2011 年度後期微分積分学 B 期末試験問題　(全 1 枚: 担当 伊東)

【必修: 1 から 4 の各問に答えよ】

【問 1】 次の級数の収束範囲を求めよ。またその収束範囲内でこの級数の表わす関数を, できるだけ簡単に表わせ。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

【問 2】 n 次元において $f(x_1, \cdots, x_n)$ が $r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ にのみ依存するならば次式が成立することを示せ.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f$$

【問 3】 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について極値をすべて求めよ. ただし $0 < a < 1$. (ヒント: 座標を回転するか, または $f_x = f_y = 0$ を解くにあたり, $f_x \pm f_y = 0$ を考えよ.)

$$f(x, y) = (x^2 + 2axy + y^2) \exp[-x^2 - y^2]$$

【問 4】 4 次元球座標は

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos\theta_1 \\ x_2 &= r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_3 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi \\ x_4 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi \end{aligned}$$

とおいて得られる. ただし $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 1, 2$ であり $0 \le \phi \le 2\pi$ である。
(1) $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = J dr d\theta_1 d\theta_2 d\phi$ として, ヤコビアン J を求めよ.
(2) 4 次元の単位球の体積と表面積を求めよ.

【 選択: 下から 1 問選択のこと】

【 問 5】 一様な密度 ρ と厚さ t を持つ全質量 M, 半径 R の中空の星があってその星の作る重力ポテンシャルを求めたい。球殻の厚さ t は無視できるほど小さく, 計算ののち $\lim_{t\to 0} 4\pi R^2 t\rho = M$ としてよい.

$$G(x) = \lim_{t \to 0} \rho \int_{R-t \le |\zeta| \le R} \frac{d^3\zeta}{|x - \zeta|}$$

を $|x| < R$ と $|x| > R$ の二つの場合に求めよ. 球座標を導入し, 回転対称性から, $x \in R^3$ を $(0, 0, x)$ とおいてよいことに留意せよ.

【問 6】 $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ とする。 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ として次式の値を求めよ, ただし m は定数.

$$\Delta \left(\frac{e^{-mr}}{r} \right)$$