2014 年度微分積分学 レッジメ No.4 (課題のみ)

以下の問題グループ, A 〜E から 1 問, すべてで 5 問選んで解答せよ。(一部解答レジメ)

【A-1】 次の各問いに答えよ.

1. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよ.
2. 和 $S = \sum |a_n|$ は発散するが, $T = \sum a_n$ は収束する例をひとつあげ, それに対して, S の発散, T の収束を証明せよ.
3. 正項数列 $\{a_n\}$ は単調減少で $S_n = \sum_{k-1}^{n} a_k$ は収束するという。$b_n = a_n |\log a_n|$ で収束するものと発散するものを各々例示せよ。($0 \log 0 = 0$ とする.)

【A-2】 数列 $a_1, a_2, \cdots$ は $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ を満たし, かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるという。このとき次の問いに答えよ.

1. $b_n = a_n - a_{n+1}$ とする。級数 $\sum_k b_k$ は絶対収束することを示せ.
2. $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$, ただし x は π の整数倍ではないとする。$|\sigma_n| \leq |\sin(x/2)|^{-1}$ を示せ。
3. $\sin kx = \sigma_k - \sigma_{k-1}$ に着目して $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sin kx) a_k$ は収束することを示せ.

【 A-3 】 (1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $I = [a, b]$ で $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ.
(2) 次の関数列は $R = (-\infty, \infty)$ で一様収束するか否か答えよ。

$$f_n(x) = \frac{2x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

【B】 $f(x)$ はある開区間 I で n 回連続微分可能とする. 区間 I に属する任意の a, x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a < \xi < x$ または $x < \xi < a$ が存在す. これを示せ.

【C-1 】(レジメ No.3) (1) $r^n - 1$ の因数分解 $r^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(r - \exp\left[i \frac{2\pi k}{n} \right] \right)$ (代数学の基本定理) から

$$(r^n - 1)^{2/n} = \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + r^2 - 2r\cos\frac{2\pi k}{n} \right) \right]$$

が成立することを示せ, ただし $|r| \neq 1$.
(2) (1) の右辺の Riemann 和は収束条件を満たすことを示し, 次式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi} \log\left(1 + r^2 - 2r\cos x\right) \frac{dx}{2\pi} = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ 2\log|r| & |r| > 1 \end{cases}$$

(3) (2) を用いて以下の積分値を求めよ. ((1) はオイラーの積分で $-\frac{\pi}{2}\log 2$, (2) は両辺を r で微分してみよ)

$$(1) I = \int_0^{\pi/2} \log\sin x dx, \qquad (2) I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a\cos x} dx$$

【 **C-2** 】 (レジメ No.3 類題) $x \in [0,3)$ を 3 進法表示して

$$x = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$$

と表わしたとき ($a_i = 0,1,2$), 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_1}{10^3} + \cdots, \quad a_i = 0,1,2$$

と定める.

(1) 単調増加な関数は積分可能であることを示せ (授業で証明, 教科書にあり).

(2) $f(x)$ は単調増加でいたるところ不連続であることを示せ.

(ヒント: 例えば $x_n = 0.22\cdots 2$ (3 進法で n 桁) なら $x_n \to 1$, しかし $f(1) = 1$ だが $f(x_n) \to 0.2222\cdots = 2/9$, 10 進法) .

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ.

【 **D-1** 】(教科書 p.160) 広義積分

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$$

は存在することを示せ (ヒント: この区間で $(2/\pi)x \leq \sin x \leq x$)。 さらに

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \log \frac{\sin 2x}{2} dx$$

に着目して積分値を求めよ.

【 **D-2** 】 次の積分から二つ選択して計算しなさい (置換積分のおさらい、教科書 p.188), (1) では $|a| < 1$.

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a\cos x} dx, \quad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} dx, \qquad (3) \int_{-1}^{1} \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

【 **D-3** 】 P_n を次式で定める (Legendre 多項式).

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0$, $m \neq n$ を示せ。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx$ を求めよ。

【 **E**】 (教科書 p.197, レジメ No.3)

(1) $0 \leq f''(x)$ がその区間内で成立するならば, $0 \leq \lambda \leq 1$ として,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

が成立することを, 平均値の定理を 2 度用いて示せ.

(2) さらにこのとき, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ として,

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

が成立することを, 帰納法で示せ.

(3) (2) を $f(x) = -\log x$ に応用し, 以下の相加相乗平均に関する不等式を示せ.

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{\sum x_i}{n}$$