2012 年度微分積分学 A レジメとレポート解答
第 2,3 章　とレポート No.2

内容

1. 平均値の定理, テーラー展開
2. 級数の収束
3. 連続関数 etc.
4. 写像
5. 解答やヒント

1　平均値の定理, コーシー型の平均値の定理, テイラーの公式

定理 1 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とすれば, ある $\xi \in (a,b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a} = f'(\xi)$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a) = F(b) = 0$. これにいわゆるロルの定理「$F(x)$ が微分可能で, $F(a) = F(b)$ ならば, $a < \xi < b$ なる ξ があって $F'(\xi) = 0$ が成立する」を用いて $F'(\xi) = 0$. Q.E.D

定理 2 $f(x), g(x)$ はともに $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能, かつ $f'(x)$ と $g'(x)$ は同時に *0* にならないとすれば, ある $\xi \in (a,b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a) = F(b) = 0$. これにいわゆる　ロルの定理 $F'(\xi) = 0$ を用いる. Q.E.D

　ある関数を多項式で近似することは以下の例から見るように可能である. (ただし微分, 積分の操作と $\lim_{n\to\infty}$ が交換出来るとして (これは実は今の場合正しい))

$$
\begin{aligned}
e^x &= \lim(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\prod_{s=1}^{k-1}(1-\frac{s}{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\
\frac{1}{1-x} &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^k) \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= (\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k)' = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \\
\log(1-x) &= -\int\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^k)dx = -\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n
\end{aligned}
$$

これは以下のように平均値の定理の拡張として証明される.

定理 3 $f(x)$ は $I=(a,b)$ で n 回連続可能, $[a,b]$ で連続とする。任意の $a<x<b$ に対し、ある $a<\xi<x$ があって

$$
f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n
$$

となる。$R_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$ を *Langrange* の剰余項という。これは

$$
R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n
$$

とも書け, ロシュの剰余項という。ここで $\xi=a+\theta(x-a)$ とおいた。

証明 これにはいくつかの証明があるが代表的なものあげるが, このくらいは全て覚えるて頂きたい. それぞれに長所があるので.

(1) 平均値の定理の拡張

$$
\phi(t) = f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(x-t)^k + \frac{A}{n!}(x-t)^n\right]
$$

とおく。当然 $\phi(x)=0$. さらに A を

$$
A = \frac{n!}{(x-a)^n}\left\{f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right]\right\}
$$

と選んでおけば, $\phi(x)=\phi(a)=0$. よってある ξ で $\phi'(\xi)=0$. しかし直ぐわかるように,

$$
\phi'(t) = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}
$$

なので, $A=f^{(n-1)}(\xi)$. これは求めるもの。

(2) コーシーの平均値の繰り返し

$$
F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k, G(x) = (n!)^{-1}(x-a)^n
$$

とすると $F^{(k)}(a)=G^{(k)}(a)=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 故に

$$
\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = f^{(n)}(\xi_n)
$$

よって $F(x)=G(x)f^{(n)}(\xi_n)$, ($\xi=\xi_n$ とおく).

(3) 部分積分法の繰り返し

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x (x-t)'f'(t)dt = -[(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \\ &= (x-a)f'(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{2}(x-t)^2\right]' f''(t)dt \\ &= (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{3!}(x-t)^3\right]' f'''(t)dt \end{aligned}$$

この方法での n 次剰余項は

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

であり, 積分型剰余項 と呼ばれる。

定義 1 $x \to a$ のとき, $g_{i+1}(x) = o(g_i(x))$ であるとする. 関数 $f(x)$ の $\{g_0(x), g_1(x), \cdots\}$ による展開が $x = a$ で漸近展開であるとは、

$$f(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + o(g_n(x))$$

となること。

定理 4 関数 $f(x)$ が $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots\}$ による二つの漸近展開

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

をもてば, $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

定理 5 テーラー展開は $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots\}$ による漸近展開である。

以下の展開は大変使用頻度が高いのぜひ覚えておいてください。($\sin, \cos$ は其々奇関数, 遇関数なので剰余項をおのおの R_{2n+1}, R_{2n} になるようにすると $\cos(\xi) \sim 1$ を含み便利.)

