2014 年度 微分積分学 A 期末試験問題

以下, 問 1∼ 問 3 は全て答え, 選択 4, 選択 5 からは一つ選んで解答すること。
(注意: 問題は**裏面** にもあります !)

*********** 解答と講評，成績分布 ********************************
解答は以下の通りです。 いろいろな場所で類似問題を解答してますので
略解ですが学生の皆さんはできるだけ詳しく解答してください。
採点結果:
配点は 25 点 x 4=100 点満点
受験生数 45 名
平均 69 点
最高 90 点
60 点未満 12 人

60 未満は 12 人で，これはあとでレポートなどを勘案いたします。
(レポート No.3 の採点は TA の方が現在行っております.)

問い 2 テーラー展開，問 3 凸関数についてはレポート問題にもだしたので
よくできていました．ここで 50 点を取ることが必要。
テーラー展開では，Cauchy 形平均値の定理を使う証明が半分，
のこりが部分積分でしたが， 授業でも間違いの例とし述べた
「通常の平均値の定理を使う間違った証明」が 2 例あって
点数はさしあげられません。また不等式で (...) や和の添え字など
混乱して分かり難いものがあって，減点されます。
問 1(2) はコーシー列になる条件を求めるもので，ほぼ全滅で完全解の
方はいませんでした．これは 15 点の配点で， 91 点以上が皆無である
理由です。 選択 4 (2) は一様連続について言及しないと満点は与えられ
ません。選択 5 を選んだ学生は少ないですが，選んだ学生は大体よく
できていました。完全解の学生が一名でした。
July 31, 2014
****

【1】次の各問いに答えよ.

1. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよ.
2. 条件 $|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{n^p \log^q(n+1)}$ を満す数列 $\{a_n; n = 1, 2, \cdots\}$ はいつコーシー列になるか判定せよ, ただし, $p > 0, q > 0$.

解と講評] (1) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m \in N)(\forall n \in N)(m, n > n_0 => |a_m - a_n| < \varepsilon)$,
あるいは $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$
(2)

$$|a_m - a_n| \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p \log^q(k+1)}$$

この右辺の和は積分で置き換えて評価できる. 実際 $[t]$ で $1 < t$ の整数部分をあらわすとすれば, 平均値の定理から, その差は

$$\left|\frac{1}{t^p \log^q(t+1)} - \frac{1}{[t]^p \log^q([t]+1)}\right| \leq \frac{\text{const.}}{[t]^{p+1}}, \quad [t] > 1$$

で右辺の和は $p > 0$ で収束し, 故に積分での値との差は有界。$x = \log t$, $dt = tdx = e^x dx$, より

$$\int_n^\infty \frac{1}{t^p \log^q(t+1)} dt = \int_{\log n}^\infty \exp[-(p-1)x] x^{-q} dx$$

で評価される. $p > 1$ ならば任意の q に対して収束, $p = 1$ ならば, $q > 1$ に対して収束. $q \leq 1$ に対して発散, $p < 1$ ならば任意の q に対して発散するので (1) $p > 1$, あるいは (2) $p = 1$, $q > 1$ のときコーシー列になる。これ以外のときは一般にコーシー列にならない。

【2】 $f(x)$ はある開区間 I で n 回連続微分可能とする. 区間 I に属する任意の a, x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a < \xi < x$ または $x < \xi < a$ が存在する. これを示せ.

