2006 年度後期微分積分学 B 期末試験問題　(担当 伊東)

つぎの問題から４問を選んで解答せよ。ただし問１、問２は必修であり、残りの２問は 問 A1〜問 A4 から選択せよ。

【必修】

【問 1】 次の二つの極限について (2) が存在すれば, (1) も存在して両者は等しいこと, および (1) が存在しても (2) は必ずしも存在しないこと, 及び (1) が存在すればその逆数は 級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径であることをを示せ。ただし $a_n \neq 0$ とする. (25 点)

$$(1) \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \quad (2) \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

【問 2】 次の２変数関数 $z = f(x, y)$ について極大、及び極小を (存在するならば) 求めよ. ただし a, b は共に 0 でない正数とし $\exp(x) = e^x$ である (25 点).

$$f(x, y) = (ax^2 - by^2)\exp[-x^2 - y^2]$$

【選択】

【問 A1 】 次の級数の収束半径を求めよ。ただし問題文中 α, β, γ は正の実数をあらわす。 (25 点)

$$(1) \sum_n n^n \, x^{n!} \quad (2) \sum_n \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)} x^n$$

【問 A2】 $I = [a, b]$ とする。関数列 $\{f_n(x) \in C^0(I)\}$ がノルム $||g|| = \sup_x |g(x)|$ に対してコーシー列になるとき, 以下の問いに答えよ. (25 点)
(1)$\lim f_n(x) = f(x)$ が存在することを示せ.
(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ。
(3) このとき $f(x)$ も連続であることを示せ。また関数空間 $C^0(I)$ のこの性質を何というか。

【問 A3】 $D = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$ はこの原点中心の単位球の内部にあるとし, 球座標を導入して次の積分を求めなさい. (25 点)

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \int\int\int_D \frac{1}{|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}|} dxdydz$$

【問 A4】 関数 $f(x)$ の区間 $I = [a, b]$ における, 全変動 $V(f)$ は I の分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ に対して, $v_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ として, $V(f) = \sup_\Delta \{v_\Delta(f)\}$ で定義される。(sup は全ての分割にわたって考える)。このとき, $V(f) < \infty$ なら $f(x)$ はリーマン積分可能であること, つまり, 過剰和 $S(\Delta, f) = \sum M_i(x_i - x_{i-1})$ と不足和 $s(\Delta, f) = m_i(x_i - x_{i-1})$ (M_i, m_i は $f(x)$ の対応する区間内での最大値と最小値) に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} (S(\Delta, f) - s(\Delta, f)) = 0$$

が成り立つことを示せ。 (25 点)