2010 年度微分積分学 A 期末試験問題 (**担当 伊東**)

問 1,2,3 は全て解答, 問 4,5 から一つ選択のこと.

【問 1】(必須) 次の各問いに答えよ (30 点).

1. 和 $S = \sum |a_n|$ は発散するが, $T = \sum a_n$ は収束する例をひとつあげ, それに対して, S の発散, T の収束を証明せよ.

2. $f(x) = \arcsin x$ をマクローリン展開をしたとき, x^{2n+1} を含む項をあらわに与えよ. $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ をヒントとし, 必要ならば記号 $(2n+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ を用いよ.

【問 2】(必須) $f(x)$ はある開区間 I で n 回連続微分可能とする. 区間 I に属する任意の a, x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a < \xi < x$ または $x < \xi < a$ が存在す. これを示せ (20 点).

【 問 3 】(必須) 次の二つの積分から一つ選択して計算しなさい (20 点).

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} dx, \qquad (2) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

【 問 4 】 (1) $0 \le f''(x)$ がその区間内で成立するならば, $0 \le \lambda \le 1$ として,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

が成立することを, 平均値の定理を 2 度用いて示せ (10 点).
(2) さらにこのとき, $0 \le \lambda_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ として,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

が成立することを, 帰納法で示せ (10 点).
(3) (2) を $f(x) = -\log x$ に応用し, 以下の相加相乗平均に関する不等式を示せ　(10 点).

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le \frac{\sum x_i}{n}$$

【 問 5 】 (1) $r^n - 1$ の因数分解 $r^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(r - \exp\left[i \frac{2\pi k}{n} \right] \right)$ から

$$(r^n - 1)^{2/n} = \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + r^2 - 2r\cos\frac{2\pi k}{n} \right) \right]$$

が成立することを示せ, ただし $|r| \ne 1$　(10 点).
(2) (1) の右辺の Riemann 和はその収束条件を満たすことを示し, 次式を証明せよ (10 点).

$$\int_0^{2\pi} \log\left(1 + r^2 - 2r\cos x\right) \frac{dx}{2\pi} = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ 2\log|r| & |r| > 1 \end{cases}$$

(3) (2) を用いて以下の, (i) および (ii) を示せ　(10 点).

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \log\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$