解と講評] コーシーの平均値の繰り返しで示す。

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k, \quad G(x) = (n!)^{-1}(x-a)^n$$

とすると $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 故に

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots =$$

これを繰り返して, 最終的に

$$= \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = f^{(n)}(\xi_n)$$

よって $F(x) = G(x) f^{(n)}(\xi_n)$ である。ただし $\xi = \xi_n$ とおく. これが一番単純です。部分積分の繰り返し

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x (x-t)' f'(t)dt \\ &= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x [(x-t)^2/2]' f''(t)dt \end{aligned}$$

も多かったですが, この場合積分の中間値の定理による積分型剰余項の書き換え

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

が必要です。 これかないと減点 (-5) になります。

【 3】(1) $0 \leq f''(x)$ がその区間内で成立するならば, $0 \leq t \leq 1$ として,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成立することを示せ.
(2) このとき, $0 \le t_k \le 1$, $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ として,

$$f(\sum_{k=1}^n t_k x_k) \le \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

が成立することを, 帰納法で示せ.
(3) $0 < a_i$ として不等式

$$(1) \qquad \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$(2) \qquad (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

を示せ。

解と講評] (1) $a = t$, $b = 1 - t$ と置けば

$$\begin{aligned}
&af(x) + bf(y) - f(ax + by) \\
&= a[f(ax + by + b(x - y)) - f(ax + by)] + b[f(ax + by - a(x - y)) - f(ax + by)] \\
&= ab(x - y)[f'(ax + by + \theta_1 b(x - y)) - f'(ax + by - \theta_2 a(x - y))] \\
&= ab(\theta_1 a + \theta_2 b)(x - y)^2 f''(ax + by + \theta_3(\theta_1 a + \theta_2 b)(x - y)]
\end{aligned}$$

凸だからと図形を用いて証明を試みた方もおられましたが、これは論法が完全に逆ですので得点は有りません！　皮算用の学生諸君は注意！

(2) $n = 1, 2$ は (1) で示した. n まで成立するとして

$$f(\sum_{i=1}^n t_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}) = f\left((\sum_{i=1}^n t_i) \frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i} + t_{n+1} x_{n+1}\right)$$

よって $n = 2$, すなわち　$(\sum_{k=1}^n t_k) + t_{n+1} = 1$ を利用するものと n, すなわち $\sum_{j=1}^n t_j / (\sum_k^n t_k) = 1$ の場合の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\text{上式右辺} &\le (\sum_{i=1}^n t_i) f\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\le (\sum_{i=1}^n t_i) \sum_{j=1}^n \frac{t_j}{\sum_{i=1}^n t_i} f(x_j) + t_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ ですが $\sum_{i=1}^n t_i \ne 1$ なのでこのままでは帰納法の仮定は使えません。ここをいい加減にすると帰納法にはなりませんから, 得点にはなりません。先に $n = 2$ の不等式を使うか, $n = n$ の不等式を使うかは勝手です.
(3) $f(x) = -\log x$, $g = \frac{1}{x}$ は 2 階微分が $f'' = 1/x^2$, $g'' = 2/x^3$ と正なので

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) &= -\log(\frac{\sum x_i}{n}) \le \sum -\frac{1}{n} \log x_i = -\frac{1}{n} \log x_1 \cdots x_n \\
&= -\log(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \\
g\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) &= \frac{n}{\sum x_i} \le \frac{1}{n} \sum g(x_i) = \frac{1}{n} \left(\sum \frac{1}{x_i}\right)
\end{aligned}$$

これらは求めるものである.

【選択 4 】 (1) r^n-1 の因数分解 $r^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(r-\exp\left[i\frac{2\pi k}{n}\right]\right)$ (代数学の基本定理) を仮定し

$$(r^n-1)^{2/n}=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+r^2-2r\cos\frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

が成立することを示せ, ただし $|r|\neq 1$.

(2) (1) の右辺の Riemann 和は $n\to\infty$ で収束することを示し (分割点, 代表点の取り方によらないこと), 次式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi}\log\left(1+r^2-2r\cos x\right)\frac{dx}{2\pi}=\begin{cases}0 & |r|<1\\ 2\log|r| & |r|>1\end{cases}$$

(3) (2) を用いて以下の広義積分 (オイラーの積分) を求めよ.

$$I=\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx,$$

解と講評]

(1) オイラーの公式から

$$\begin{aligned}(r^n-1)^{2/n} &= \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log|1-r\exp(2\pi k/n)|^2\right]\\ &= \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log|1-r(\cos(2\pi k/n)-i\sin(\cos(2\pi k/n)|^2\right]\\ &= \exp\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+r^2-2r(\cos(2\pi k/n)\right)\right)\right]\end{aligned}$$

(一行目で 2 乗している段階で log 内で絶対値をとっていることに注意。) log 内は非負.

