4 月の授業のまとめとレポート問題　rep.1

1　テイラー展開

幾分唐突ですが, 部分積分は高校数学の範疇ですので, 7 月まで待たないということで

問題 1 部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+[f(x)-f(a)] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n \\
R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \quad (\text{積分型剰余項})
\end{aligned}
$$

を示しなさい. また $g(x)$ が単調減少または単調増加, $f(x)$ が連続であれば

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^x g(t)dt$$

となる c があることを用いて（積分の平均値の定理*)*

$$R_n = \frac{1}{n!}f'(c)(x-a)^n \quad (\textit{Legendre}\ \text{型剰余項})$$

と表わせることを示せ. *[教科書 p.5, p.144]*

2　実数

実数の定義と極限、実数の定義: まず論理記号の意味: $\forall x$ はすべての x に対して, $\exists$ は存在するという意味である. まず [教科書 p.22-p.25, (16) が少し違ってるが同じ]

I. R は可換体である (加減乗除が出来る, 大雑把にいって 0,1 を含み加減乗除で作られる数全てを含むと要求している)

(1)	$a+b=b+a\in R$	(2)	$(a+b)+c=a+(b+)\in R$
(3)	$\exists 0\in R, a+0=a$	(4)	$\forall a\in R, \exists a'\in R, a+a'=0$
(5)	$ab=ba\in R$	(6)	$(ab)c=a(bc)\in R$
(7)	$a(b+c)=ab+ac\in R$	(8)	$\exists 1\in R, 1a=a$
(9)	$aa'=1, a'\in R$	(10)	$1\neq 0$

II 順序が入る （つまり数直線の上に書けると言っている）

(11)	$a\le b$ または $b\le a$	(12)	$a\ge a$
(13)	$a\le b, b\le a$ ならば $a=b$	(14)	$a\le b, b\le c$ ならば $a\le c$
(15)	$a\le b$ ならば $a+c\le b+c$	(16)	$0\le a, 0\le b$ ならば $0\le ab$

III 実数は連続である (意味は後で説明).

この公理は前の要求と趣を異にし, 前の方は有限回の操作で作られた数（有理数）を構成するが、この公理はそういう方法では作れない数（無理数）, すなわち循環小数ではない, 同じパターンが現れない数でしか表わせない数を入れよとする。

問題 2 次のことを示せ

1. ゼロ元 *0* は一意的である．つまり *0'* をもう一つのゼロ元とすれば $0 = 0'$
2. 単位元 *1* は一意的である．つまり *1'* をもう一つの単位元とすれば $1 = 1'$
3. $a\,0 = 0$
4. $(-1) \times a = -a$
5. $(-1) \times (-1) = 1$
6. $0 < 1$ である．
7. $a > 0$ なら, $1/a > 0$
8. $a^2 \geq 0$

問題 3 前の公理によれば, 実数は少なくとも有理数 $Q = \{n/m; m, n \in Z, m \neq 0\}$ を含む, ここで Z は整数の全体。次のことを示せ

1. 有理数は循環小数で表され, 逆に循環小数は有理数である。
2. $Q_{\sqrt{2}} = \{p + \sqrt{2}q; p, q \in Q\}$ は加減乗除に対して閉じている, すなわち $x, y \in Q_{\sqrt{2}}$ とすれば, $x \pm y \in Q_{\sqrt{2}}$, $xy \in Q_{\sqrt{2}}$, $x^{-1} \in Q_{\sqrt{2}}$.

有理数の集合では任意の二つの有理数のあいだに又有理数が存在する。 このことを有理数の集合は「稠密」であるといっている。

Dedekind の切断の公理: [**教科書 p.64**] $R = L \cup U$ と実数 R を $L \cap U = \emptyset$, $L < U$ ($a \in L$, $b \in U$ ならば, $a < b$) と分割すれば, 以下のいづれかのみ起こる．

(i) $\max L \equiv \alpha \in L, \alpha \geq \forall x \in L$ はあるが $\min U \equiv \alpha \in U, \alpha \leq \forall x \in U$ は無い,

(ii) $\max L$ が無いが $\min U$ はある．

「連続の公理」([D]edekind の切断)	→ 「実数の公理」[W]eierstrass (sup, inf の存在)
→ [M]onotone 数列の収束	→ [K] $\cap U_i \neq \emptyset$
→ [C]auchy 列は収束する	→ [BW] 有界数列は収束する部分列を含む