問題 1.1 次の展開が成り立つ.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots + \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n)!} x^{2n} \\ \sin x &= x - x^3/6 + x^5/5! + \cdots + \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ e^x &= 1 + x + x^2/2 + \cdots + \frac{e^\xi}{n!} x^n \\ \log(1+x) &= x - x^2/2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\xi)^n} x^n, \\ (1+x)^p &= 1 + px + p(p-1)x^2/2 + \cdots + \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} (1+\xi)^{p-n} x^n \end{aligned}$$

2　級数とその収束

テイラー展開

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(x) - R_{n+1}(x)$$

において,

定理 6 もし $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(x)$$

以下級数 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ について論じよう.

定義 2 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする. $\lim s_n = s$ のとき無限級数 $\sum a_n$ は s に収束するといい

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

とあらわす.

以下の定理は明らかである.

定理 7 *(1)* $\sum a_n$ が収束する必要十分条件は

$$\lim_{p,q\to\infty} a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q = 0$$

が成り立つこと.
(2) $\sum a_n$ が収束する必要条件は　　$\lim a_n = 0$

定理 8 *(1)* $\sum |a_n|$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する.
(2) $a_n \geq b_n \geq 0$ とする. $\sum b_n$ が発散すれば $\sum a_n$ は発散し, $\sum a_n$ が収束すれば $\sum b_n$ は収束する.

定義 3 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束する級数を絶対収束級数という. $\sum a_n$ は収束するが $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が発散する級数を条件収束するという.

定理 9 条件収束級数は加える順番を変えて, 任意の数に収束させることができる.

問題 2.1 上の定理を証明せよ.

問題 2.2 次の級数は収束するか, 発散するか論ぜよ. また条件収束か否かも論じること.
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$　　*(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^p (n+1)}$, $p > 0$　　*(3)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n)$, ただし $f(x) > 0$ は単調減少で, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, ただし a_n は n 番目の素数　*($a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \cdots$)*

以下の問題は**黒田教科書 p.80 の 問 2.8.4, 2.8.5, 2.8.6** からである。解答は最後にある.

問題 2.3 (黒田 p.80, 2.8.4) 以下を示せ*:*

$$\frac{1}{N} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N-1}$$

問題 2.4 (黒田 p.80, 2.8.5) $a_n \geq 0,\ p \in \{1, 2, \cdots\}$. とする $\sum a_n$ が収束すれば, $\sum a_n^p$ も収束することを示せ. $p > 1$ ならば逆は成立しないことを示せ

問題 2.5 (黒田 p.80, 2.8.6) $a_n > 0$ とする。$\sum a_n$ の収束, 発散と以下の級数の収束, 発散の関連を調べよ.

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n} \qquad (2) \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$$

問題 2.6 $a_n > 0$ かつ $\sum a_n$ は発散するという. 以下の級数は発散する場合も, 収束する場合もある. それらの例を各々つくれ.

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n^2} \qquad (2) \sum \frac{a_n}{1+na_n} \qquad (2) \sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

問題 2.7 次のことを示せ.
(1) $a_n > 0,\ a_n$ は単調減少, で $\sum a_n$ が収束すれば, $\lim na_n = 0$
(2) $\sum na_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する.

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ において以下の何れかの極限 (左から 「ダランベールの判定法」, 「コーシーの判定法」) が存在するとせよ.

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad p_2 = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

もし両者とも存在すれば, $p_1 = p_2$ である. 存在するほうの値を p とすれば,

$$\rho = \frac{1}{p}$$

を収束半径という. これらの極限は存在するとは限らないが簡便な方法を与える. より一般には

$$p = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \equiv \lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k|^{1/k}; k > n\}$$

とし (「コーシー・アダマールの判定法」), $\rho = 1/p$ を収束半径という. 実数の公理系から $\limsup$ はいつも存在する (有界単調列の収束).

