2}{N}\left(Q\frac{1}{1+K(\Psi_{1})}\Gamma_{0}Q^{+}\right)\circ(\varphi_{1}\varphi_{1})\right)\Psi_{1}\rangle$$

$$+i\langle J_{1}, \Psi_{1}\rangle] \times \prod_{i} \det_{3}^{-N/2}(1+K_{\square_{i}}(\Psi_{1}))$$

$$\times \int \prod_{\square \subset \Lambda} Z_{\square}(\varphi_{1}, \Psi_{1}, z_{\square}) \left[\sum_{i} \frac{1}{n!} \sum_{Y_{i}} \prod_{i} h(Y_{i})\right] d\mu_{0}(z) \qquad (5.5.14)$$

ここで

$$Z_{\square}(\varphi_{1}, \Psi_{1}, z_{\square}) = \exp[i < h_{\square}, z_{\square} > - < z_{\square}, \delta M_{\square} z_{\square} > + < z_{\square}, \delta g z_{\square} >]$$

$$\times \frac{\det_{3}^{N/2} (1 + K_{\square}(\Psi_{1}))}{\det_{3}^{N/2} (1 + K_{\square}(\psi))}$$
(5.5.15)

であり, さらに

$$h_{\square} = \chi_{\square} T_0 Q^+ \left\{ J_1 + \frac{4i}{N} \left( \mathcal{T}_0 \circ (: \varphi \varphi :) \right) \Psi_1 \right\}$$

$$\delta M_{\square} = \frac{2}{N} \chi_{\square} T_0 Q^+ \left\{ \mathcal{T}_0 \circ (: \varphi_1 \varphi_1 :) + \left[ \left( Q \left( \frac{1}{1 + K_{\square}(\Psi_1)} - 1 \right) \Gamma_0 Q^+ \right) \circ (\varphi_1 \varphi_1) \right] \right\} Q T_0 \chi_{\square}$$

かつ

$$\delta g_{\square} = \frac{2}{N} \chi_{\square} T_0 Q^+ \times \left[ \left( Q \left( \frac{1}{1 + K_{\square}(\psi)} - \frac{1}{1 + K_{\square}(\Psi_1)} \right) \Gamma_0 Q^+ \right) \circ (\varphi_1 \varphi_1) \right] Q T_0 \chi_{\square}$$

である.

さらに  $|z_x|< \varepsilon N^{1/2}$  とし、故に行列式と  $1/(1+K_\square)$  の展開は収束する. 積分は  $\square\subset \Lambda$  の上の対角項と  $h(Y),\,Y\subset \Lambda$  で表されるポリマー項になる. ただしこれが収束するには以下を  $\varphi_1$  に対して仮定しなければならない:

- 1.  $|: \varphi_1^2(x): | < N^{1/2 + \varepsilon_0},$
- $2. \ |\varphi_1(x)\varphi_1(y) N\mathcal{G}(x,y)| < N^{1/2+\varepsilon_0}\beta_1^{\varepsilon_2} \exp[c|x-y|/10].$

故に

$$|\delta M_{\square}| < N^{\varepsilon_0 - 1/2}, \quad |h_{\square}| < N^{\varepsilon_0 - 1/2} \tag{5.5.16}$$

であり, $\mathcal{T}_0\circ (:\varphi\varphi:)$  に対するポリマー展開は収束する. さらに以下を見るのは易しい:

$$|\delta g_{\square}| \leq \text{const.} \frac{1}{(N\beta_1)^{1/2}} |z_x|.$$

#### 5.5.2 主要項

局所化された量は摂動されたガウス積分になる:

$$\begin{split} \mathcal{Z}_{\square} &= \int_{S_z} Z_{\square}(\varphi_1, \Psi, z_{\square}) d\mu_0(z_{\square}) \\ &= \det^{-1/2}(1 + \delta M_{\square}) \\ &\times \int_{S_z'} \exp\left[-\langle (z_{\square} - \frac{i\eta_{\square}}{2}), (z_{\Delta} - \frac{i\eta_{\square}}{2})\rangle - \frac{1}{4}\langle \eta_{\square}, \eta_{\square}\rangle \right. \\ &\left. + \delta g(\psi, z_{\square}, \varphi)\right] \times \frac{\det_3^{N/2}(1 + K_{\square}(\Psi_1))}{\det_3^{N/2}(1 + K_{\square}(\psi))} dz_{\Delta} \end{split}$$

ここで  $z_{\square}=\chi_{\square}z_0,\;\;dz_{\square}=\prod_{x\in \square}dz_{0,x}$  かつ

$$\eta_{\square} = (1 + \delta M_{\square})^{-1/2} h_{\square},$$
  
$$\delta g_{\square}(\psi, z_{\square}, \varphi) = \langle z_{\square}, (1 + \delta M_{\square})^{-1/2} g_{\square} (1 + \delta M_{\square})^{-1/2} z_{\square} \rangle$$

領域 $S_z$ は

$$S_z = \{z_x; x \in \Box \backslash L\Lambda_1\}; |z_x| < cN^{\varepsilon} \beta_1^{1/2}\}$$

$$(5.5.17)$$

で与えられ、ここでは  $(\tilde{\psi}_0)(x)=(T_0z_0)(x)\in (-N^\varepsilon,N^\varepsilon)$ 、ただし  $1/4<\varepsilon<1/3$  と想定した.ここで  $z_x$  の経路積分を変えて  $i\eta_\square$  が両端点  $z_x=\pm N^\varepsilon\beta^{1/2}$ を除いて相殺するようにとる.つまりもとの  $z_0$  は

$$z_0 \to (1 + \delta M_{\square})^{-1/2} z_0 \to (1 + \delta M_{\Delta})^{-1/2} \left( z_0 - \frac{i}{2} \eta_{\Delta} \right)$$
 (5.5.18)

となり、もとのSは対応して幾分変わる.

これらの変更によって、我々は主要項

$$\mathcal{F}_{1} = \frac{1}{4} \sum_{\square} \langle \eta_{\square}, \eta_{\square} \rangle \sim \frac{1}{4} \sum_{\square} \langle h_{\square}, h_{\square} \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\square} \langle \mathcal{J}_{1}, Q T_{0} \chi_{\square} T_{0} Q^{+} \mathcal{J}_{1} \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \langle \mathcal{J}_{1}, Q T_{0}^{2} Q^{+} \mathcal{J}_{1} \rangle \equiv \langle \mathcal{J}_{1}, f_{1} \mathcal{J}_{1} \rangle$$
(5.5.19)

を得る、ここで

$$\mathcal{J}_{1} = J_{1} + \frac{4i}{N} (\mathcal{T}_{0} \circ (: \varphi \varphi :)) \Psi_{1} \qquad (5.5.20a)$$

$$f_{1} = \frac{1}{4} Q \mathcal{T}_{0}^{2} Q^{+} = \frac{1}{4} \left[ Q \frac{1}{Q^{+} (\mathcal{T}_{0}^{\circ 2} + 2\mathcal{G}_{1} \circ \mathcal{T}_{0}) Q} Q^{+} \right] (x, y) \qquad (5.5.20b)$$

$$\sim \frac{1}{8\beta_{1}} \left[ Q \frac{1}{Q^{+} Q \Gamma_{0} Q^{+} Q} Q^{+} \right] (x, y)$$

$$= \frac{1}{8\beta_{1}} Q (Q^{+} Q)^{-1} Q^{+} (-\Delta + m^{2}) Q (Q^{+} Q)^{-1} Q^{+}$$

$$= \frac{1}{8\beta_{1}} E^{\perp} (-\Delta + m^{2}) E^{\perp} \qquad (5.5.20c)$$

である , これは  $Q(Q^+Q)^{-1}Q^+=1-E=E^\perp$  でかつ  $E=E_0$  がブロック

毎に定数である空間への射影であることから従う(これは極分解 Q=V|Q|,  $|Q|=(Q^*Q)^{1/2},\,VV^*=E^\perp$  から示される .) 故に

$$(E_0 f)(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{\zeta \in \Delta_{x_1}} f(\zeta)$$

ここで  $\Delta_{x_1}$  は中心  $x_1 \in L\Lambda_1$  のサイズ  $L \times L$  の正方形である.

さて

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}_1^{(i)} \tag{5.5.21}$$

としよう, ただし

$$\mathcal{F}_{1}^{(1)} = \langle J_{1}, f_{1}J_{1} \rangle \tag{5.5.22a}$$

$$\mathcal{F}_{1}^{(2)} = \frac{8i}{N} \langle J_{1}, f_{1}(\mathcal{T}_{0} \circ (: \varphi \varphi :)) \Psi_{1} \rangle$$
 (5.5.22b)

$$\mathcal{F}_{1}^{(3)} = -\frac{16}{N^{2}} \langle (\mathcal{T}_{0} \circ (: \varphi \varphi :)) \Psi_{1}, f_{1}(\mathcal{T}_{0} \circ (: \varphi \varphi :)) \Psi_{1} \rangle$$
 (5.5.22c)

かくして  $\mathcal{F}_1^{(i)}$  (i=2,3) は以下見るように非本質的 (irrelevant) , また  $\mathcal{F}_1^{(1)}$  は境界的 (marginal) である . そして  $(E_0\mathcal{G})(x)$  が定数で , それゆえ  $(-\Delta)(E_0\mathcal{G})=0$  という事実を用いて次式が得られる .

$$\mathcal{F}_{1}^{(1)} = \frac{1}{8N\beta} \left[ \langle (\varphi_{1}^{2} - E_{0}\varphi_{1}^{2}), (-\Delta)(\varphi_{1}^{2} - E_{0}\varphi_{1}^{2}) \rangle + \langle (\varphi_{1}^{2} - E_{0}\varphi_{1}^{2}), (-\Delta)N\mathcal{G}_{1}) \rangle \right] + \frac{m_{0}^{2}}{8N\beta L^{2}} \sum_{x,y} (:\varphi_{1}(x)^{2} : -:\varphi_{1}(y)^{2} :)^{2}.$$
 (5.5.23)

 $(-\Delta)(E_0\varphi_1^2)(x) \neq 0$  が  $x \in \partial \Delta_{x_1}$  についてのみ成立し内部では  $(-\Delta)E_0\mathcal{G}_1 = 0$  である. さらに  $\mathcal{F}_1$  は  $\varphi^2$  の質量項を含まないことに注意し,

$$(\partial_{\mu}\varphi^{2})(x) = 2(\partial_{\mu}\varphi(x))\varphi(x) + (\partial_{\mu}\varphi(x))^{2}, \quad \partial_{\mu}\varphi(x) = \varphi(x + e_{\mu}) - \varphi(x)$$

に留意すれば、 $\mathcal{F}_1$  の主要項は

$$\mathcal{F}_{1} = \frac{1}{8N\beta} \langle \varphi_{1}^{2}, (-\Delta)\varphi_{1}^{2} \rangle$$
 (5.5.24a)
$$= \frac{1}{2N\beta} \sum_{x,\mu} \sum_{ij} (\partial_{\mu}\varphi_{i})(x)(\partial_{\mu}\varphi_{j})(x)\varphi_{i}(x)\varphi_{j}(x)$$
 +(非本質的な頃) (5.5.24b)

$$=\frac{1}{2N\beta}\langle\partial_{\mu}\varphi,(\varphi\otimes\varphi)\partial_{\mu}\varphi\rangle+(非本質的な項) \hspace{1.5cm} (5.5.24c)$$

$$\equiv V_1(\varphi_1) + V_2(\varphi_1) \tag{5.5.24d}$$

 $(V_i$  はこの順番で定義) になる.ここで

$$(\varphi \otimes \varphi)_{ij} = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)_{ij} = \varphi_i(x)\varphi_j(x), \qquad (5.5.25a)$$

$$V_1 = \frac{1}{2N\beta} \sum_{x,\mu} \sum_{ij} (\partial_{\mu}\varphi_i)(x)(\partial_{\mu}\varphi_j)(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x), \qquad (5.5.25b)$$

すなわち  $(arphi \otimes arphi)$  はスピン  $ec{arphi}(x) \in R^N$  の方向への射影である.同様に

$$\sum_{x} (Q^{+} \varphi_{1}^{2}(x))^{2} = \sum_{x \in \Lambda} [(\vec{\varphi}_{1}(x) - \vec{\varphi}_{1}(x_{0})) \cdot (\vec{\varphi}_{1}(x) + \vec{\varphi}_{1}(x_{0}))]^{2}$$

$$= \sum_{x \in \Lambda} \sum_{i} (\vec{\varphi}_{1}(x) - \vec{\varphi}_{1}(x_{0}))_{i}^{2} \mathcal{G}_{1}(x)$$

$$+ \sum_{x \in \Lambda} \sum_{i,j} (\vec{\varphi}_{1}(x) - \vec{\varphi}_{1}(x_{0}))_{i} (\vec{\varphi}_{1}(x) - \vec{\varphi}_{1}(x_{0}))_{j}$$

$$\times : \varphi_{1,i}(x) \varphi_{1,j}(x) :$$

$$= v_{0} + v_{1}$$
(5.5.26)

である.これは自由ハミルトニアンの部分に波動関数の繰りこみとして吸収される.特に運動エネルギーの部分は

$$\frac{1}{2} \left\langle \partial_{\mu} \varphi_{1}, \left( 1 + \frac{\varphi_{1} \otimes \varphi_{1}}{N\beta} \right) \partial_{\mu} \varphi_{1} \right\rangle \tag{5.5.27}$$

であって , この項の処理は我々の今のところ大変微妙な仮定に強くよっている . この補正項  $\varphi\otimes\varphi/N\beta$  の強さはそのままでは O(1) であるが , もし  $\varphi_1^2$  に対する仮定

$$|\varphi_1^2(x) - N\beta_1| < N^{1/2 + \varepsilon}$$

が正しければ ,  $\varphi_1$  と  $\partial_\mu \varphi_1$  はほぼ直交するので , これは大変小さくなる (Brydges 氏達のグループの議論も T.Balaban 氏の議論もこれで難渋している .)