3 集合

定義 3.1 *(1)* ある性質を持つものの集まりを集合といい, $A = \{a, b, c, \cdots d\}$ とかあるいは.

$$A = \{x : \ x \text{ は性質 } \cdots \text{ を持つ } \}$$

などと表す．その成分を集合の元, あるいは要素といい $a \in A, b \in A, \cdots$ などと表す．また x が集合 A の元でないことを $a \notin A$ とあらわす．

(2) 集合 A, B *etc* に対して積集合（共通集合）を

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

和集合（合併集合）を

$$A \cup B = \{x : x \in A \ or \ x \in B\}$$

で表す．対象となっている要素のなす集合を全体集合という．

(3) 全体集合を Ω とする．$X = \{a \in \Omega; a \notin A\}$ は 集合 A に属さない元の集合で，A の補集合といい，$X = A^c$　あるいは $X = \bar{A}$ などとあらわす．$X = \Omega - A$ とかくこともある．

定理 3.1 次式が成り立つ *(*ド・モルガンの定理*)*：

$$(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c, \quad (\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} A_i^c$$

4　無限集合の比較

定義 4.1 集合が含む要素の数を「位数」といい，位数が無限大である集合を「無限集合」という

定義 4.2 二つの集合 $A = \{a \in A\}$, $B = \{b \in B\}$ が同じ位数をもつとは，以下の性質をもつ写像 $\phi : A \to B$ が存在すること．

$$(1)\, a \neq b \text{ ならば} \phi(a) \neq \phi(b), \qquad (2)\, B = \{\phi(a); a \in A\}$$

このような写像を「１対１ *(*性質 *(1))*、かつ上への写像 *(*性質 *(2))*」または「単射 *(*性質 *(1))* で、かつ全射 *(*性質 *(2))* である」という。あるいはまとめて 全単射 *(surjection)* であるという．

有限集合の場合には　二つの集合の元の数が等しいこと，すなわち　位数が等しいことを言っている．無限集合はの場合，一対一の関係が付けば、「二つの集合は同じ濃度を持つ」ということにする．

例 4.1 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の作る集合，$Q_I = \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \cdots\}$　を $(0, 1)$ 間の有理数の全体とする．N の濃度を $\mathfrak{a}$ 又は $\aleph_0$ *(*$\aleph_0$ はアレフゼロと発音する*)* とする．Q_I もまた加算集合の濃度 $\mathfrak{a}$ 又は $\aleph_0$ を持つ．

例 4.2 整数を係数とする n 次方程式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ を考える．このような方程式の解　*(*根*)* になる数の全体 K を代数的数という．実数に限れば有理数の全てと，$\sqrt{n}$, $n = 2, 3, 5, 7, \cdots$, $\sqrt[3]{n}$, $n = 2, 3, 5, 7, \cdots$ などとこの和や積，商が含まれる．　この集合もまた加算集合の濃度*)*$\mathfrak{a}$ 又は $\aleph_0$ を持つ．

問題 4 上の例を証明せよ．

定理 4.1 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の作る集合，R を $(0, 1)$ 間の実数の全体とすれば，R の濃度 $\mathfrak{c}$ *(*実数の濃度，連続体濃度*)*　は $\aleph_0$ より大きい *(*実数を２進数展開して，$\{0, 1\}$ を無限に並べてかけるので $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ と書くこともある*)*

この証明はカントールによる．$\mathfrak{c} > \aleph_0$ は明らかである「対角線論法」を用いる

自然数の集合 N と $I = [0, 1]$ への全単射 ϕ が存在したとすれば，[0, 1] 区間の全ての元 x を ϕ によって $\{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$ と番号づける事ができる。各 $n \in N$ に対し，$\phi_n : N \to \{0, 1\}$ を，

$m \in N$ に対し, x_n の 2 進数展開の m 桁目 (0 か 1) を対応させる写像, さらに $g : N \to \{0, 1\}$ を, $g(n) = \neg\phi_n(n)$ ($\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$ である) とする．つまり

$$\phi_n(m) = \ n \text{ 番目の実数 } x_n \text{ の小数 } m \text{ 桁目 } (0 \text{ か } 1)$$