問題 2.8 (黒田教科書 p.82 問 2.7) $a_n > 0$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \liminf_{n\to\infty} a^{1/n} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

が成立する. これを示せ.

注意:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

なので以下が分かる
(1) $\lim a_{n+1}/a_n = \alpha$ ならば $\lim a_{n+1}^{1/n} = \alpha$
(2)$\lim a_{n+1}^{1/n} = \alpha$ でも $\lim a_{n+1}/a_n$ は存在しない場合がある（例が作れる)

問題 2.9 p_1, p_2, p が存在すれば全て等しいことを示せ

定理 10 $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は絶対収束し．$|x| > \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散する．さらに $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n n x^{n-1}$ も絶対収束する．

定理 11 ρ を収束半径とする．$|x| < \rho$ のとき

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum a_n n x^{n-1}$$

問題 2.10 上の２定理を証明せよ

問題 2.11 以下の級数の収束半径を求めよ．

$$(1) \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n \qquad (2) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \qquad (3) \sum \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) x^n$$

$$(4) \sum n! x^{n!} \qquad (5) \sum \log(n!) x^n \qquad (6) \sum (n!)^{a/n} x^n \quad (a > 0)$$

問題 2.12

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 + R_n, R_n = O(1/n)$$

を示し, 奇数分母を順に p 項づつ, 偶数分母を順に q 項づつ, 交互に順に加えた

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1}\right) - \cdots$$

の和を求めよ

問題 2.13 $a_n > 0$ は単調に減少し, 0 に収束するならば以下の級数は $0 < x < 2\pi$ で収束することを示せ.

$$(1) \sum a_n \cos nx \qquad (2) \sum a_n \sin nx$$

問題 2.14 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx + n}{n^2}$$

はすべての x で収束するがすべての x で絶対収束しないことを示せ.

3 連続関数, 一様連続性, 中間値の定理

定義 4 *(1)* 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(2) 関数 $f(x)$ が I で 連続とは $\forall x \in I$ において $f(x)$ が連続なこと。
$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$, $(\forall x' \in I)(|x - x'| < \delta \to |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

(3) 関数 $f(x)$ が $I = [a, b]$ で 一様連続とは
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in I)(|x - x'| < \delta \to |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

定理 12 $f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で連続で, $f(a)f(b) < 0$ ならば, ある $c \in I$ があって $f(c) = 0$

定義 5 $f(x)$ が区間 $I=[a,b]$ で定義されているとき, 振幅 $\omega_f(\delta)$ を次式で定義する。

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'|<\delta} \sup_{x,x'\in I} |f(x)-f(x')|$$

定理 13 $\lim \omega_f(\delta)=0$ ならば一様連続である

定理 14 *(2)* $f(x)$ が区間 $I=[a,b]$ で連続ならば実は一様連続である.

問題 3.1 $I=[0,1]$ とする。以下の関数は I 上, 一様連続であるが, $x\in I, y\in I$, $|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となる $\delta>0$ で一番大きいものを求めよ。
(1) $f(x)=x^4$ *(2)* $f(x)=\sin x$ *(3)* $f(x)=\sqrt{x}$ *(4)* $f(x)=x\log x$ *(*$f(0)=0$ とする*)*

問題 3.2 $I=(0,2)$ とする。以下の関数は I 上, 連続か不連続か, あるいは一様連続か理由をつけて答えよ。
(1) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ *(2)* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *(3)* $f(x)=\sin x$ *(4)* $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

4 単射, 全射, 逆関数

定義 6 *(1)* 関数 $f(x)$ が 単射 *(injective)* であるとは, $x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$. *1* 対 *1* 写像ともいう。*(*一変数ならば単調増加または単調減少な関数である*)*
(2) 関数 $f(x): I\to J$ 全射（上への写像, *surjective)* とは $f(I)=J$
(3) 関数 $f(x): I\to J$ が全単射のとき, *1:1* かつ上への写像であるともいい, 逆写像が定義できる。これを $f^{-1}(x): J\to I$ などと書く。