最後にはポリマーを再結集し,すなわち  $\prod \eta(Y_i)$  を求め  $\log$  を取って  $W_1$  の形にまとめ,繰りこみ群の流れを構成する.

$$\rho(Y, \Psi_1, \Psi_1) = \frac{1}{\prod_{\square \subset Y} \mathcal{Z}_{\square}} \int \left( \prod_{\square \subset Y} Z_{\square} \right) \eta(Y) \prod d\mu(z_{\square}) \quad (5.5.28)$$

と定める.ここで  $z_0(x)$   $\quad (x \in Y)$  の経路は測度が(ほぼ)実になるように変られている.ゆえに  $\eta(Y)$  内の  $z_0$  は

$$(1+\delta M_{\square})^{-1/2}\left(z_0-\frac{i}{2}\eta_{\square}\right)$$

で置き換わる.

 $\delta M_\square$  は  $\varphi_\square^2$  と  $\eta_\square=(1+\delta M_\square)^{-1/2}h_\square$  ,  $(h_\square\sim Q^+\varphi_1^2)$  を含むのでこれは再び質量項を生じない.

故に最終の形は下の右辺の形にまとまり,ポリマーの再和公式 [7] [63] で指数の上にまとめて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{Y_i \cap Y_j = \emptyset\}} \prod_{i=1}^n \rho(Y_i) = \exp\left[ \sum_{Y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{\bigcup_{i=1}^n Y_i = Y} \prod \rho(Y_i) \right]$$
(5.5.29)

が得られる. ここで  $\cup Y_i = Y$  は  $\{Y_i\}_{i=1}^n$  が連結集合 Y を構成するように取られる.

# 5.6 ブロックスピン変換による流れ

さて前の分析は細かい計算を省いたにも関わらず複雑な計算であったが,これは繰り返して実行できるのであろうか?現段階では幾つかの項の評価が残っている.少し詰めが甘いことを承知で以下の仮定を置けば,この漸化式は解くことができる.

- 1.  $\mathcal{F}_n=\frac{1}{4}\langle J_n,f_nJ_n\rangle$  から生ずる  $(N\beta)^{-1}\langle\partial_\mu\varphi,(\varphi\otimes\varphi)\partial_\mu\varphi\rangle$  は無視出来るとする. すなわち  $\varphi$  と  $\partial\varphi$  の内積は小さいとする. 我々の仮定が正しければ,  $O(N^\varepsilon/\beta)$  の大きさである. Wick 定数は  $\phi_n$  の波動関数繰り込みに使われ,  $G_n^{-1}$  内の  $m_n^2$  に影響はない.
- 2. 引き算された行列式  $\det{}_3(1+K_n)$  ,  $K_n=2i\mathcal{T}_n\Psi_n/\sqrt{N}$  は小さくて , マージナルと見なす .  $(\Psi_n=\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n)$
- 3. 小さくマージナルな  $\delta W$  などを無視できる .
- 4. 摂動計算を壊す大場配位は無視できる.

この最初の仮定が極めて本質的で,かつ難しい評価に連動していることが理解されよう.この近似繰りこみ群の流れをみるため,以下の量を定義する.

$$\mathcal{A}_n = A_1 \cdots A_n, \quad \mathcal{G}_n = \mathcal{A}_n G_n \mathcal{A}_n^+, \quad \mathcal{T}_n = \mathcal{A}_n Q \Gamma_n Q^+ \mathcal{A}_n^+.$$
 (5.6.1)

かくして上記の仮定(マージナル項と大場配位の無視)の下では,場も揺動場も小さな配位空間  $\mathcal K$  の上で,以下の漸化式が成り立つことが分かる:

$$W_n(\phi_n, \psi_n) = \frac{1}{2} \langle \phi_n, G_n^{-1} \phi_n \rangle + \langle \psi_n, H_n^{-1} \psi_n \rangle - i \langle J_n, \tilde{\mathcal{A}}_n \psi_n \rangle.$$
 (5.6.2)

ここで

$$J_{n}(\phi_{n}) = J_{n-1}(A_{n}\phi_{n}) - \sqrt{N}\mathcal{T}_{n-1} = \sqrt{N}(\beta - \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{T}_{i} - \frac{1}{N}\varphi_{n}^{2}),$$

$$(5.6.3a)$$

$$M_{n-1} = \mathcal{T}_{n-1}^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_{n-1} \circ \mathcal{G}_{n} = \mathcal{G}_{n-1}^{\circ 2} - \mathcal{G}_{n}^{\circ 2},$$

$$\tilde{H}_{n-1}^{-1} = H_{n-1}^{-1} + \tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^{+} M_{n-1} \tilde{\mathcal{A}}_{n-1},$$

$$H_{n} = C'\tilde{H}_{n-1}(C')^{+} = C'\left\{H_{n-1}^{-1} + \tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^{+} M_{n-1} \tilde{\mathcal{A}}_{n-1}\right\}^{-1}(C')^{+},$$

$$\tilde{A}_{n} = \tilde{H}_{n-1}(C')^{+} H_{n}^{-1},$$

$$(5.6.3c)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n} = \tilde{A}_{1} \cdots \tilde{A}_{n}.$$

$$(5.6.3d)$$

5.6 ブロックスピン変換による流れ 125

ただし  $H_0^{-1}=0,\,G_0=(-\Delta+m^2)^{-1}$  であり以下の記号が導入された:

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{A}_n G_n \mathcal{A}_n^+, \tag{5.6.4a}$$

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{A}_n Q \Gamma_n Q^+ \mathcal{A}_n^+, \tag{5.6.4b}$$

$$G_n = A_{n+1}G_{n+1}A_{n+1}^+ + Q\Gamma_n Q^+, (5.6.4c)$$

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{A}_{n+1} G_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}^+ + \mathcal{A}_n Q \Gamma_n Q^+ \mathcal{A}_n^+, \tag{5.6.4d}$$

$$A_n = G_0(C^+)^n G_n^{-1}, (5.6.4e)$$

$$\mathcal{G}_n(x,y) = [G_0(C^+)^n G_n^{-1} C^n G_0](x,y). \tag{5.6.4f}$$

注意  ${\bf 5.6.1}$  この繰りこみ群の流れは、2 次元における O(N) 対称スピンモデル  $(N\gg3)$  における相転移の不存在を示している.実際  $\psi_n$  による積分は 2 重井戸型ポテンシャル  $\exp[-\sum J_n(\phi(x))^2]$  を生じ、その底は  $\beta_n=\beta-\sum_{i=0}^n T_i$  にある.これは第 1 章でみた階層モデルと全く同じ流れである.

注意 5.6.2 これは美しいが,実をいうと「単純すぎる計算」あるいは,simple-minded な計算である.これは

$$\exp\left[-\frac{1}{2} < \phi, G_1^{-1}\phi > - < \psi, G^{\circ 2}\psi > + \frac{i}{\sqrt{N}} <: J_1:, \psi > \right]$$
 (5.6.5)

という系をみているのに等しい,というのは  $G_0^{\circ 2}=\sum (\mathcal{G}_n^{\circ 2}-\mathcal{G}_{n+1}^{\circ 2})$  つまりこの近似は  $\det{(1+K_n)}$  と  $G_1^{-1}$  中の  $\varphi\otimes\varphi/N\beta$  を無視している近似である.

上記の「注意」であるが,無視した項が小さいと想定できれば(証明できれば),これらの漸化式は正当化され比較的簡単にとける.すなわち二組の独立した漸化式に分けられる.

最初のものは単に実効温度  $\beta_n^{-1}$  の流れを示し、もう一つは  $\psi$  場の共変  $H_n$  の流れを述べている。  $G_0^{\circ 2}=\sum (\mathcal{G}_{n+1}^{\circ 2})$  なので、これらの漸化式は  $[G_0^{\circ 2}]^{-1}$  が削り取られて、巨視的な距離で、O(1) の質量をもつ流れをつくる。 両者ともあらわに解ける。 実際  $J_n$  と  $G_n$  に対する漸化式は閉じていて、 $\beta=G_0(x,x)$  である。 ゆえに  $J_n$  はあらわに得られる:

$$J_n(x) = \sqrt{N} \left[ \mathcal{G}_n(x, x) - \frac{\varphi_n^2(x)}{N} \right] = -\frac{1}{\sqrt{N}} : \varphi_n^2(x) :_{G_n}$$
 (5.6.6)

また  $|x|< m^{-1}$  では  $G_0(x)\sim \beta-(2\pi)^{-1}\log(1+|x|), \ |x|> m^{-1}$   $(c_1={\rm const.})$  では  $G_0(x)\sim c_1\exp[-m|x|]$  なので

$$G_n(x,x) \sim \beta_n \equiv \begin{cases} \beta - n(2\pi)^{-1} \log L, & \text{if } L^n m << 1 \\ L^{-2n} m^{-2}, & \text{if } L^n m > 1 \end{cases}$$
 (5.6.7)

我々はこの量を場 $\,arphi_n^2/N\,\sim\phi_n^2/N\,$ の平均と見なせるだろうから,これはモデルの近似的繰りこみ群の流れである.

最後に $\tilde{\mathcal{A}}_n$ に対する漸化式であるが,

$$\mathcal{A}_n(x,y) = (A_1 \cdots A_n)(x,y) \sim \delta_{\left[\frac{x}{L^n}\right],y},$$
  
$$\tilde{\mathcal{A}}_n(x,y) = (\tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_n)(x,y) \sim L^{-2n} \delta_{\left[\frac{x}{L^n}\right],y}$$

が得られる.ここで  $[x/L^n]\in\Lambda$  は  $x/L^n$  からの最近接点である.実際 (証明はここでは挙げない)

定理 **5.6.1**  $\beta_n > O(1)$  に対して

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(x,y) = \frac{1}{L^{2n}} \left( \delta_{\left[\frac{x}{L^n}\right],y} + \frac{L^2}{\beta_n} \delta \tilde{\mathcal{A}}_n(x,y) \right), \tag{5.6.8}$$

$$|\delta \tilde{\mathcal{A}}_n(x,y)| \le \text{const.} \exp[-c|\frac{x}{L^n} - y|]$$
 (5.6.9)

が成り立つ.ここで  $H_n$  は真に正値な, $\beta>0$  に一様に上下に有界な作用素であり,

$$|H_n(x,y)| < \text{const.} \exp[-c|x-y|]$$

$$(5.6.10)$$

が成り立つ (c は  $\beta$  によらない).

