RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 39–55

プランシェレル測度のジャック版の極限定理

(A limit theorem for the Jack deformation of Plancherel measures)

By

松本 詔 (Sho Matsumoto)*

Abstract

We study random partitions $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d)$ of n whose length is not bigger than a fixed number d. Suppose a random partition λ is distributed according to the Jack measure, which is a deformation of the Plancherel measure with a positive parameter $\alpha > 0$. We prove that for all $\alpha > 0$, in the limit as $n \to \infty$, the joint distribution of scaled $\lambda_1, ..., \lambda_d$ converges to the joint distribution of some random variables from a traceless Gaussian β-ensemble with $\beta = 2/\alpha$. As a corollary, we obtain a limit theorem for the length of the longest increasing (decreasing) subsequence of a random involution.

§1. 序章

n を正の整数とし，$\mathcal{P}_n$ を n の分割全体の集合とする．分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ がランダムに選ばれるという状況を考える．言い換えれば，集合 $\mathcal{P}_n$ に適当な（確率）測度が与えられているとする．このとき $\mathcal{P}_n$ 上の実数値関数 f が与えられれば，f は確率変数と見なせる．その f の性質，特に分布や平均などを考えていくことがランダム分割の問題である．本稿では f として，写像 $\lambda \mapsto \lambda_i$ を扱う．すなわち，λ がランダムに選ばれたとき，$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ といった量は一体どういう振る舞いをするか？　特に分割の重さ n が大きいときにどうなるか，といった問題を考える．

まずは分割 λ をどのようにランダムに選ぶか，ということを決めなければならない．すなわち，$\mathcal{P}_n$ の上に適当な確率測度を決める必要がある．最も基本的な確率測度は，対称群の Plancherel 測度であり，次で定義される．

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n. \tag{1.1}$$

Received December 15, 2008. Accepted April 2, 2009.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 60C05, 05E10
Partly supported by Grant-in-Aid for JSPS Postdoctral Fellows (20001840)
*名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (Graduate School of Mathematics, Nagoya University), 〒 464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町
e-mail: sho-matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp

ここで f^λ は，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の λ に対応する既約な表現空間の次元であり，また型 λ の標準 Young 盤の個数でもある．有限群における Burnside の定理か，または RSK 対応を思い出せば，$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda)=1$ となること，つまり $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ が $\mathcal{P}_n$ 上の確率測度になっていることが分かる．

$n\to\infty$ とするときの Plancherel 測度における確率変数 λ_i の分布については，Baik-Deift-Johansson [1] を始めとする結果がよく知られている．それらによると，$n\to\infty$ とするときの λ_i の極限分布は，GUE ランダム行列の固有値の極限分布に一致する．

一方ランダム行列論においては，GUE の他に GOE や GSE と呼ばれる代表的なランダム行列がある（[17]）．GUE ランダム行列が Plancherel 測度と対応しているように，GOE や GSE に対応するランダム分割は何か？と考えるのは自然である．その役割を果たすものとして，Jack 測度が考えられている．Jack 測度は，パラメータ $\alpha>0$ を持ち，$\alpha=1$ で Plancherel 測度に一致する．本稿の主結果は，Jack 測度におけるランダム分割の成分 λ_i の，一種の極限分布を得ることである．その極限分布には，トレースが 0 である GOE, GSE 行列の固有値分布が現れる．

本稿は以下のような構成になっている．§2 で，上に述べた Baik-Deift-Johansson [1] を始めとする Plancherel 測度と GUE 行列に関する研究の一部を紹介する．§3 以降を読むために必ずしも必要ではないが，本稿の主結果の動機と背景を理解する手助けとなるだろう．§3 で Jack 測度を定義し，§4 で本稿の主結果を与え，その証明の概略を §6 に記す．§5 では，§4 で与えた主結果の系として，ランダム置換に関する極限定理を与える．最後に §7 で，Jack 測度と Jack 対称関数との関係について述べる．

以後，分割に関する次の記号を断りなく用いる．分割 λ の重さと長さをそれぞれ $|\lambda|$, $\ell(\lambda)$ で表す．分割は自然に Young 図形と同一視するものとし，$(i,j)\in\lambda$ と書けば (i,j) が Young 図形の箱（の座標）であることを示す．$\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\dots)$ で λ の共役な分割とする．すなわち，$(i,j)\in\lambda' \iff (j,i)\in\lambda$.