1. $\sin x: I=[-\pi/2,\pi/2]\to J=[-1,1]$ より $\sin^{-1}: J=[-1,1]\to I=[-\pi/2,\pi/2]$
2. $\tan x: I=(-\pi/2,\pi/2)\to R=(-\infty,\infty)$ より $\tan^{-1}: R\to I=(-\pi/2,\pi/2)$
3. $e^x: I=R\to J=(0,\infty)$ より $\log x: J=(0,\infty)\to I=R$
4. $\arcsin(x)+\arccos x=\pi/2$
5. $\arctan(x)+\arctan(1/x)=\pm\pi/2$ (+ for $x>0$, - for $x<0$)

5 【講義 2 の問題のヒントと略解 】

解答 1.1 省略

解答 2.1 $\{a_n\}$ を正と負に分けて, $\{b_n\geq 0\}$ と $\{c_n<0\}$ にすれば, $\lim b_n=\lim c_c=0$ でかつ, $\sum_{k=1}^n b_k\to\infty$, $\sum_{k=1}^n b_k\to-\infty$. そこで任意の M *(*正と仮定してよい*)* に対し $\sum_{k=1}^{n_1} b_k=A_1>M$ となる, 最小の n_1 を選び, 次に $A_1+\sum_{k=1}^{n_2} c_k=A_2<M$ となる, 最小の n_2 を選ぶ. 以下同様にして, 部分数列の和を構成すればよい

解答 2.2 *(1)* 以下のように, 2^k+1 から 2^{k+1} までづつグループにする.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{2^k\, terms}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{\log_2(n)}{2}$$

(2)[**積分による評価**] $f(x)>0$ が連続で単調減少ならば

$$\int_1^{N+1} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n) \le \int_0^N f(x)dx$$

なので, 積分の収束と和の収束は同値である．ゆえに

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x\log^p(x)}dx = \int_1^{\log n} \frac{1}{x^p}dx$$

$p>1$ で収束, $p\le 1$ で発散.

(3) [**ライプニッツの交代級数**] $a_n = 1/n$ とすると, $a_n \ge 0$ は単調減少で, $\lim a_n = 0$. ゆえに $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k})$ は単調増加, $S_{2n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n}(a_{2k} - a_{2k+1})$ 　は単調減少．よって

$$a_1 > S_3 > \cdots > S_{2n-1} > S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \ge S_{2n} \ge \cdots \ge S_2$$

これから $\lim S_{2n} = \alpha, \lim S_{2n+1} = \beta$ が存在する．$a_n \to 0$ より $\alpha = \beta$.

(4) *(3)* で $a_n = f(n)$ とすればよい.

(5) [**素数は結構無限にある**] $\{a_n\} = \{2,3,5,7,11,\cdots\}$ を素数全体とし, $(1-1/a)^{-1} = 1 + a^{-1} + a^{-2} + \cdots$ と素因数分解の一意性から

$$\frac{1}{\prod(1-1/a_n)} \equiv \frac{1}{(1-1/a_1)(1-1/a_2)(1-1/a_3)\cdots} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

右辺は発散です．左辺は

$$\exp[-\sum \log(1-1/a_n)] = \exp[\sum(1/a_n + O(a_n^{-2}))]$$

で $\sum a_n^2$ は収束．よって $\sum a_n^{-1} = \infty$. これは有名なオイラーによる計算.