ゆえに

$$(\mathcal{A}_n^+ \tilde{\mathcal{A}}_n)(x, y) = \sum_{\zeta \in \Lambda} \mathcal{A}_n(\zeta, x) \tilde{\mathcal{A}}_n(\zeta, y) = \delta_{x, y} + O(\beta^{-1})$$
 (5.6.11)

であり, これから

$$(\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^+ \mathcal{T}_n \tilde{\mathcal{A}}_{n-1})(x,y) = (Q\Gamma_n Q^+)(x,y) + O(\beta^{-1}),$$
  

$$(\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^+ (\mathcal{T}_n \circ \mathcal{G}_n) \tilde{\mathcal{A}}_{n-1})(x,y) = (Q\Gamma_n Q^+)(x,y) G_n(x,y)$$
  

$$= \beta_n (Q\Gamma_n Q^+)(x,y)$$

が  $x,y\in\Lambda_{n-1}$  に対して成り立つ.  $Q\Gamma_nQ^+$  はブロック毎に定数の空間  $\{\psi_n([x/L]);x\in\Lambda_{n-1}\}$  の上では 0 なので,

$$H_n^{-1}(x,y) \sim \text{const.}\delta_{x,y},\tag{5.6.12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \langle : \varphi_n^2 :, \tilde{\mathcal{A}}_n \psi_n \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \langle : \phi_n^2 :, \psi_n \rangle. \tag{5.6.13}$$

が得られ、これは  $\psi_n$  での積分が、 $|:\varphi_n^2(x):|<\sqrt{N\beta_n}$  である  $\varphi_n$  の領域においては、2 重井戸型ポテンシャルを生ずることを意味している:

$$\mathcal{V}_n \sim N[\frac{1}{N}\phi_n^2(x) - \beta_n]^2 \sim \beta(|\phi_n(x)| - (N\beta_n)^{1/2})^2$$

これはすでに前節で研究した、Dyson-Wilson 型階層模型と同じ振る舞いである [38], [39]. ただちに結論として  $\mathcal{K}_n$  の上では

$$|:\phi_n^2(x):_{G_n}| \le N^{1/2+\varepsilon}$$
 (5.6.14)

が成立する.

5.6 ブロックスピン変換による流れ 127

# 第6章

# クォーク粒子幽閉:未解決問題を考 える

我々は21世紀にいるが、前世紀の難問が横たわっているのは確かである。繰りこみ群が唯一可能な方法であろうと思われているのにも関わらず、解けていない最大の問題として「クォーク粒子の幽閉」、あるいは英語で quark confinement と呪文のように唱えられる問題が上げられる [62] [79] . これらは現存の手法で解決できるか、正直にいって自信を持てない部分もある。前の章で述べた漸近的自由の起源がこの問題でどうなっているか、じつは分析不足ではあるが、これらについてここで少し立ち入った議論をする。

これらの問題に共通するのは,対象が極めて非線形な集合であって,結合定数に関係なく示されねばならないということで,既に述べた摂動的議論は最初から使えないということである.

## **6.1** クォーク粒子粒子の幽閉とは

この問題はあまりにも有名であり,現代素粒子論のシナリオの基礎になっている問題で,現在ある世代以上の物理学者または数理物理学者は一度は手を染めた問題であろう.クレイ研究所のミレニアム問題にもなっている.あまりにも困難な故に,若い人は火傷を恐れて最近は手をつけないようである.この問題について最近のお話は[13] をどうぞ.

25 年ほど前,私は他の同じ世代の人たちと同様に,この問題に情熱を注ぎ, いわゆる階層的な格子の上ではこのシステムが幽閉現象を示すことを示し,実際の系への応用を考えたことがあった.そのギャップは大変試行錯誤を重ねたが,とうとう私には分からなかった.現在も頭の一部を占めているので,現在の状況を紹介したい.

この問題は現在に至るも何を示したらいいか,どのように証明していいのか,曖昧な部分を含む問題である.ここでは伝統的に又は古典的に  ${
m K.Wilson}^{[79]}$  の格子ゲージ理論の立場で考えることにする.すなわち  $\Lambda\subset Z^d$  を単位格子空間,

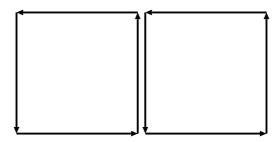


図 6.1 向きづけられた基本単位正方形、またはプラケット.

 $p=(x,x+e_\mu,x+e_\mu+e_
u,x+e_
u,x)$  をプラケットと呼ぶ方向付の 2 次元正方形 ,方向付単位線分  $b=(x,x+e_\mu),\cdots,(x+e_\mu,x)$  をボンドということにする。各ボンド  $b=(x,x+e_\mu)$  にはコンパクト群 G の元  $g_b$  またはその表現 $U(g_b)$  が対応しており

$$H_{\Lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{p \subset \Lambda} \operatorname{Re} U_p$$

$$U_p = \prod_{b \in \partial p} U(g_b)$$

として ( $g_b$  の積は  $\partial p$  の順にとる), Gibbs 測度を

$$\langle F(g) \rangle = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \int F(g) \exp[-\beta H_{\Lambda}] \prod_{b} dg_{b}$$

で定める.ここで  $dg_b$  は非可換コンパクト群 G の Haar 測度である.典型的には G=SU(N) である.模式図 6.1 を参考のこと.

 $\Sigma$  をサイズが  $L \times T$  の大きな長方形とし

$$U(\Sigma) = \operatorname{Tr} \prod_{b \subset \partial \Sigma} U(g_b)$$

とする. ただしこのボンドの積は,  $\Sigma$  の周  $\partial \Sigma$  の方向に沿って取られるとする. 期待値

$$< U(\Sigma) > = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \int U(\Sigma) \exp[-\beta H_{\Lambda}] \prod_{b} dg_{b}$$

は、Wilson によれば 非可換ゲージ場 の中の隔てられた 2 個のクォーク粒子の相互作用を示し、もしクォーク粒子が理論内に存在しても出現しない (クォーク粒子の幽閉) というシナリオの為には、

$$\langle U(\Sigma) \rangle \leq \exp[-\sigma T L], \quad \exists \sigma > 0$$

が成り立てばいいということが分かる.ここに  $\sigma>0$  はストリングテンション  $(string\ tension)$  と呼ばれ,二つのクォーク粒子が長い弾性のある紐で結ばれていると想定して,その紐の張力である.これは統計力学の相関関数の指数関

130 第6章 クォーク粒子幽閉:未解決問題を考える

数的減少と等しい現象である.

 $\exp[eta U(g_p)]$  をフーリエ展開 (特性関数展開) して

$$\exp[\beta U(g_p)] = \sum_d f_d \chi_d(g_p), \quad g_p = \prod_{b \in \partial p} g_b$$

が得られる. さらに特性関数の直交性、周期性を用いて

$$\int \chi_d(g_1 g) \chi_{d'}(g_2 g^{-1}) dg = c_d \delta_{d,d'} \chi_d(g_1 g_2)$$
$$\int \chi_d(g) dg = 0 \quad (d \neq 0)$$

なので、 $\beta>0$  が小さいときには、これから簡単な計算 (高温展開)で、任意の次元で  $\beta\geq0$  が小さければ、常に  $\sigma>0$  が成立することが示される.明らかなことだが、2 次元の場合には  $g_b$ 、 $b=(x,x+e_\mu)$  を含むプラケット p は相隣り合う 2 個しかないので、この積分は厳密に求まってしまう.この状況は 1 次元の古典的スピンモデルと全く同じである.プラケットを  $\partial\Sigma$  の内と外に分けて,其々境界の  $g_b$  を除いて積分し, $g_{\partial\Sigma}=\prod_{b\in\partial\Sigma}g_b$  と略記すれば(適当な境界条件を  $\partial\Lambda$  で考えて)

$$\langle U(\Sigma) \rangle = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \int (\operatorname{Tr} \prod_{b \in \partial \Sigma} U(g_{b})) \prod_{p \subset \Lambda} (\sum_{d} f_{d} \chi_{d}(g_{p})) \prod dg_{b}$$

$$= \frac{1}{Z_{\Lambda}} \int \chi_{d_{0}}(g_{\partial \Sigma}) (\sum_{d} (c_{d} f_{d})^{|\Sigma|} \chi_{d}(g_{\partial \Sigma})) (\sum_{d} (c_{d} f_{d})^{|\Lambda \setminus \Sigma|} \chi_{d}(g_{\partial \Sigma})) \prod dg_{b}.$$

ここで  $d_0$  は U(g) の従う表現であり、さらに自明な表現 d=0 に対応する  $c_0f_0$  が一番大きい.ゆえに  $Z=\sum_d (f_dc_d)^{|\Lambda|}$  に注意すると  $c_df_d/c_0f_0<1$   $(d\neq 0)$  なので

$$< U(\Sigma)) > \sim \left(\frac{f_{d_0}c_{d_0}}{f_0c_0}\right)^{TL}$$

すなわち  $\beta > 0$  に対して面積則が従う.

問題 6.1.1  $\Lambda \subset Z^2$  に適当な境界条件を仮定して、上記の議論を厳密にせよ.

問題  ${f 6.1.2}$  2 次元の長方形領域  $\Lambda\subset Z^2$  の境界  $\partial\Lambda$  での群  $\{g_b;b\in\partial\Lambda\}$  を固定すれば

$$f_{\Lambda} = \int \exp[\sum_{p \in \Lambda} \beta \operatorname{ReTr} U(g_p)] \prod_{b \in \Lambda^o} dg_b$$

は  $g_{\partial\Lambda}=\prod_{b\in\partial\Lambda}g_b$  の関数である.ただし  $\prod_{b\in\Lambda^o}$  は  $\Lambda$  の内側のみのボンドを示す.

# 6.2 繰りこみ群でどう扱うか

前の 2 次元 のケースは自明で,ブロックスピンも不要であったが,これは 4 6.2 繰りこみ群でどう扱うか 131 次元には拡張出来ずブロックスピン の導入にはR に値を取るボソン場と違って、ブロックスピンを取ると群の要素に入らない、という致命的困難がある.

これを逃げるための、一つのアイデアは T.Balaban によるもので、G の リー環の 基底  $\{\lambda_i\}$  を用い、

$$g_b = \exp[i\sum \lambda_k A_b^{(k)}]$$

として  $dg \to \prod dA^{(k)}$  とし、局所座標  $\{A^{(k)}\}$  の方でブロックスピン変換し、

$$A_b^{(k)} \to \frac{1}{L^2} \sum_{b'//b} A_{b'}^{(k)}$$

としてさらに指数関数写像でもとの G に直す処方である.これは局所座標(ゲージ場) $A_k$  で積分するので、伝統的処方であるが、 $A_k$  は局所的にしか選べないので処理と計算が大変そうで、食指が動かないのも確かである.これは実際 クォーク粒子幽閉の証明には機能しなかった.

5章最初で議論した、(コンパクト非線形性に由来する)ブロックスピンに対する確率論的上限評価が、このシステムでも期待されるが、まだ明確な形では確立されていないこと、格子ゲージ Laplacian の構造がこれまた研究不足であること等が、この問題が難しいことの原因であると思われる.

### 6.3 階層模型近似と実際の系

これらの状況から、A.Migdal が Dyson 型階層モデルに似た階層モデル (Migda-Kadanoff 型階層モデル) を提唱した [54]. ただこのアプローチでは、系が次元 D を半分にした D/2 次元のスピン系と同じ繰りこみ漸化式を満たすというのが最初の主張であって、前の章で述べた、漸近的自由の起源がこの問題でどうなっているか、分析不足であると思うので、その点は若しどなたかがこの問題を解こうとするときには問題になると思われる.

まず 2 次元の格子ゲージモデルは前の節で考えたように厳密に求まる. 4 次元の格子ゲージ模型の作用

$$\exp[\sum_{p\subset\Lambda}\beta_p\operatorname{Re}\operatorname{Tr} U(g_p)]$$

において,  $\beta_p$  は全て一様であるが, 場所毎に  $\beta_p$  を 0,  $\beta$ ,  $\infty$  に置換して, 2 次元格子の重ね合わせになるようにすることである .