たとえば以下の表のようになる

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$\cdots$
$\phi_1 = x_1 = 0.1010\cdots$	$\phi_1(1) = 1$	$\phi_1(2) = 0$	$\phi_1(3) = 1$	$\phi_1(4) = 0$	
$\phi_2 = x_2 = 0.0001\cdots$	$\phi_2(1) = 0$	$\phi_2(2) = 0$	$\phi_2(3) = 0$	$\phi_1(4) = 1$	
$\phi_3 = x_3 = 0.1100\cdots$	$\phi_3(1) = 1$	$\phi_3(2) = 1$	$\phi_3(3) = 0$	$\phi_3(4) = 0$	
$\phi_4 = x_4 = 0..111\cdots$	$\phi_4(1) = 0$	$\phi_4(2) = 1$	$\phi_4(3) = 1$	$\phi_4(4) = 1$	

この例では $\{\phi_1(1) = 1, \phi_2(2) = 0, \phi_3(3) = 0, \phi_4(4) = 1\}$ なので, $\{g(1) = \neg 1 = 0, g(2) = \neg 0 = 1, g(3) = \neg 0 = 1, g(4) = \neg 1 = 0 \cdots\}$ つまり, g が定める実数は $x_{n_0} = 0.0110\cdots$ となる.

全ての $m \in N$ に対し $\phi_n(m) = g(m)$ となる $n \in N$ は存在しない (対角線論法という), すなわち x_n という実数はこの対応に入っていない。もしあれば、それを $n = n_0$, m として n_0 を選んで $\phi_{n_0}(n_0) = g(n_0) = 1 - \phi_{n_0}(n_0)$ で矛盾. $y \in I$ をその二進数展開の n 桁目が $g(n)$ である小数とする。y は I の元であるので、全単射 $\phi : N \to I$ があるという仮定から, $x_{n_0} = y \in I$ を満たす $n_0 \in N$ が存在する。しかし $g(n_0) = y$ の二進数展開の n_0 桁目 $= x_{n_0}$ の二進数展開の n_0 桁目 $\phi_{n_0}(n_0)$ となり矛盾する。

問題 5 *2* 次元の正方形 $I \times I = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ をなす点の集合の濃度は $I = [0, 1]$ と同じ連続体濃度 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ である．これを全単射 $\phi : I \to I \times I$ を構成して証明せよ．*(*ヒント*:* $I \ni x$ を *2* 進数表示して　偶、奇の桁で分けよ*.)*

5　数列及び数列を用いた連続性の特質付け, コーシー列

写像 $a : N \to R(C)$　を数列という, つまり自然数で順序が付けられた数字の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ である.

定義 5.1 漸化式*:* 以前の数列から次の数列を導く数式のこと*,*
$a_n = f(a_{n-1})$*,* $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ など*.*
特性根*:* もし $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならばそれは $x = f(x)$ の解である．これを特性方程式*,*　根を特性根という*.*

定義 5.2 $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とは*,*「 n を限りなく大きくすると*,* a_n はいくらでも b に近づく」こと。すなわちこれを論理記号で述べると
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n \geq n_0 \to |a_n - b| \leq \varepsilon)$

注意 この論理記号の中で $\forall x \in R$ は「集合 R の全ての元 x に対して」と読み, $\exists n_0 \in N$ は「集合 N にある元 n_0 があって」と読む.

定義 5.3　*1.* 数列 $\{a_n\}$ が単調増加とは $a_n \leq a_{n+1}$ を満たすこと。

2. 数列 $\{a_n\}$ が単調減少とは $a_n \geq a_{n+1}$ を満たすこと。

3. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界とはある数　M があって $a_n \leq M$ がすべての n で成立すること。M を上限という。

4. 数列 $\{a_n\}$ が下に有界とはある数　L があって $a_n \geq L$ がすべての n で成立すること。L を下限という。

定義 5.4 実数が連続であるとは、任意の有界な単調数列が収束すること。

定義 5.5 *1.* 実数の集合 A が上に有界とは, ある M があって $\forall a \in A$ に対し, $a \leq M$ となること。実数の集合 A が下に有界とは, ある L があって $\forall a \in A$ に対し, $a \geq L$ となること。M, L を集合 A の上界, 下界という。

2. 実数の集合 A の最大値 M とは
   (a) $M \in A$　　*(b)* $\forall a \in A$ に対し, $a \leq M$
   $M = \max A$ とあらわす。