解答 2.3

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

より, $n = N, N+1, \cdots$ と加え

$$\frac{1}{N} \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{N-1}$$

解答 2.4 $\sum a_n < \infty$ より, $\lim a_n = 0$. よってある $N_0 \in N$ があって, $\forall n > N_0$ に対して $0 \le a_n < 1$, よって $p \ge 1$ ならば $0 \le a_n^p \le a_n$. よって優級数法によって $\sum_n a_n^p$ は収束する．逆は成立しない．$a_n = 1/n$ ならば $\sum a_n = \infty$ 他方 $\sum a_n^2 = \sum n^{-2} = \zeta(2) = \pi^2/6 < 2$

解答 2.5 *(1)* $\sum a_n$ が収束すれば $a_n/(1+a_n) \le a_n$ から収束は明らか（優級数法）.$\sum a_n = \infty$ とする．$a_n \le 1$, $a_n \ge 1$ で分けて.

$$\frac{a_n}{1+a_n} \ge \min\{\frac{a_n}{2}, \frac{1}{2}\}$$

よって $a_n > 1$ なる n が無限個あれば $\sum 1/2 = \infty$, また有限個ならば $n > n_0$ で $a_n \le 1$ としてよく, $\sum a_n/2 = \infty$. *(2)* 任意の $a_n \ge 0$ に対し収束する.

$$\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \le \frac{1}{n^2}$$

解答 2.6 *(1)* 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 $a_n = n^2$
(2) 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 $n = 2^k$ で $a_n = 1$, それ以外で $a_n = 0$
(3) 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 偶数の n で, $a_n = 1$, 奇数で $a_n = 0$

解答 2.7 *(1)* 収束するので $s_m = \sum_{k=1}^m a_k$ として
$\lim |s_{2n} - s_{n-1}| = \lim |\sum_{k=n}^{2n} a_k| = 0$, 右辺 $\geqq na_n$
(2) $\sum_{k=1}^n ka_k = s_n$ とすれば, $a_n = (s_n - s_{n-1})/n$ で

$$T_n \equiv \sum_{k=1}^n a_k = \frac{s_n}{n} - \frac{s_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) s_k$$

ここで s_n は収束し, ゆえに有界であり, $(k-1)^{-1} - k^{-1}$ は絶対収束する. ゆえに T_n はコーシー列

解答 2.8 $r = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ とすれば

$$r_n = \sup_{k>n} \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\}$$

は有界単調減少列で収束. よって $n > n_0$ ならば

$$r - \varepsilon < r_n < r + \varepsilon, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r_n$$

$n > n_0$ ならば

$$(a_n)^{1/n} = \left(A \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} \right)^{1/n} \leq \left(A r_{n_0}^{n-n_0} \right)^{1/n}, \quad A = a_{n_0}$$

$\limsup$ をとり

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \lim \left(A r_{n_0}^{n-n_0} \right)^{1/n} = r_{n_0}$$

n_0 をさらに大きくとればよい。 $\liminf$ も同じ。

解答 2.9 「ダランベールの判定法」,「コーシーの判定法」,「コーシー・アダマールの判定法」に対して

$$\{\lim |a_{n+1}/a_n| \text{ が存在 }\} \subset \{\lim |a_n|^{1/n} \text{が存在 }\} \subset \{\limsup |a_n|^{1/n} \text{が存在 }\}$$

の関係がある. これは上記の議論から自明。しかし $a_n = \alpha^{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ では $\lim |a_n|^{1/n} = \alpha$, しかし $\lim |a_{n+1}/a_n| = \alpha^{1\pm(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ は存在しないから, 逆の包含関係は存在しない。以上の議論から, これらの極限が存在すれば, これらがすべて一致することは明らかである.