具体的には以下のようにする.まずゲージ不変性を用いて, $b=(x,x+e_4)$  (時間軸方向ボンド)について, $g_b=1$  とおく. $x_1-x_2$  平面上の p では, $\beta_p=\beta$ ,他に 5 つある,他の平面上の p では  $\beta_p=0$  (相互作用が 0),又は  $\beta_p=\infty$  とする.この最後の  $\beta_p=\infty$  では p 内の相対するボンド b,b' で  $g_b=g_{b'}$  とすることに対応し,p に直交する プラケットのレプリカを作って掛けることに対

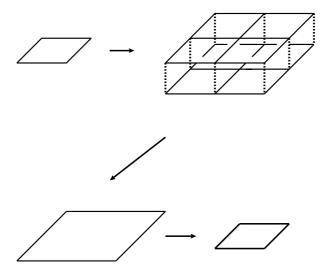


図 6.2 Migdal-Kadanoff 型階層格子, 縦方向の点線ボンドでは  $\beta = \infty$ . 真中の縦ボンドでは 0 で結合はない.

応する.これは一種の decimation (相互作用を消すこと)にあたる.

すなわち,  $\Lambda$  を, 中に単位プラケット p を  $L \times L$  個含む大きなブロックプラ ケットとすれば,

Migdal 型

$$f_n(g) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int \prod_{p \subset \Lambda} f_{n-1}(g_p) \prod_{b \in \Lambda^o} dg_b \right]^{L^{d-2}},$$

Kadanoff 型

$$f_n(g) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \left[ \prod_{p \subset \Lambda} f_{n-1}(g_p) \right]^{L^{d-2}} \prod_{b \in \Lambda^o} dg_b,$$

で次々漸化式を重ねていく. ここで  $\mathcal N$  は規格化定数で ,  $b\in\Lambda^o$  は  $\Lambda$  の内側 のボンドを示す.この二つは、積分する前に $L^2$ 乗するか、後でするかだけの違 いで主な結果は変わらない. ここで

$$f_0(g_p) = \exp[\beta \operatorname{ReTr} U(g_p)]$$

これは以下の模式図で理解されよう. この図では最初の単位プラケットが4つ 集まり ,内側の  $g_{xy}$  で積分され ,境界のボンド上の  $g_{xy}$  を同一視してくっつ けて (図では 2 枚), つまり掛け合わせて、次の単位プラケットと見なすもので, Kadanoff 型に対応している.

さて Haar 測度の左右の不変性から

Migdal 型

$$f_n(g) = R_M(f_{n-1})(g) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int \prod_{k=0}^{L^2 - 1} f_{n-1}(g_k g_{k+1}^{-1}) \prod_{k=1}^{L^2 - 1} dg_k \right]^{L^{d-2}}$$

Kadanoff 型

$$f_n(g) = R_K(f_{n-1})(g) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \left[ \prod_{k=0}^{L^2 - 1} f_{n-1} (g_k g_{k+1}^{-1})^{L^{d-2}} \right] \prod_{k=1}^{L^2 - 1} dg_k$$

と書けることに注意する . ただし 定数  $\mathcal N$  は  $f_n(1)=1$  と取ることとし ,  $g_1=g,$   $g_{L^2}=1$ . これは結合積なので,フーリエ係数の積で比較的簡単に表せ,2 次元スピン系との関連も明確である.

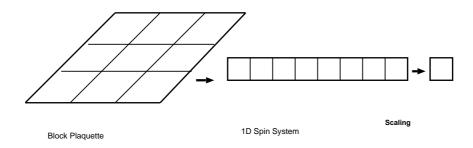


図 6.3 2 次元格子はスピンモデルの漸化式と同型

問題  ${\bf 6.3.1}$  G として、実数 R (アーベル群) をとり、dg=dx ととれば、上記の漸化式は

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int_R \cdots \int_R \prod_{i=0}^{L^2 - 1} f_{n-1}(x_i - x_{i+1}) \prod_{i=1}^{L^2} dx_i \right]^{L^{d-2}}$$

である.ここに  $x_0=x$ . d=4 ならば、全ての  $\beta>0$  に対して、 $\exp[-\beta x^2]$  は上記漸化式の固定点であることを示せ.  $d\neq 4$  の場合はどうか.

問題  ${\bf 6.3.2}$  g の関数 f(g) が類関数とは  $f(gh)=h(hg),\,f(g^{-1})=f(g)$  を満たすことである. 類関数 f(g) のフーリエ展開

$$f(g) = \sum c_d \chi_d(g)$$

において,  $c_d \geq 0$  のときこれを, 正型ということにする . f(g) が正型ならば  $f(g)^n$  もそうであることを示せ .

強結合領域に近い系では,群を座標近傍で展開して漸近的にガウス積分で近似できるので,D=4 が臨界次元であり,さらにコンパクト群になった場合には,系が高温領域,すなわち, $f_n\to 1$  になるであろうことは想像にかたくな

134 第6章 クォーク粒子幽閉:未解決問題を考える

い.これを示すには、 $g_{xy}\in G$  をその Lie 環を通じて解析接続し、そこからこの変換が一種の縮小写像であることを示すことによってなされる.

定義  $\mathbf{2}$  群 G 上の関数族  $\mathcal{F}$  を以下で定義する.

- (1)  $1 = f(1) \ge f(v) = f(v^{-1}) \ge 0$  , f(uv) = f(vu) (すなわち f は類 関数 )
- (2)  $\{\lambda_k\}_{k=1}^s$  ,  $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^t$  をそれぞれ ,  $N \times N$  型エルミート行列で  $\mathrm{Tr}\lambda_k=0$   $\mathrm{Tr}\tilde{\lambda}_k=0$  , 及び  $||\lambda_k||=||\tilde{\lambda}_k||=1$  を満たすとする .  $\sigma(z)=\exp[i\sum z_i\lambda_i]$  ,  $\tau(\omega)=\exp[i\sum \omega_i\tilde{\lambda}_i]$  としたときに ,  $f(\sigma(z)v\tau(\omega)\tilde{v})$  は  $D_\ell\equiv\{(z,\omega)\in C^{s+t}; |\mathrm{Im}\,z|<\ell, |\mathrm{Im}\,\omega|<\ell\}$  で解析的であり , そこで

$$|f(\sigma(z)v\tau(\omega)\tilde{v})| \le f(\sigma(\operatorname{Re} z)v\tau(\operatorname{Re} \omega)\tilde{v}) \exp\left[\beta C_N\left(\sum (\operatorname{Im} z_i)^2 + \sum (\operatorname{Im} \omega_i)^2\right)\right)\right]$$

が全ての  $v,u \in G$  に対して成立する.

(3) f(v) は特性関数展開の係数が全て正である.

まず 格子ゲージ理論での当初の  $f(v)=\exp[\beta \mathrm{ReTr}\,(v-1)]$  はこの族に入るのはあきらかで ,  $R(\mathcal{F})\subset\mathcal{F}$  も証明できる . 今までの議論で示されているように

問題 6.3.3 この操作によって、性質 (1), (2) は保存される. このことを示せ.

さて性質 (3) であるが , このことは類関数であることから出てくる. 簡単のため  $L^2=2$  として

$$f^{(n+1)}(\sigma(z)u\tau(\omega)v)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int f^{(n)}(\sigma(\frac{z}{2})u\tau(\frac{\omega}{2})\tilde{u}^{-1}) f^{(n)}(\sigma(\frac{z}{2})\tilde{u}\tau(\frac{\omega}{2})v) d\tilde{u} \right]^{2},$$

$$\mathcal{N} = \left[ \int f^{(n)}(\tilde{u})^{2} d\tilde{u} \right]^{2}.$$

が得られるが , 一般に複素パラメーター  $z_i,\,\omega_i$  が  $L^2$  等分されて ,  $f^{(n)}$  に配分されるのがポイントである . すなわち  $f^{(n)}$  はより広い,  $D_{2^n\ell}$  で解析的であって , 複素領域でのその値の上限も保存されることは明らかである.

このような広い空間で解析的な関数は Cauchy 積分表示から微分係数などに対して上限を評価できる.

定理 **6.3.1** (1) spec  $v = \{\exp[i\theta_k]\}_{k=1}^N$ ,  $\sum \theta_i = 0$ ,  $(\text{mod } 2\pi)$  のとき,

$$f^{(n)}(v) \le \exp[-\beta N/2 \sum [\theta_k]_{2\pi}^2]$$

(2)  $z_i = \phi_i \in R$ ,  $\omega_i = \theta_i \in R$ , とすれば

$$\left| \frac{1}{p!q!} \left| \frac{\partial^{|p|+|q|}}{\partial \phi^p \partial \omega^q} f(\sigma u \tau v) \right| \le \text{const.} [\beta C_N]^{(|p|+|q|)/2}$$

が, $u,v \in G$ , $\phi$ , $\omega$  に一様に成り立つ.

証明 (1)  $\sigma=1$  ,  $\tau(\omega)=\mathrm{diag}(e^{i\omega_1},\cdots,e^{i\omega_N})$  , ただし,  $\omega-N=-\sum_{i=1}^{N-1}\theta_i$  とおき, $|\mathrm{Im}\,\omega_i|<\varepsilon$  としておく.この場合  $C_N\leq N(1+O(\varepsilon^2))$  であって,これは全ての  $f^{(n)}$  が継承してもつ性質である. $|\theta_i|\leq\pi$  として 1 複素変数関数  $g(\zeta)$  を

$$g(\zeta) = f^{(n)}(\tau(\zeta\theta)) \exp\left[\frac{\beta N}{2}(1+\varepsilon)(\sum \theta_i^2)\zeta^2\right]$$

とけば, g(0) = 1 で,

$$|g(\zeta)| = g(\operatorname{Re}\zeta)f^{(n)}(\tau(\zeta\theta))\exp\left[-\frac{\beta N}{2}(\varepsilon - O(\varepsilon^2))(\sum_{i}\theta_i^2)(\operatorname{Im}\zeta)^2\right]$$

最大値の原理から  $g(1) = g(-1) \ge g(0) = 1$ .  $\varepsilon \to 0$  とすればよい.

(2) Cauchy の積分表示を  $f^{(n)}(\sigma(\phi+z)u\tau(\theta+\omega)v)$  に応用する. このとき  $|z_i|=|\omega|_j=[C_N\beta]^{-1/2}$  にとればよい .

この方法は,  $f^{(n)}$  を複素数まで広げて変化する割合をみればそこに実効温度  $\beta_{eff}^{-1}$  が表われて , これの変化をみようということである .  $v\in G$  の回りに微小変動を考える:

$$f^{(n+1)}(v\tau(\omega)) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int f^{(n)}(v\tau(\omega/2)u^{-1}) f^{(n)}(u\tau(\omega/2)) du \right]^2$$
$$\mathcal{N} = \left[ \int f^{(n)}(u)^2 du \right]^2.$$

そこで

$$\beta_v^{(n)}(a) = 2a^{-2} \log \left| \frac{f^{(n)}(v\tau(ia))}{f^{(n)}(v)} \right|$$

とすれば、この中に $\beta_{eff}$ が隠れていることは明らかであろう.明らかに

$$\beta_v^{(n)} \equiv \beta_v^{(n)}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} f^{(n)}(v\tau(\theta)) \Big|_{0}$$

であって,  $n > n_0$  であれば,  $v, v' \in G$ ,  $|a| < \varepsilon$  に一様に

$$|\beta_v^{(n)} - \beta_v^{(n)}(a)| \le \text{const.} a^2,$$
  
$$|\beta_v^{(n)} - \beta_{v'}^{(n)}| \le \text{const.} ||v - v'||$$

の成立が示される . 前の式で  $\omega=ia$  とし, 両辺の絶対値をとって

$$\begin{split} f^{(n+1)}(v) &(1 + \frac{1}{2}\beta_v^{(n+1)}a^2 + O(a^4)) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{N}} \left[ \int f^{(n)}(vu^{-1}) f^{(n)}(u) \\ & \times \left( 1 + \frac{1}{4}a^2(\beta^{(n)} - \Delta^{(n)}(v,u)) + O(a^4) \right) \right]^2 du \end{split}$$

が得られる.ここで

$$\beta^{(n)} \equiv \sup_{v} \beta_v^{(n)}, \quad \Delta_n(u, v) = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} (\beta_{u^{-1}v}^{(n)} + \beta_u^{(n)}) \ge 0$$

とした. $\beta^{(n+1)}=\beta^{(n+1)}_v$  となる  $v\in G$  をえらび,上の不等式から  $0\le ($ 右辺 - 左辺 $)/a^2$  を計算し, $a\to 0$  とすれば

$$\beta^{(n+1)} \le \beta^{(n)} - \frac{\int f^{(n)}(vu^{-1})f^{(n)}(u)\Delta(u,v)du}{\int f^{(n)}(vu^{-1})f^{(n)}(u)du}$$

が得られる.すなわち  $0\leq \beta^{(n+1)}\leq \beta^{(n)}$ .これから  $\lim \beta^{(n)}=0$  が示される. 十分に  $\beta^{(n_0)}$  が小さくなれば, $0\leq 1-f^{n_0}(v)\leq \exp[-L]$ , $L\ll 1$  としてよい.このときは漸化式から

$$0 \le 1 - f^{(n)}(v) \le \exp[-L'2^{n-n_0}]$$

が証明できる .  $2^n$  は Wilson loop の作る領域の面積なので , 面積則が言えたことになる .