3. 実数の集合 A の最小値 L とは
   (a) $L \in A$　　*(b)* $\forall a \in A$ に対し, $a \geq L$
   $L = \min A$ とあらわす。

定義 5.6 実数の集合 A の上界の全体を U_A, 下界の全体を L_A とあらわすとき $\sup A = \min U_A$ $\inf A = \max L_A$ と定義し集合 A の上限、下限という。*(*これらは最小の上界, 最大の下界にあたる*)*。

定義 5.7 $\{a_n\}$ がコーシー列とは, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n \in N)(\forall m, n \geq n_0 \rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon)$

実数の公理は「デデキントの切断 (実数を上下に切断すれば、一方のみに切り口が存在する)」を用いるが, 幾分使いにくいのでより使いやすいものを使うのが通例である. たとえば以下の定義に置き換えることができる.

定義 5.8 実数が連続であるとは、コーシー列が収束すること。すなわち a_n がコーシー列ならば, $\lim a_n = \alpha$ が実数として定義されるということ.

これらから以下の定理が導かれ、大変有効である.

定理 5.1 *(Weierstrass)* 有界な集合にはかならず上限、下限が存在する。

定理 5.2 収束列は *Cauchy* 列であり, *Cauchy* 列は収束する。

問題 6 (教科書 p.56 類) 数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ を定める。このとき以下の式が成り立つ。

1. a_n は単調増加で上に有界である。

2. $\lim a_n$ は収束する *(*$e = 2.718281826\cdots$*)*.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

4. $e^x e^{-x} = 1, \quad e^{x+y} = e^x e^y$

6 【4月の学習の総合問題】

問題 1 $x_{n+1}=f(x_n)$ の形の漸化式において, $\lim_{n\to\infty n}x_n=\alpha$ があれば, $\alpha=f(\alpha)$ を満たす. これを特性方程式, 解を特性根という. 次の数列の特性方程式の解 α を求め, $\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ か否か確かめよ。

1. $a_n=(1+a_{n-1})^{-1}$, $a_1=1$
2. $a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}$, $a_1>0$
3. $a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{a}{a_{n-1}}\right)$, $a>0$, $a_1>0$

問題 2 以下の集合に対し max,min, sup, inf を求めよ。ただし $n=1,2,3,\cdots$ また *(2)* を解くにあたってユークリッド互除法から示される, 「p,q が互いに素なら, $mp+nq=1$ となる整数 m,n がある」を用いてよい *(*一部難*)*.
(1) $A=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,
(2) α を正の有理数としたときに, $A=\{\lfloor n\alpha\rfloor\}$, ただし, $\lfloor n\alpha\rfloor$ は $n\alpha$ の小数部分をあらわす。
(3) α を正の無理数としたときに, $A=\{\lfloor n\alpha\rfloor\}$。

問題 3 次の数列でコーシー列になるものについては証明を, そうでないものについては反例をあげるか証明せよ. ただし *(1),(2),(3)* では $a_1=1$ とする *(*一部難, 特性根 α の近傍で $|f'(x)|>1$ なら収束しない, つまりコーシー列にならない*)*.
(1) $|a_{n+1}-a_n|<2^{-n}$ を満たす数列.
(2) $|a_{n+1}-a_n|<1/n$ を満たす数列.
(3) $a_{n+1}=f(a_n)$ で決まる数列, $f(x)$ は微分可能で $|f'(x)|<1/2$ を満たすもの.
(4) $a_{n+1}=f(a_n)$ で決まる数列, $f(x)$ は微分可能で $|f'(x)|<1$ を満たすもの.
(5) $a_{n+1}=2a_n(1-a_n)$ で決まる数列で, $a_1=1/3$.
(6) $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ で決まる数列で, $a_1=1/3$.

問題 4 (教科書 p.55 類) 数列 次の極限値を求めよ。*(*収束しないものもある*)*。
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$ *(2)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{1/n}$ *(3)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}$ *(4)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

問題 5 (教科書 p.53 類) 数列 $\lim a_n=\alpha$ ならば以下の数列も, α に収束することを示せ。
(1) $c_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,
(2) $c_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$,
(3) $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$, ただし $b_n>0$ で $\lim\sum_1^n b_i=\infty$ である。