2011 年度微分積分学 A 期末試験問題 (担当 伊東)

問 1,2,3 は全て解答, 問 4, 問 5 から一つ選択のこと. 配点は順に $25+20+25+30=100$ 点.

【問 1】 $f(x)$ はある開区間 I で n 回連続微分可能とする. 区間 I に属する任意の a, x に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a<\xi<x$ または $x<\xi<a$ が存在す. これを示せ (25 点).

【 問 2】 $p>0$ とし 定積分 $\int_0^1 x^p dx$ をリーマン和として求める。 $0<r<1$ として　$I=[0,1]$ の分割を, $\Delta_r=\{x_0=0, x_1=r^{n-1}, x_2=r^{n-2}, \cdots, x_{n-1}=r, x_n=1\}$ とする. ここで分割数 n は, $r^{n-1}\leq 1-r$ となるような最小の n と定める。 分割 Δ_r に対して, 過剰和 S_{max}, 不足和 S_{min} を求めよ. また $\lim_{r\to 1} S_{\max}=\lim_{r\to 1} S_{min}$ を示し, その極限値を求めよ (20 点).

【問 3】 $\{a_n \geqq 0; n=1,2,\cdots\}$ は 単調減少正項数列 で $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を満たす。このとき

$$S_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$$

は収束することを示せ。次にこの和の順番を変え

$$T_n=a_1+a_3-a_2+a_5+a_7-a_4+a_7+a_9-a_6+\cdots$$

とした場合 (n は右辺の項数), 収束する場合には証明を, 収束しない場合には例をあげよ (25 点)。

【 問 4 】(選択) (1) $(1-x)^{-1/2}$ のマクローリン展開 (2 項展開) に $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^{-1/2}dt$ を応用し, $\arcsin(x)$ (奇関数) のマクローリン展開を

$$a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+R_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k+1}x^{2k+1}+R_{2n+1}$$

の形に求めよ (a_{2k+1} の具体形を与える). 剰余項 R_{2n+1} の形も求めよ (15 点).
(2) $\dfrac{\pi}{6}=\arcsin(1/2)$ を用い, π を小数点以下 3 桁まで求めよ. 必要ならば次の値を使え (15 点).

$2^{-3}=0.12500$,　$2^{-5}=0.03150$,　$2^{-7}=0.00781$,　$2^{-8}=0.00390625$
$2^{-10}=0.000976563$　$2^{-12}=0.000244141$

【 問 5 】(選択) (1) 部分分数展開

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

において, $x=0, \pm i$ の代入, および $x\to\infty$ の振る舞いを考えて, a, b, c, d　を求めよ (10 点).
(2) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$ を求めよ（20 点).