(2) $|r|\neq 1$ ならば, 非積分関数は $0\leq x\leq 2\pi$ で一様連続なのでリーマン積分可能である。よって

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{r}^{\mathrm{n}}-1)^{2/\mathrm{n}}=\begin{cases}\exp[2\log r] & r>1\\ 1=\exp[0] & r<1\end{cases}$$

から明らか.

(3) $r=1$ では　$(\mathrm{r}^{\mathrm{n}}-1)^{2/\mathrm{n}}=0$ であるが適当な極限をとればいい。右辺は広義積分可能で, $x=0$ の近傍, $|x|<\varepsilon$ を除くと積分可能である. $|x|<\varepsilon$ での寄与は, $\int\log xdx$ と同じで, 広義積分可能で寄与は $\varepsilon\log\varepsilon$ より小さい. よって

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log\left(2-2\cos x\right)\frac{dx}{2\pi} &= \int_0^{2\pi}\log(4\sin^2(x/2))\frac{dx}{2\pi}\\ &= 2\log 2+4\int_0^{\pi}\log(\sin(x/2))\frac{dx}{2\pi}\\ &= 2\log 2+4I/\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

これから

$$I=-(\log 2)2/\pi$$

また広義積分が存在することから上記のプロセスを経ないで求めた方（レポート問題にあった方法) もおられましたが, 別にかまいません.

【 選択 5 】 $x \in [0,1)$ を p 進法表示して $(1 < p < 10)$

$$x = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots$$

と表わしたとき ($a_i = 0, 1, \cdots, p-1$), 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_1}{10^3} + \cdots, \quad a_i = 0, 1, \cdots, p-1$$

と定める.

(1) $f(x)$ は明らかに単調増加で, いたるところ不連続であるが, 単調増加な関数は Riemann 積分可能であることを示せ.

(2) 区間 $[0,1)$ を区間幅 $1/p^n$ で等分割すれば分割点は $\zeta = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_1}{p^3} + \cdots + \frac{a_n}{p^n}, \quad a_i = 0, 1, \cdots, p-1$ となること, この ζ に対して $f(\zeta) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ となることに留意して $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ.

解と講評] 明らかにと入れたのは, あまり感心しない試験問題ですが, これを問うと幾分書かなくてはならいのであえて書きました。問 4 とのバランスを考えると入れてもよかったかもしれません. さて

(1) 上限和 $M(f)$ と下限和 $m(f)$ の差を考える. 一般性を失わず, $f(x)$ は単調増加としていい. $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ とすれば, $f(x)$ は単調増加なので, 分割幅 $|\Delta| = \max\{|x_{k+1} - x_k|\}$ を 0 に近づけて

$$\begin{aligned} 0 &\le M - m = \sum_k (f(x_{k+1}) - f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \le (\max\{x_{k+1} - x_k\})\,(f(b) - f(a)) \\ &= |\Delta|(f(b) - f(a)) \to 0 \end{aligned}$$

(2) 問題のように $[0,1]$ を p^n に等分割すれば Riemann 和は

$$\frac{1}{p^n}\sum_{a_1=0}^{p-1}\cdots\sum_{a_n=0}^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{p^n}p^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{a_k=0}^{p-1}\frac{a_k}{10^k}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p(p-1)}{2\times 10^k}\right)$$

すなわち, $n \to \infty$ として

$$\frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{p-1}{18}$$

いうまでもないが, $p = 10$ では $f(x) = x$ で答えは $\int_0^1 xdx = 1/2 = 9/18$ になることが分かる。