問題 6.3.4  $0 \le 1 - f^{(n)}(u) \le \exp[-L], L \gg 1$  ならば漸化式から面積則が導かれることを示せ(これは格子ゲージ理論の高温展開に当たる。)

さてこの漸化式は比較的容易に解け,クォーク粒子幽閉(quark confinement)が示されたわけだが,この証明から明らかなように,G=U(1) のアーベル群でも幽閉が起こり,矛盾が生じてしまう.というのは,G=U(1) すなわち,格子近似された量子電気力学の場合ではある  $\beta$  で相転移が起こり,クォーク幽閉相から,光の質量が消えて長距離相関を示す相(Kosterlitz-Thouless 相)に転移することが厳密に示せる [29] [17] . すなわちこの近似では,可換群と非可換群の区別がつかないことになってしまう.

### **6.4** desperate physicists

この着想はあまりにもチャーミングなので,なんとか救済策を探そうと思うのは自然であるが,U(1) と SU(2) の区別がつかないのは致命的である.しかし数値的には収束する速度は違うので,もう少し努力すればこの違いが出せ何とか繕えるという人もいて,それを見てみよう.

格子の幽閉の問題では以下の量が面積則に従っていればよい .  $\Lambda \subset Z^4$  をサ

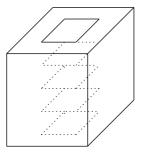


図 6.4 3 次元  $\Lambda$  内のボーテックス (渦) . 3 次元では 1 次元の柱状である .

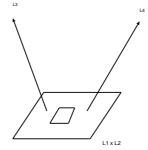


図 6.5 4 次元  $\Lambda$  内のボーテックス (渦) . 4 次元ではシート状である .

イズが $L_1 \times \cdots \times L_4$ の周期的境界条件を満たす箱型領域とし、

$$Z_{\Lambda} = \int \exp[\beta \sum_{p \subset \Lambda} \operatorname{Tr} U_p] \prod_{b \in \Lambda} dg_b$$

と置く. ここでは G=SU(2) を考えよう.さらに  $x_3-x_4$  方向に  $a\in\Lambda$  を通過するプラケットの集合

$$V_a = \{p = \{x, x + e_1, x + e_1 + e_2, x + e_2\};$$
  
$$x = a + me_3 + ne_4, m, n \in Z\}$$

を考える (周期的境界条件を仮定する . ) このように ,  $\Lambda$  の中でこれらのプラケットのみ , G のセンター  $C_G=\{1,-1\}$  の元  $-1\in C_G$  で変換しておく (センターというのは, G の全ての元と交換する G の元の集まりのことである .) :

$$Z_{\Lambda}^{(-)} = \int \exp[\beta \sum_{p \subset \Lambda \setminus V_a} \operatorname{Tr} U_p - \beta \sum_{p \subset V_a} \operatorname{Tr} U_p] \prod_{b \in \Lambda} dg_b.$$

すなわちサイズが  $L_1 \times L_2$  の中に, G の中心 -1 でゲージ変換され, 符号が -1 に変わった渦 (vortex) が置かれたことになる. ゲージ変換によって, この -1 は  $\Lambda$  の境界に移動出来ることに注意しよう. もし系が短距離相関しかなければ, すなわち, クォークの幽閉があればこの効果は急速に消滅する.実際以下はよく知られた古い結果である [35] [70] [64] (U(1) については [17],[29]):

定理 6.4.1 F を次式で定める.

$$F \equiv -\log \frac{Z_{\Lambda}^{(-)}}{Z_{\Lambda}}.$$

(1) G=U(1) または G=SU(2) とせよ.ある  $eta_c>0$  があって  $eta<eta_c$  ならば

$$\lim_{L_3L_4\to\infty} \frac{1}{L_3L_4} F \le \text{const exp}[-\sigma L_1 L_2]$$

が成り立つ (面積則).  $\sigma > 0$  は 't Hooft's string tension と呼ばれる.

(2) G=U(1) とせよ . ある  $\beta_0<\infty$  があって  $\beta>\beta_0$  ならば

$$\lim_{L_3L_4\to\infty}\frac{1}{L_3L_4}F\geq \operatorname{const}\frac{1}{L_1L_2}$$

が成り立つ(クオークの出現)

't Hooft の string tension は , Wilson のそれより等しいか小さいので  $^{[64]}$  , これで 幽閉が  $\beta<\beta_c$  で言えたことになっている . G=SU(N) で期待される 恒久的幽閉を示すには ,  $\beta_c\to\infty$  を立証しなければならない .

もしも何らかの方法で格子ゲージ系を, $\beta$  が小さな高温展開の使えるこの系まで変換できれば,証明できることになる.厳密な繰りこみ変換では,積分を部分に分けて実行し,短距離から長距離に運んでいくので,言うまでもなく

$$\frac{Z_{\Lambda}^{-}}{Z_{\Lambda}} = \frac{Z_{\Lambda}^{-,(1)}}{Z_{\Lambda}^{(1)}} = \frac{Z_{\Lambda}^{-,(2)}}{Z_{\Lambda}^{(2)}} \cdots$$
 (6.4.1)

であって、問題はこの同値性を保ちつつ高温領域  $(\beta \ll 1)$  に変換できるかということになる .

しかしながら  $\operatorname{Migdal-Kadanoff}$  型変換は近似以上の何者でもなく,この変換によって,もとから始まって,この比 (6.4.1) が増えるのか,減るのかすらわからず,上記の関係が成り立つことは一般には期待できない.

では如何なる解決法が可能なのであろうか? まず判ることは,- もし何とかなるとして -, 4 次元ではまったくだめなので,非自明な固定点(相転移に対応)のある  $4+\varepsilon$  で漸化式を考え, $\varepsilon\to 0$  での振る舞いに於ける U(1) と SU(2) の違いから証明できる可能性があるかも知れない.これは少し前 Tomboulis 氏が判りにくい論文  $^{[76]}$  で提唱したのであるが,論文は欠陥があって間違いだと思っている.

#### 6.4.1 Tomboulis 氏のシナリオ

ここで前のシナリオを Tomboulis 氏の記号と論法 [76] で再現してみる.

- 1.  $\Lambda\subset\mathbb{Z}^4$  を  $\mathbb{Z}^4$  内の大きさ  $L_1 imes\ldots imes L_4$ ,中心原点の長方形で  $L_i=ab^{n_i}$ ,ここで a,b は正整数 (>1) で  $n_i\gg 1$ , $i=1,\ldots,4$  とする.
- 2.  $\Lambda^{(k)}\subset\mathbb{Z}^4$  は  $\mathbb{Z}^4$  内の k 回の Migdal-Kadanoff 繰りこみ群で生じた辺の 長さ  $L_ib^{-k}$  の長方形  $(\Lambda=\Lambda^{(0)})$ . 周期的境界条件を仮定する .

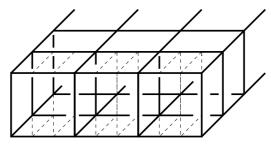


図 6.6 点線部のプラケットを右に3だけ移動 する decimation(作用の消去)

3.  $f(\{c_j\},U)=1+\sum_{j\neq 0}c_jd_j\chi_j(U)$  とおく.  $d_j$  は表現  $\chi_j$  の次元で正方向に向き付けられたプラケット p に対して  $U=U_p=\prod_{b\in\partial p}U_b,$   $U\in G=SU(2)$  .

以下の式から出発する:

$$\exp\left[\frac{\beta}{2}\chi_{1/2}(U)\right] = F_0(0)f(\{c_j\}, U), \tag{6.4.2a}$$

$$f(\lbrace c_j \rbrace, U) = 1 + \sum_{j \neq 0} c_j d_j \chi_j(U),$$
 (6.4.2b)

$$F_0(0) = \int \exp\left[\frac{\beta}{2}\chi_{1/2}(U)\right] dU. \tag{6.4.2c}$$

ここで dU は G=SU(2) の Haar 測度で、Migdal-Kadanoff 型の繰りこみ変換を適用する.ただし若干の調整因子をつけることになる.通常ならば

$$f^{(n-1)}(U) = f(\{c_j(n-1)\}, U)$$

$$= 1 + \sum_{j \neq 0} c_j(n-1)d_j\chi_j(U)$$

$$\to f^{(n)}(U) = f(\{c_j(n)\}, U)$$

ここで

$$f^{(n)}(U) = \frac{1}{F_0(n)} \int \left[\underbrace{f^{(n-1)}(UU_1)f^{(n-1)}(U_1^{-1}U_2)\cdots f^{(n-1)}(U_{b^2})}_{b^2}\right]^{b^2} \prod dU_k$$
(6.4.3a)

$$F_0(n) = \left( \int [f^{(n-1)}(U)]^{b^2} dU \right)^{b^2}$$
 (6.4.3b)

または、展開係数で記述すると

$$c_j(n) \equiv (\hat{c}_j(n))^{b^2} = \frac{F_j(n)}{F_0(n)}$$
 (6.4.4a)

$$F_j(n) = \left( \int [f^{(n-1)}(U)]^{b^2} \frac{\chi_j(U)}{d_j} dU \right)^{b^2}$$
 (6.4.4b)

140 第6章 クォーク粒子幽閉:未解決問題を考える

である.このとき文献[37]で述べ,前の節で解説したことは

定理 6.4.2 D < 4 ならば G = SU(N) あるいは G = U(N) のとき

$$j \neq 0$$
 に対して  $\lim_{n \to \infty} c_j(n) = 0.$ 

これらの漸化式は近似であって分配関数に対して上限を与える  $^{[76]}$  ( string tension に対して上限ではない ) . そこで Tomboulis 氏は二つのパラメータ  $\alpha\in(0,1]$  と t>0, および関数  $h(\alpha,t)=\exp[-(1-\alpha)\alpha^{-1}t]\in(0,1]$  を導入し、この変換が数値的に正しくなるよう決定しようと期待するわけである.すなわち

$$Z = \int dU_{\Lambda} \prod_{p \subset \Lambda} f(\{c_j\}, U_p)$$
 (6.4.5a)

$$= [F_0(1)^{h(\alpha,t)}]^{|\Lambda^{(1)}|} \int dU_{\Lambda^{(1)}} \prod_{p \in \Lambda^{(1)}} f(\{\tilde{c}_j(\alpha)\}, U_p)$$
 (6.4.5b)

$$= \tilde{Z}_1(\tilde{c}(\alpha), t). \tag{6.4.5c}$$

ここで  $dU_{\Lambda} = \prod_{b \in \Lambda} dU_b$ ,

$$\tilde{Z}_1(\tilde{c}(\alpha), t) = [F_0(1)^{h(\alpha, t)}]^{|\Lambda^{(1)}|} Z_1,$$
(6.4.6a)

$$Z_{1} = \int dU_{\Lambda^{(1)}} \prod_{p \subset \Lambda^{(1)}} f(\{\tilde{c}_{j}(\alpha)\}, U_{p}).$$
 (6.4.6b)

ここで  $U_p=\prod_{b\in\partial p}U_b$  は各辺 b にくっ付いている群  $U_b=U_{(x,x+e_\mu)}\in G$  の積からなるプラケットアクションであり,さらに

$$h(\alpha, t) = \exp[-t(1 - \alpha)/\alpha], \tag{6.4.7a}$$

$$\tilde{c}_j(\alpha) = \tilde{c}_j^{(1)}(\alpha) = \alpha c_j(1), \tag{6.4.7b}$$

$$c_j(1) = \frac{F_j(1)}{F_0(1)}.$$
 (6.4.7c)

ここで唐突に関数  $h(\alpha,t)$  が、特性関数展開の係数として導入されるがこの形は本質的ではない.  $\alpha\in[0,1]$  は t>0 の関数であって、後述するように、陰関数定理から求められると主張する. これが Tomboulis 氏のプランである.

