2012 年度微分積分学 A 期末試験問題 (**担当 伊東**)

【問 1】 $f(x)$ は, $f^{(n-1)}(x)$ が (a,b) で微分可能, $[a,b]$ で連続であるものとする．区間 (a,b) に属する任意の x に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a<\xi<x$ が存在す．これを示せ (20 点).

【 問 2 】 (1) 数列　$\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよ．[10 点]
(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $I=[a,b]$ で $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ．[10 点]

【 問 3 】 次の二つの積分から一つ選択して計算しなさい (20 点).

$$(1)\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx,\qquad (2)\ \int_{-1}^{1}\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}dx$$

【問 4】　数列 $a_1,a_2,\cdots$ は $a_n\geq a_{n+1}\geq 0$ を満たし, かつ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるという。このとき次の問いに答えよ (20 点).

1. $b_n=a_n-a_{n+1}$ とする。級数 $\sum_k b_k$ は絶対収束することを示せ.
2. $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$, ただし x は π の整数倍ではないとする。$|\sigma_n|\leq|\sin(x/2)|^{-1}$ を示せ。
3. $\sin kx=\sigma_k-\sigma_{k-1}$ に着目して $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sin kx)a_k$ は収束することを示せ.

【 問 5 】 以下の凸関数に関連する不等式について答えよ (20 点)
(1) $0\leq f''(x)$ がその区間内で成立するならば, $0\leq\lambda\leq 1$ として,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

が成立することを, 平均値の定理を 2 度用いて示せ.

(2) さらにこのとき, $0\leq\lambda_i\leq 1$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ として,

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

が成立することを, 帰納法で示せ.

(3) (2) を $f(x)=-\log x$ に応用し, 以下の相加相乗平均に関する不等式を示せ.

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leq\frac{\sum x_i}{n}$$