2009 年度微分積分学 B 期末試験問題 (担当 伊東)

以下の問題から４問選んで解答せよ.

【 問 1 】 関数 $f(x,y) = (ax^4 + by^4)\exp[-x^2 - y^2]$ の極値を全て求めよ, ただし, $0 < a < b$.

【 問 2 】 (1) 級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 ρ を与える公式を与えよ.
(2) $\log(1-x)$ のマクローリン展開を与え、その収束半径を上記公式により求めよ.
(3) $|x|$ が十分小さいとき $f(x) = \sum \frac{x^n}{n^2}$ を log を用い, 積分表示せよ.
(4) Riemann の ζ 関数は $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ で定義され, $\zeta(2) = \pi^2/6$ であることが知られている.
以下の積分値をもとめよ.

$$\int_0^{\infty} \log(1 - e^{-t}) dt$$

【 問 3 】 (1)a, b, c を正定数として, 楕円座標を $x_1 = ar\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = br\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = cr\cos\theta$ $(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$ で導入する. この変換のヤコビ行列

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

を求めよ.
(2) Jacobian $\det(F) = J(r,\theta,\phi) = \partial(x_1,x_2,x_3)/\partial(r,\theta,\phi)$ を求めよ (計算過程を詳述すること) .
(3) 一般に座標変換 $x_i = g_i(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$, $(i = 1,\cdots,n)$, を行うと体積要素は $dx_1\cdots dx_n = Jd\zeta_1\cdots d\zeta_n$ と Jacobi 行列式 $\partial(x_1,\cdots,x_n)/\partial(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ をかけて変換する。理由を簡単に述べよ.

【 問 4】 G_0 は定数 (重力定数) とする. 球対称な密度 $\rho(r)$ を持つ, 原点中心, 半径 R の球体の作る重力ポテンシャル

$$\Phi(x) = G_0 \int_{|\zeta| \le R} \frac{\rho(|\zeta|)}{|x - \zeta|} d^3\zeta$$

を $|x| < R$ と $|x| > R$ の二つの場合に求めよ. 特に質量が球体の表面のみに一様に分布し内部は空洞の場合、球体内部での $\Phi(x)$ はどうなるか.
ヒント: 回転対称性から, $x = (0,0,x)$, $x > 0$ とおける. 球座標で $\zeta = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$, $r = |\zeta|$ とすれば, $|x - \zeta| = \sqrt{r^2 - 2xr\cos\theta + x^2}$

【 問 5 】 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$ とし, $[0,1]$ の分割を $\Delta = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ とする. 単関数 $T(x,\Delta,\{c\})$ を

$$T(x,\Delta,\{c\}) = \begin{cases} c_i & x_i \le x < x_{i+1} \text{ のとき} \\ 0 & x < 0,\ x > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

としその積分 $I(T)$ を

$$I(T) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

とする. $\int_0^1 f(x)dx = I(T)$ となる $\{c_i\}$ を 1 組求めよ (下の問 (1) に連動します).
(2) 分割幅 $|\Delta| = \max_i\{|x_{i+1} - x_i|\}$ を 0 に近づけるとき $T(x)$ が $f(x)$ に一様収束する $\{c_i\}$ を求め、実際それが一様収束することを示せ.