残りの部分はボーテックス  $V=\{v\subset\Lambda\}^{[35],[70]}$  を導入し 't Hooft の string tension が正だということを示す.前述のように  $\{v=\{x_0+n_3e_3+n_4e_4,x_0+e_1+n_3e_3+n_4e_4,x_0+e_1+e_2+n_3e_3+n_4e_4\},n_i=0,1,\ldots,L_i,(i=3,4)\}$ 、であって、 $x_1-x_2$  平面内の  $p=(x_0,x_0+e_1,x_0+e_1+e_2,x_0+e_2)$  をこれと鉛直な方向(3,4 軸)に平行移動したものを集めたものである.そこで

$$Z^{(-)} = \int dU_{\Lambda} \prod_{p \subset \Lambda} f(\{c_j\}, (-1)^{\nu(p)} U_p), \tag{6.4.8}$$

6.4 desperate physicists 141

$$\nu(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \notin V \\ 1 & \text{if } p \in V \end{cases} , \tag{6.4.9}$$

とすれば

$$Z^{(-)} = \int dU_{\Lambda} \prod_{p \subset \Lambda \setminus V} (1 + \sum_{j \neq 0} c_j d_j \chi_j(U_p))$$

$$\times \prod_{q \subset V} (1 + \sum_{j \neq 0} (-1)^{2j} c_j d_j \chi_j(U_q))$$
(6.4.10)

である.ボーテクスシート  $V\subset \Lambda$  の位置は  $x_1-x_2$  面で自由に移動できる. まず  $\prod_p (1+\sum_{j\neq 0} c_j d_j \chi_j(U_p))$  の中の  $\chi_j(U)$  の係数は正であって

$$\prod_{p} (1 + \sum_{j \neq 0} c_j d_j \chi_j(U_p)) + \prod_{p} (1 + \sum_{j \neq 0} c_j d_j \chi_j((-1)^{\nu(p)} U_p))$$

は非負である.そこで氏の主張は

主張 **6.4.1** (1) ある  $t, t^+ > 0$  と関数  $\alpha, \alpha^+$  が存在し

$$\frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(\{c_j\})}{Z_{\Lambda}(\{c_j\})} = \frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(\{\tilde{c}_j^{(n)}(\alpha^+(t^+))\})}{Z_{\Lambda}^{(n)}(\{\tilde{c}_i^{(n)}(\alpha(t))\})}$$

が成立する.ここで

$$\tilde{c}_{j}^{(n)}(\alpha(t)) = \alpha(t)c_{j}(n).$$

(2)  $\{c_j(n)\}$  が十分小さくなる十分大きな n に対して  $t_* \geq 0$  (分母,分子共通)が存在し

$$\frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(\{c_j\})}{Z_{\Lambda}(\{c_j\})} = \frac{Z_{\Lambda^{(n)}}^{(-)}(\{\tilde{c}_j^{(n)}(\alpha(t_*))\})}{Z_{\Lambda^{(n)}}(\{\tilde{c}_i^{(n)}(\alpha(t_*))\})}$$

が成立する.

分母と分子は異なる分配関数なので、この補完関数にあたる  $\alpha(t)$  も  $\alpha^+(t)$  も 異なるし、t も  $t^+$  も異なるのが一般的なのに、同じに取れますよ、というのがこの主張の要点である.これは分母、分子異なる変換をしていても、最後に帳じりが合わせられるという都合のいい要求である.

万が一これが正しければ

$$\frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(\{c_j\})}{Z_{\Lambda}(\{c_j\})} = \frac{Z_{\Lambda^{(n)}}^{(-)}(\{\hat{c}_j^{(n)}(\alpha(t))\})}{Z_{\Lambda^{(n)}}(\{\hat{c}_i^{(n)}(\alpha(t))\})}$$

すなわち (6.4.1) が確立されたことになって、定理 6.4.1 から言って、目出度し目出度しである.しかしこの議論は群の可換、非可換性を区別しないので明らかな間違いである.

#### 6.4.2 間違いは直せるか

氏の証明  $[^{76}]$  は果たして、どうしようもない間違いなのか、あるいは真理に肉薄していて、いくらかの変更で証明が直せるのか考えてみよう.上の主張から分かるように、この補完関数  $\alpha$  と値  $t^+,t,t_*$  の存在が全てである.

まず分母自体は正値性によって  $Z=Z_\Lambda$  は Migdal-Kadanoff 変換で増加するので、2 つの補完パラメータ  $\alpha$  と t が導入できて両辺が一致するように出来る.これは Z は  $\alpha$  について単調増加, $[F_0(n)]^{h(\alpha,t)}$  は t について単調減少なので可能である.同様に

$$Z^{+} = \frac{1}{2}(Z + Z^{(-)})$$

は特性関数展開の係数が正なので,  $\alpha^+(t)$  についても同じ論法で  $\alpha^+$  と t の存在が言える .

すなわち 関数  $\alpha(t)$  と  $\alpha^+(t)$  で

$$Z_{\Lambda}(\{c_j\}) = [F_0(1)]^{h(\alpha(t),t)|\Lambda^{(1)}|} Z_{\Lambda^{(1)}}(\{\tilde{c}_j(\alpha(t))\}), \tag{6.4.11a}$$

$$Z_{\Lambda}^{+}(\{c_{j}\}) = [F_{0}(1)]^{h(\alpha^{+}(t),t)|\Lambda^{(1)}|} Z_{\Lambda^{(1)}}^{+}(\{\tilde{c}_{j}(\alpha^{+}(t))\})$$
(6.4.11b)

となる.ただしこれでは不十分であって、幽閉を結論するには  $Z_{\Lambda^{(1)}}$  と  $Z_{\Lambda^{(1)}}^+$  の前の定数項が一致し、かつ  $\tilde{c}_j(\alpha)$  と  $\tilde{c}_j(\alpha^+)$  が一致しないと正しい相関関数の定義にならず具合いが悪い.そこで [76] の一番の問題の主張は、 $t_*>0$  があって、

$$\alpha(t_*) = \alpha^+(t_*) \tag{6.4.12}$$

が成り立つということである.これが成立すれば

$$\frac{Z_{\Lambda}^{+}(\{c_{j}\})}{Z_{\Lambda}(\{c_{j}\})} = \frac{Z_{\Lambda^{(1)}}^{+}(\{\tilde{c}_{j}\})}{Z_{\Lambda^{(1)}}(\{\tilde{c}_{j}\})}$$
(6.4.13)

が成り立つということになる. ただし

$$\tilde{c}_i = \tilde{c}_i(\alpha(t_*)).$$

これを繰り返して高温領域に運ばれて面積則がえられる寸法である.したがって主張 (6.4.12) が全てである.

このままでは漸化式は系を高温相に運び,SU(N) も U(1) も区別されないので,次元を  $4+\varepsilon$ ,  $\varepsilon>0$  にしている.すなわち  $c_j(n)=\hat{c}_j(n)^{b^2r}$  ともう一つのパラメータ 0< r<1 を数値調整のために導入してくる. $b^2$  を  $b^2r$  に変えるのは接合積(6.4.3a)の数を  $b^2$  から  $b^2r$  に減らすことなので前節の説明からわかるよう(論文ではそう書いていないにもかかわらず),実質的に次元を上げていることに対応している.実際に数値計算でもチェックできて  $^{[43]}$  ( $^{[45]}$ , 図 6.7 のようになる.この群は SU(2) であり,D=4,r=0.9 で 本来起こり得ない相転移が r の導入で  $\beta=4.79$  と  $\beta=4.80$  の間で起っていることが示さ

れる.すなわち  $\beta=4.8$  では特性関数展開の係数が全て 1 になってしまって,  $\delta$  関数に収束し,他方  $\beta=4.75$  では, $f^{(n)}$  は 1 に収束し高温相に移行していることが見て取れる.

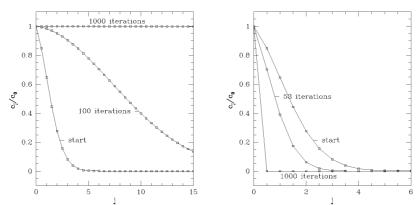


図 6.7  $c_j/c_0$  の変化: r=0.9.  $\beta=4.80$  (左),  $\beta=4.79$  (右) (線は見やすいよう挿入).

相転移の起っているケースの,この漸化式の分析はされなかったが,多分それほど難しくないと思われる.

問題 **6.4.1** D>4 で  $\beta$  が十分に大ならば , Migdal-Kadanoff 繰りこみ漸化式に相転移点が現れることを示せ .

さて,もし彼の論文をチェックし直せるかもしれないと考える人のため,彼の論証を正誤を考慮せず書き下ろしてみると [43]~[45],以下のようである:

- 1.  $h(\alpha,t)=\exp[-t(1-\alpha)/\alpha]$  内のパラメータ  $\alpha$  は  $\delta'<\alpha<1-\delta$  を満たすとする((!) これは最初の危険な仮定で,d=4 で  $\beta$  が大きいと,Migdal-Kadanoff 漸化式の正確さから  $\alpha$  は 1 に収束すると思われる.ゆえに  $1-\varepsilon< r<1$  を入れて形式的に次元を上げることになる.これは又別の難題を引き起こすが,今これを認めるとする.)
- 2. このとき,  $1-\alpha>\delta'$ , etc なので,  $h(\alpha,t)$  の形から

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,r) > \eta_1(\delta) > 0, \ \frac{\partial}{\partial t}\alpha^+(t,r) > \eta_1^+(\delta) > 0$$

が成立する。

3. このとき

$$\left|\alpha_{\Lambda,h}^+(t,r) - \alpha_{\Lambda,h}(t,r)\right| \le O\left(\frac{1}{|\Lambda_1|}\right).$$

4. 与えられた  $t_1^+$  に対して,  $ilde{Z}_{\Lambda,h}(eta,lpha_{\Lambda,h}(t_1),t_1)$  内の  $t_1$  を

$$h(\alpha_{\Lambda,h}(t_1), t_1) = h(\alpha_{\Lambda,h}^+(t_1^+), t_1^+)$$

が成立するように選ぶ、そしてこれを,  $t_2$ , · · · と続ける ((!) これは二つ目の危険な仮定で, この存在は完全に非自明である。)

この論文の第一の弱点は  $1-\delta>\alpha$  と  $1-\alpha$  が一様に下から非零な定数  $\delta$  で抑えられると仮定しなければ、全ての評価が消えること、それを避けるために実効次元 D を 4 から  $4+\varepsilon$  にあげたことにある。このとき漸化式の収束は不明になる.  ${
m Migdal-Kadanoff}$  の漸化式から,実効次元は

$$D = 4 \rightarrow 4 + \varepsilon \equiv 4 - \frac{2\log r}{2\log b + \log r} > 4, \quad 0 < r < 1$$

になっていることが分かる。第二の弱点はパラメータ t と  $t^+$  を一致させるプロセスにある。 $\alpha=1$  では  $h(\alpha,t)$  は t 依存が消えるので, $1-\delta>\alpha$  は常に必要な仮定となる。

いま百歩譲って Migdal-Kadanoff 漸化式によって高温領域に、すなわち  $n>n_0$  で  $c_i^U(n)$  は十分小さくなったとする .

$$\Phi_{\Lambda^n}^+(\alpha) \equiv \frac{1}{\ln F_0^U(n)} \frac{1}{|\Lambda^{(n)}|} \ln Z_{\Lambda^n}^+(\{\tilde{c}_j(n,\alpha)\})$$

として

$$\Psi(\lambda, t) \equiv h(\alpha(t), t) + (1 - \lambda)\Phi_{\Lambda^n}^+(\alpha_h^+(t_I)) + \lambda\Phi_{\Lambda^n}^+(\alpha_h(t))$$
$$-\Phi_{\Lambda^{n-1}}^+(\alpha_h(t))$$

を定義し,方程式

$$\Psi(\lambda, t) = 0$$

を考える.ここで  $t_I$  はある初期値で, $\lambda=0$  の解は  $t=t_0$  で求まり,ここから陰関数定理で  $\lambda=1$  まで接続でき, $t(\lambda=1)$  すなわち要求するものが求まるとの主張であった.じつはこれが最後の弱点でこれは成立しない.