解答 2.10 *(1)* $|x| < \rho$ ならば $r < \rho$ があって $|x| < r$ なので, $\limsup |a_n|^{1/n}|x| < r/\rho < 1$. ゆえに $n > n_0$ であるすべての n に対して $|a_n x^n| < (r/\rho)^n$. よって絶対収束. また $r > \rho$ があって $|x| = r$ ならば $\limsup |a_n|^{1/n}|x| = r/\rho > 1$ なので無限に多くの n について $|a_n x^n| > 1$、よって発散.
(2) まず $\sum |a_n x^n|$, $\sum |a_n n x^{n-1}|$, $\sum |a_n n(n-1)x^{n-2}|$ は, $|x| < \rho$ で絶対収束するので, 級数の順番を入れ替えてよい. ゆえに h が十分小さく $|x|, |x + \theta h| < \rho$ $(0 < \theta < 1)$ であるとしてよいから

$$\left| \frac{1}{h} \left(\sum a_n (x+h)^n - \sum a_n x^n \right) - \sum a_n n x^{n-1} \right|$$
$$= \frac{1}{h} \left| \sum a_n [(x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}] \right| \leqq \frac{h}{2} \sum |a_n n(n-1)(x + \theta_n h)^{n-2}| \to 0$$

解答 2.11 x^n の係数を a_n とする．以下の計算では，$(n/2)^{n/2} < n! < n^n$ と，$1 < n^{1/n} \to 1$ を用いた．*(この証明は簡単で学生に任す.)*
(1) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim n^{-1/2} = 0$, ゆえに $\rho = \infty$.
(2) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim n^2/2n(2n-1) = 1/4$, ゆえに $\rho = 4$.
(3) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim(1 + 1/\sqrt{n}) = 1$, ゆえに $\rho = 1$.
(4) $a_{n^2} = n!$, よって　$r = \limsup\{(n!)^{1/n^2})\}$, $1 \le r$ は明らかで，$n! < n^n$ から $r \le (n)^{1/n} \to 1$ ゆえに $\rho = 1$.
(5) $r = \lim a_n/a_{n+1} = \lim(1 + (\log n/\log(n-1)!)) = 1$, ゆえに $\rho = 1$.
(6) $r = \lim a_n^{1/n} = \lim(n!)^{a/n^2} = 1$, ゆえに $\rho = 1$.

解答 2.12 分母奇数のグループが n, 分母偶数のグループが n 個からなるとして $n \to \infty$ を考えてかまわない．また話の単純のため，$p > q$ としてよい．このとき，和は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} &= \sum_{k=1}^{2nq} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=nq+1}^{np} \frac{1}{2k-1} \\
&= \log 2 + O(1/n) + \sum_{i=1}^{n(p-q)} \frac{1}{2(nq+i)-1} \\
&= \log 2 + O(1/n) + \frac{1}{2nq} \sum_{i=1}^{n(p-q)} \frac{1}{1 + ((i-1/2)/nq)} \\
&\to \log 2 + \frac{1}{2} \int_0^{(p/q)-1} \frac{1}{1+x} dx = \log 2 + \frac{1}{2} \log(p/q)
\end{aligned}$$

解答 2.13 *(1)* [**オイラーの収束法**]
$\sum_{k=1}^n \sin na = \sigma_n$ とすれば
$\sum_{k=1}^n \sin na \sin(a/2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\cos(n-1/2)a) - \cos(n+1/2)a] = \frac{1}{2}[\cos(a/2) - \cos((2n+1)a/2)]$
なので

$$\sigma_n = \frac{\cos(a/2) - \cos((2n+1)a/2)}{2\sin(a/2)}, \quad |\sigma_n| < \frac{1}{|\sin(a/2)|}$$

で

$$\sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) a_k = f(1) + \sum_{k=1}^n \sigma_k (a(k) - a(k+1))$$

ここで $\sum |a(k) - a(k+1)| = \sum (a(k) - a(k+1)) \to a(1)$ は絶対収束.
(2) もこれに順ずる．$\sum_{k=1}^n \cos na = \tau_n$ として残りは前と同じ.

解答 2.14 $s_n = \sum (-1)^k (\sin kx + k)/k^2$ とすればこれは絶対収束する部分と条件収束する部分に分かれ、明らかに収束。絶対値をとれば $n \ge 2$ ならば $|(\sin nx + n)/n^2| \ge 1/2n$. ゆえに絶対収束ではない.