2008 年度微分積分学 A 期末試験問題 (担当 伊東)

以下の【 問 1 】,【 問 2 】,【 問 3 】及び選択問題から 1 つ, 計 4 問を選んで答えよ。(配点 $25 \times 4 = 100$).

【 必須問題】

【 問 1 】) $f(x)$ は、 全空間 R で　その n 次導関数が連続であるものとする.　このとき

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_n, \quad R_n = O((x-a)^n)$$

と表せることを示せ. また剰余項 R_n の具体的な形について論じなさい.

【 問 2】(1) 数列 $a_1, a_2, \cdots$ がコーシー列であることの定義をいえ。

(2) 級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ は 第 n 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ に対し極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$, で定義する。 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は級数の収束する必要条件であるが 十分条件ではありえないことを示せ。

【 問 3】(1) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2(3+x^2)^2}$ としその部分分数分解を

$$f(x) = \frac{a}{(1+x^2)^2} + \frac{b}{1+x^2} + \frac{c}{(3+x^2)^2} + \frac{d}{3+x^2}$$

とする. a, b, c, d を求めよ.

(2) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ。

【 選択問題】

【問 4 】(1) $\log(1+x)$ のテーラー展開を用いて数列 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ は $\log(2)$ に収束することを示せ。

(2) これを用いて奇数項について p 項 づつまとめた

$$s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(n は右辺に現れる項の数) は如何なる値に収束するか決定せよ.

【 問 5】(1) $f(x)$ は考えている領域で 2 回連続微分可能で $f''(x) \geq 0$ とすれば,

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$$

が成り立つことを示せ。ただし $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

(2) (1) が成り立つならば, n 個の $\lambda_i \geq 0$ ($\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) に対しても

$$f(\sum \lambda_i a_i) \leq \sum_i \lambda_i f(a_i)$$

が成立することが帰納法で示される。これを $f(x) = -\log x$ 用いて $a_i \geq 0$ のとき 相加相乗平均の不等式

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n a_i)$$

を証明せよ。