実際

$$\log Z^{+}(\{c_{j}\}) = \log \left[ F_{0}(1)^{h(\alpha^{+}(t),t)|\Lambda^{(1)}|} Z_{1}^{+}(\{\tilde{c}(\alpha^{+}(t))\}) \right]$$
$$= \log \left[ F_{0}(1)^{h(\alpha^{+}(t_{I}),t)|\Lambda^{(1)}|} Z_{1}^{+}(\{\tilde{c}(\alpha^{+}(t_{I}))\}) \right]$$

なので (tを変えても右辺は変らないのは  $\alpha^+$  の定義),

$$\Psi(\lambda = 0, t) = h(\alpha(t), t) - h(\alpha^{+}(t_{I}), t_{I})$$

$$\Psi(\lambda = 1, t) = \frac{1}{\log F_{0}(1)|\Lambda^{(1)}|}$$

$$\times \left(\log \left[F_{0}(1)^{h(\alpha(t), t)|\Lambda^{(1)}|} Z_{1}^{+}(\{\tilde{c}_{j}(\alpha(t))\})\right] - \log Z^{+}(\{c_{j}\})\right)$$
(6.4.14b)

ここで  $\Psi(\lambda=0,t)=0$  の解が  $t=t_0$  だとし、これを関数  $t(\lambda)$  ととらえ、t(1)

までつなげたい. すなわち,  $\Psi$  を  $\lambda$  で偏微分して  $t'(\lambda)$  を求め, これから

$$t(\lambda) = \phi(t)(\lambda) \equiv t_0 + \int_0^{\lambda} F(s, t(s)) ds$$
 (6.4.15)

$$F(s,t(s)) = -\frac{\Psi_s(s,t(s))}{\Psi_t(s,t(s))}$$
(6.4.16)

が得られる.ここで

$$\Psi_t(\lambda, t) = \left[1 - \frac{h_\alpha(\alpha, t) + \lambda A^+(\alpha)}{h_\alpha(\alpha, t) + A(\alpha)}\right] h_t(\alpha, t)$$
 (6.4.17a)

$$\Psi_{\lambda}(\lambda, t) = \frac{1}{|\Lambda^{(1)}| \log F_0(1)} \times (\log Z_1^+(\{\tilde{c}_i(\alpha(t))\}) - \log Z^+(\{\tilde{c}_i(\alpha^+(t)\})) \quad (6.4.17b)$$

で

$$A_{\Lambda^{(m)}}(\alpha, r) = \frac{1}{|\Lambda^{(m)}| \log F_0^U(m)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log Z_{\Lambda^{(m)}} \left( \left\{ \tilde{c}_j(m, \alpha, r) \right\} \right) > 0$$

さらに

$$h_t(\alpha, t) = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} h(\alpha, t), \quad h_\alpha(\alpha, t) = \frac{t}{\alpha^2} h(\alpha, t)$$
 (6.4.18)

である.積分方程式  $t(\lambda)=\phi(t)(\lambda)$  は繰り返しによって解析的に求められるが , F(s,t) はそこで若干の条件を満たさないといけない .

[76] で指摘されているように、 $\{c_j\geq 0\}$  が小さければ、高温展開が収束し $A\geq A^+$  である.しかし  $\Psi_t(\lambda,t)\neq 0$  は一般に  $t(\lambda)$  が全ての  $\lambda$  で存在することを保証しない.以下の反例は金澤氏 [69] による.

$$\Psi(\lambda, t) = e^{-t} - 1 + 2\lambda.$$

つまり文献 [76] の主張を正当化するには写像  $\phi$  の縮小性が必要で,これは全く自明ではな $\Omega$  .

#### 6.4.3 解決策?

以上の分析から、最低二つの弱点がある。すなわち近似繰りこみ群の為に、繰りこむ前と後の期待値の同値性が保証されないため、 $h(\alpha,t)$  なる関数を導入し分配関数 Z の値が保たれるよう、パラメータ t を動かす。しかしこれを可能にするため、系の次元を"隠れて"上げてしまう。これは漸化式の性質をこわしてしまう。これが第一の不安点。

第二の不安点は異なる系に同じ操作を行うと、異なる t, t' になってしまうので、同じく取れることを陰関数定理で証明しようとするが、その収束域は評価しがたいということである.

しかし Migdal-Kadanoff 近似繰りこみ群においては U(N) と SU(N) の展開係数  $\{c_j(n)\}_{j=1/2}^\infty$  の 0 への収束のスピードが明確に異なり、その差異をか

146 第6章 クォーク粒子幽閉:未解決問題を考える

なり反映する。それゆえ、上の弱点が解決できるのではないかと一時期大変期待していたが、これは難問を言い換えたにすぎないという失望感が強くなり、この方向の研究は迷路に入ってしまったように思われる。

### 6.5 何が問題なのか

この近似繰りこみ群を用いた失敗はどこにあるのだろうか、今の場合では近似した系を現実の系に結びつけるのに、分母と分子を別個に処理する必要性に迫られたことにある。これでは二つの違った系を処理して、最終的にすりあわせを図ったことになってしまう、イジング模型などでは、相関不等式があって分母、分子同時に変換して議論が継続できるが、今の場合有効な相関不等式が無いのが悔やまれる。

これは近似的な繰りこみ群は,実際の系との関連付けが難しいという教訓を与える.しかしなぜ Migdal-Kadanoff 型近似繰りこみ群がそれほど悪くない近似を与えるのかという質問は,未だ明確には答えられていない.

さてこの問題は大変多くの物理学者の興味を引き付けながら、いまだに解決を見ない問題である.その原因は漸近的自由の正体が未だよく見えていないのとそれを繰りこみ変換の中にとり入れるのに失敗していること、非線形の故に、この繰りこみ変換群が複雑を極めるという点である.例えば[62] にはフランスグループの苦行に近い経験が記述されている.

最終的には、この理論の相関関数 (Wightman 関数、又は Schwinger 関数といわれるもの) を得るのが目的だが、これは非可換ゲージ場の場合には Gribov ambiguity と言われるゲージ選択の問題が生じてくるので、格子ゲージではこれが見えないのでいいのかも知れない。ゲージ不変な対象に限ればこの問題は無いのだと思われる。

この問題は二つあって、紫外発散の問題と赤外発散の問題であるが前者は、漸近的自由によってカバーされるはずである。すなわち繰りこみで非自明な理論に到達する。実際に有限体積でのこれらの理論は(分配関数が存在するとか言う形で)抽象的に保障されている。しかし熱力学極限(体積を無限にすること)には、幽閉の問題があらわに利いてくる部分であって未だなされていない。後者は全ての結合定数で相転移が無いことで保障されるだろう。

私自身は否定的であるが,クオーク幽閉の証明はコロンブスの卵で「明日証明が出てきても驚かない」 $^{*1}$ 側面があるのか否か私には分からない.しかし連続極限取ることはより難しいだろうというのは否定し得ないと思われる.

<sup>\*1)</sup> 江口徹,米谷民明両氏の意見

# 第 7 章 おわりに

ここでは数理物理学で未解決の問題をあげ、議論してきた.そのため未解決の問題で煮えきらない議論があったのは、内心忸怩たるものがある.近いうちにこれらについて、新しい知見を議論する機会があることを祈っている.

このモノグラフでは漸近的自由性というのを大きな軸にしてきた.これは1980年代からの場の理論の大きな指針の一つである.

私が院生のころに,ノーベル賞を受賞された益川先生が助手でおられて,場の理論の講義を受けていたが,「 $\phi^4$ のグラフを足し上げ,Pade 近似を使うとローパ共鳴が出てくる」と言われたことを,時々思い出す.又量子電気力学の異常磁気能率の計算も 16 桁ほど合うということも,物理学をかじったことのある人なら周知のことである.これらの理論の非存在と,実験の(不思議な)整合性について,勿論説明は多々あるとしても落ち着いて考えてみてもいいかと自省することも多い.

カフカの警句を最初の章に入れた理由でもある\*1)

<sup>\*1 )</sup> この有名なアフォリズムは「ニヤッ」と笑ってやりすごし , 机に向かうのが正しい対処法です , 言うまでもありませんが .

# 参考文献

- [1] K. Aoki, Introduction to the non-perturbative renormalization group and its recent applications, Int. Jour. Mod. Phys., 14 1249-1326 (2003).
- [2] K.-I.Aoki, A.Horikoshi, M.Taniguchi and H.Terao: Non-perturbative Renormalization Group Approach to Dynamical Chiral Symmetry Breaking, Prog.Theor.Phys., 108, 571-590 (2002).
- [3] V.Bach, J.Fröhlich and I.M.Sigal, Renormalization Group Analysis of spectral Problems in Quantum Field Theory, Adv. in Math., 137, 205 (1998).
- [4] N.N.Bogolyubov and D.V.Chirkov, Introduction a la theorie quantitues des champs, (Dunod, Paris, 1960).
- [5] C. Borgs and E. Seiler, Lattice Yang-Mills theory at non-zero temperature and the confinement problem, Commun.Math.Phys. 91, 329 (1983).
- [6] P.M.Bleher and Y.G.Sinai, Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models, Commub.Math.Phys.,33, 23 (1973).
- [7] D.Brydges, A.Short Course on Cluster Expansion, Les Housch Summer School, Session XLIII (1984), ed by K.Osterwalder et al. (Elsevier Sci.Publ).
- [8] D.Brydges, J.Dimock and P.Mitter, unpublished note on  $S^N$  spin model (2010).
- [9] S.Caraccio, R.Edward and A.Sokal, Phys.Rev.Letters, 74, 2969 (1995); ibid. 75, 1891 (1996).
- [10] H.Chiba,  $C^1$  Approximation of vector fields based on the Renormalization group methods, SIAMj. on Appl.Dyn.Syst. 7, 895 (2008).
- [11] H.Chiba, Simplified RG equations for ODEs, J.Diff.Equ., bf 246, 1991 (2008).
- [12] F.J.Dyson, Existence of a phase transition in a one-dimensional Ising Ferromagnet, Commun.Math.Phys. **12**, 91 (1969).
- [13] 江口徹, ヤンーミルズ理論, ミレニアム賞問題, 数学セミナー増刊, 39-41 (2010, July).
- [14] L.Erdös, M.Salmhofer and H.T.Yau, Quantum diffusuin of the Random Schroedinger evolution in the scaling limit, arXiv:0502025, 7 Feb. 2005.
- [15] D.H.Friedan, Nonlinear Modelws in  $2+\varepsilon$  dimensions, Ann.Phys., 163, 318–419 (1985).
- [16] J. Fröhlich and T. Spencer, The Kosterlitz-Thouless Transition in 2D Abelian Spin Systems and the Coulomb Gas, Commun.Math.Phys. 81, 527 (1981).
- [17] J. Fröhlich and T. Spencer, Massless Phases and Symmetry Restorations in Abelian Gauge Theory and Spin System, Commun.Math.Phys. 83, 411 (1982).
- [18] J. Fröhlich and T. Spencer, Absence of Diffusiosin the Anderson Tight Binding Model for large Disorder or Low Energy, Commun.Math.Phys. 88, 151 (1983).

- [19] K. Gawedzki and A. Kupiainen, A Rigorous Block Spin Approach to Massless Lattice Theories, Commun.Math.Phys., 77, 31–64 (1980).
- [20] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Renormalization Group Study of a Critical Lattice Model, Commun.Math.Phys., 82, 407–433 (1981).
- [21] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Non-Gaussian fixed points of the block spin transformations. Hierarchical Approximation. Commun.Math.Phys., 89, 191–220 (1983)
- [22] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Non-Gaussian scaling limits. Hierarchical model approximation, Jour. Stat. Phys., 35, 267 (1983).
- [23] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Massless Lattice  $\phi_4^4$  Theory: A Non-perturbative Control of a Renormalizable Model, Commun.Math.Phys., **99**, 197 (1985); Phys. Rev. Letters, vol.54, 92 (1985).
- [24] K.Gawedzki, Lectures on conformal field theory, Quantum Fields and strings, (Princeton, 1996–7)
- [25] J.Glimm, A.Jaffe and T.Spencer, The Particle Structure of the Weakly coupled  $P(\phi)_2$  Model and Other Applications of Cluster Expansion, in : Constructive Quantum Field Theory, Lec. Notes in Phys., eds. V.Velo and A.S.Wightman, 25, (1973).
- [26] N.Goldstein, O.Martin, Y.Oono and F.Liu, Anomalous dimensions and the renormalization Group in a non-linear diffusion process, Phys. Rev.Lett., 64, 1361-1364 (1990).
- [27] A.Kupiainen and P.Muratore-Ginanneschi, Scaling, Renormalization and statistical conservation laws in the Kraichinan model of turbulent avection, ArXiv:nlin/060303v1, 14 March 2006.
- [28] E.F.Guild, and D.H.U. Marchetti, Renormalization Group flow of the two-dimensional hierarchical Coulomb Gas, Commun.Math.Phys., vol.219, 671-702 (2001).
- [29] A. Guth, Existence Proof of a non-confining phase in 4D U(1) lattice gauge theory, Phys. Rev. D21, 2291 (1980).
- [30] T.Hara, A Rigorous Control of Logarithmic Corrections in 4D  $\phi^4$  Spin Systems I,J.Stat.Phys., 47, 57 (1987); II, J.Stat.Phys., 47, 99(1987).
- [31] T.Hara and H.Tasaki, A Rigorous Control of Logarithmic Corrections in 4D  $\phi^4$  Spin Systems II, J.Stat.Phys., 47, 99 (1987).
- [32] T.Hara, T.Hattori and H. Watanabe, Triviality of Hierarchical Ising Model in Four Dimensions, Commun. Math. Phys., 220, 13-40 (2001).
- [33] 服部哲弥, ランダムウォークとくりこみ群, 共立出版, (2004 東京)
- [34] E.D'Hoker, String Theory, (Princeton, 1996–7)
- [35] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B138** (1978) 1; **B153**, 141 (1979).
- [36] K. Hosaka, Triviality of Hierarchical Models with Small Negative  $\phi^4$  Coupling in 4D, J. Stat. Phys. **122**, 237–253 (2006).
- [37] K. R. Ito, Permanent quark confinement in 4D hierarchical lattice gauge theories of Migdal-Kadanoff type, Phys.Rev.Letters 55, 558 (1985).

#### 152 参考文献

- [38] K. R. Ito, Origin of Asymptotic Freedom, Phys.Rev.Letters 58, 439 (1987).
- [39] K. R. Ito, Renormalization Group Flow of Two-Dimensional Hierarchical Heisenberg Models of Dyson-Wilson Type, Commun.Math.Phys., 137, 25 (1991)
- [40] K. R. Ito and H.Tamura, N-dependence of Upper Bounds of Critical Temperarture of 2D O(N) Spins, Commun.Math.Phys., 202,127 (1999)
- [41] K. R. Ito, Approximate Renormalization Group recursion formulas in 2D O(N) Spin Models, J.Stat.Phys., 107 821 (2002).
- [42] 伊東恵一, 数理物理学視点 (繰りこみ群) からみたペレルマン理論, 数理物理への誘い, 7 63 (2010) (遊星社, 東京)
- [43] K. R. Ito and E. Seiler, On the recent paper on quark confinement by Tomboulis, hep-th/0711.4930v1
- [44] K. R. Ito and E. Seiler, Further discussion of Tomboulis' approach to the confinement problem, hep-th/0803.3019v1
- [45] K. R. Ito and E. Seiler, Critical Discussion of Tomboukis's approach to the confinement probles, 8th Conf. Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Mainz (Sept., 2008), PoS (http://pos.sissa.it)
- [46] B.Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, arXiv:math:DG:0605667v2 21 Feb 2007
- [47] 小林亮一, 対数 Sobolev 不等式, エントロピー公式, Riemann 幾何的熱浴, 数学, 第 60 巻 3 号 pp.225-247 (2008 Sept.)
- [48] 小園英雄, ナヴィエーストークス方程式の今, ミレニアム賞問題, 数学セミナー増刊, pp.111-118 (2010, July)
- [49] T.Kunihiro, A geometrical formulation of the RG method for global analysis, Prog. Theor.Phys. 94, 503 (1995).
- [50] T.Kunihiro, The renormalization Group method applied to to asymptotic analysis of vector field, Prog.Theor.Phys., **97**, 179 (1997).
- [51] 国広悌次, 微分方程式の縮約と包絡線日本物理学会誌, **65**, No.9, 683 (2010).
- [52] Dong Li, On a non-linear Recuurent relation, arXiv:0902.0804v1, 4 Feb. 2009
- [53] R.A.Minlos, Introduction to Mathematical Statistical Physics, Univ. Lec. Ser. vol.19, (AMS, 2000)
- [54] A. A. Migdal, Recursion equations in gauge field theories, JETP 69, 810 (1975);
   L. Kadanoff, Notes on Migdal's recursion formulas, Ann. Phys. 100, 359 (1976).
- [55] 岡本久, オイラー方程式・ナヴィエ-ストークス方程式の背景, 数学セミナー vol. 49, No.2581, p.8 (ナヴィエーストークス方程式特集号, Feb. 2010), およびここに掲載の論文と引用文献
- [56] 大野克嗣, くりこみ, 現象論, そして漸近解析, 数理科学 35, 5021 (1997)
- [57] 大野克嗣, 非線形とくりこみ, 日本物理学会誌 52 (4), 13 (1997)
- [58] G.Perelman, The Entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/021159 v1, 11 Nov. 2002

- [59] G.Perelman, Ricci Flow with surgery on three-manifolds arXiv:math.DG/0303109 v1, 10 Mar. 2000
- [60] J.Polchinski, String Theory, vol. 1 (Cambridge, 1998), Chap.3.
- [61] 特集 Ricci flow, 数学セミナー, 2004 September.
- [62] V.Rivasseau, From Perturbative to Constructive Renormalization, Princeton Series in Phys., (1991, Princeton).
- [63] V.Rivasseau, Cluster Expansions with Small/Large Conditions, in: Mathematical Quantum Field Theory I, Field Theory and Many-Body Theory, eds. J.Feldman et al., CRM Proceedings & Lecture Notes vol.7 (1993,AMS).
- [64] E. Seiler, Lattice Gauge Theory as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics 159, (Springer Verlag, Heidelberg and New York 1982).
- [65] Y.Sinai and D.Li, Blow ups of complx solutions of the 3D Navier-Stokes systems, J.Eur.Math.Soc., 10(2), 267–313(2008).
- [66] T.Spencer and M.R.Zimbauer, Spontaneous Symmetry Breaking of a Hyperbolic  $\sigma$  model in 3 Dimensions, Comm.Math.Phys. **252**, 167–187(2004).
- [67] T.Spencer, M.Disertori and M.R.Zimbauer, Quasi-diffusion in a 3D Supersymmetric Hyperbolic Sigma Model, arXiv[math-ph]:0910.1652v1, 12 Jan 2009
- [68] A. Jaffe and E. Witten, Quantum Yang-Mills Theory, Clay Mathematics Institute, http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills\_Theory
- [69] T. Kanazawa, private communication to K.R. Ito.
- [70] G. Mack and V. B. Petkova, Sufficient condition for confinement of static quarks by a vortex condensation mechanism, Ann. of Physics 123 (1980) 117.
- [71] J.Milnor, モース理論, 吉岡出版 (1968)
- [72] C.Newman, Inequalities for Ising Models and Field Theories which Obey the Lee-Yang Theorem, Commun.Math. Phys., 41, 1 (1975)
- [73] B.Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues I, Non-degenerate Minima: Asymptotic Expansions, Ann. Inst. Henri Poincare, vol. XXXVIII, 295-307 (1983).
- [74] B.Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues II, Tunneling, Ann. Math. vol.120, 89-118 (1984).
- [75] B. Simon, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press (1979)
- [76] E. T. Tomboulis, Confinement for all values of the coupling in 4D SU(2) gauge theory, hep-th/0707.2179v1
- [77] F. Wegner and A. Houghton, Phys.Rev. A8 401 (1973).
- [78] K. Wilson and J.Kogut, Phys. Report 12 75 (1974).
- [79] K. Wilson, Confinement of quarks, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1975).
- [80] K.Wilson, 1982 年ノーベル賞講演, 邦訳, くりこみ群と臨界現象, 日本物理学会誌 第 39 号 No.2, pp.81-101 (1984).

#### 154 参考文献

[81] 柳沢卓、「シナイの論文の解説」、個人的ノート (2008); On the paper "Blows Ups of Complex Solutions of the 3D Navier-Stokes Systems and RG method" by Ya Sinai et al., 数理解析 研究所講究録 **1600**, 132-156 (2008).

### 索引

### ァ

イジングモデル, 1 インスタントン計算, 33 ウィナー測度, 33 ウエーブレット, 49 運動量空間, 5 永年項, 31 襟領域, 107 エルゴード性, 49 エルミート多項式, 58

### 力

階層的距離、15 階層模型,6 回廊領域, 107 確率微分方程式, 49 ガウス分布, 4 ガウス変数, 4 強磁性体,1 強磁性体相互作用,7 強磁性的,8 クォーク粒子の幽閉, 129, 130, 132 クォーク粒子幽閉, 137 クォーク粒子幽閉,91 クラスター展開, 100 繰りこみ群、2 繰りこみ群方程式,23 繰りこみ漸化式,22 繰りこみをする点, 31 クロックモデル, 29 高温展開, 2, 137 固定点, 55

# サ

差分, 2 石畳集合, 107 敷石集合, 107, 113 小場, 107, 108 小場配位, 107, 108, 119 小場領域, 113 小場領域, 107 実効的相互作用, 5 自発的質量生成, 91 スケール変換, 2, 3 ストリングテンション, 130 スピン, 1 摂動論, 33 漸化式, 52 漸近的自由, 23 漸近的自由の起源, 132 漸近的振る舞い, 32 相関関数, 1

### タ

短距離相関、4 短距離における漸近的自由、79 大場、107 大場配位、107 大場領域、107、113 大偏差理論、93 中心極限定理、93 長距離における漸近的自由、79 低エネルギー固有値、32 特性関数展開、131

### 八

汎関数積分, 1 場の理論, 2 非圧縮条件, 51 ヒエラルキカル模型, 6 非線形積分方程式, 51 非線型漸化式, 58 ブロックスピン変換, 2, 91 ブロックスピン変換作用素, 3 苞路線, 32 マ

ミレニアム問題, 50 面積則, 137



焼きいれ, 71 焼きなまし, 71 揺れ, 4 揺動場, 4

ラ

乱歩, 97 乱流解, 52

# 欧字

3 重臨界点, 29

annealed, 71 asymptotic free at long distances, 79 asymptotic free at short distances, 79 asymptotic freedom, 23

Bleher-Sinai 型議論, 21 Bleher-Sinai argument, 14 Bleher-Sinai 型議論, 14

Christoffel's symbol, 74 clock model, 29 cluster expansion, 100 collar region, 107 corridor region, 107

decimation, 2, 133

Dyson-Wilson 型階層模型, 7

Dyson 近似, 23

Dyson-Wilson 型階層模型, 127

Dyson 階層近似, 9 Dyson 型階層模型, 7

 $\begin{array}{l} {\rm ferromagnet}, \ 1 \\ {\rm ferromagnetic}, \ 93 \end{array}$ 

fluctuation, 4 fluctuation field, 4

hierarchical model, 6

intermittency, 49 irrelevant な頃, 21 Ising model, 1

Kosterlitz-Thouless transition, 93 Kosterlitz-Thouless 型転移, 47 Kosterlitz-Thouless 相, 137 Kosterlitz-Thouless 転移, 91, 93, 96 Kraichnan model, 32 Kraichnan 模型, 32, 49

large field problem, 10, 18 large field region, 113 large field 問題, 10 large field, 107 large field configuration, 107 large field region, 107 Lee-Yang 定理, 71 Leray 射影演算子, 51

marginal な項, 21 Migda-Kadanoff 型階層モデル, 132

Navier-Stokes 方程式, 49, 50, 60

paved set, 107, 113  $\phi^4$  模型, 1  $\phi_4^4$  模型の自明性, 14 Poisson 方程式, 3 polymer expansion, 100 Potts モデル, 29

quark confinement, 129, 137 quenched, 71

relevant な項, 21 Ricci Tensor, 74 self-avoiding walk, 97 small field configuration, 107, 108 small field region, 113 small field, 107, 108 small field region, 107 spontaneous mass generation, 96 string tension, 130

Trotter 積公式, 33

WHA 方程式, 34 Wiener 測度, 33 Wilson loop, 137