§2. Plancherel 測度と Gauss 型ユニタリアンサンブル

この章では，Plancherel 測度における λ_i たちの極限分布と，GUE ランダム行列の固有値 x_i たちの極限分布に関する過去の研究を振り返る．これらの話題は，特に近年活発に研究されていて，以下に述べることはそのほんの一部にすぎない．

§2.1. 対称群の Plancherel 測度

分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ とその Young 図形の箱 $(i,j)\in\lambda$ に対し，$\lambda_i-j+\lambda'_j-i+1$ はその鉤（hook）の長さである．それらの積を

$$H_\lambda=\prod_{(i,j)\in\lambda}(\lambda_i-j+\lambda'_j-i+1) \tag{2.1}$$

とおくと，$f^\lambda=n!/H_\lambda$ となる（Frame-Robinson-Thrall の鉤公式，例えば [19, 定理 10.7] 参照）．ここで，積 $\prod_{(i,j)\in\lambda}$ は $\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\lambda_i}$ のことである．よって (1.1) で定義された

Plancherel 測度は次のようにも書ける:

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda) = \frac{n!}{(H_\lambda)^2}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n.$$

Plancherel 測度における $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ の同時分布関数を

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda_1 \le a_1, \lambda_2 \le a_2, \ldots, \lambda_k \le a_k) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_n \\ \lambda_i \le a_i \ (1 \le i \le k)}} \mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda), \qquad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$$

と表す．今後他の測度に対しても，同様の形で同時分布関数を表示することにする．

§ 2.2. GUE ランダム行列

ランダム行列についての代表的な文献として [5, 17] が挙げられる．詳しくはそれらを参考にしてもらうとして，ここでは GUE 行列について簡単に復習する．

d を正の整数とし，GUE(d) を $d \times d$ 複素 Hermite 行列 $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le d}$ 全体のなす集合とする．行列 X の対角成分 x_{ii} が平均 0，分散 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で正規分布しているとし，上三角成分 $x_{ij} (= \overline{x_{ji}})$, $i < j$, の実部と虚部が独立に平均 0，分散 $\frac{1}{2}$ で正規分布しているとする．このとき，GUE(d) を Gauss 型ユニタリアンサンブル（Gaussian unitary ensemble, GUE）と呼び，X を GUE ランダム行列，または単に GUE 行列と呼ぶ．

GUE は，ユニタリ変換の下で不変である．すなわち，任意の $d \times d$ ユニタリ行列 U に対し，$X \mapsto UXU^*$ という変換で X の分布は変わらない．

我々は GUE 行列の固有値の分布に興味がある．GUE 行列の固有値を大きい順に $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_d$ とおく．行列がランダムなので，その固有値も勿論ランダムである．その密度関数は,

$$\mathbb{P}_d^{\mathrm{GUE}}(x_1, \ldots, x_d) \propto e^{-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)} \prod_{1 \le i < j \le d} (x_i - x_j)^2 \tag{2.2}$$

となることが知られている．

GUE 行列の固有値 x_i の極限分布については，Tracy・Widom によって次が知られている．

定理 2.1 ([24, 25]). 任意の $k \ge 1$ と $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{d \to \infty} \mathbb{P}_d^{\mathrm{GUE}} \left((x_i - \sqrt{2d}) \sqrt{2} d^{1/6} \le a_i, \ 1 \le i \le k \right) = F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k).$$

ここで，$F_{\mathrm{GUE},k}$ は Airy 関数により定まる関数であり，詳しい定義は §2.5 で述べることにしよう．

これと対応する形の Plancherel 測度における主張が，λ_1 については Baik-Deift-Johansson [1] により，一般の λ_i については Borodin-Okounkov-Olshanski [3], Johansson [10], Okounkov [18] により独立に得られた．まず n がどんどん大きくなるにつれて，λ_i は平均 $2\sqrt{n}$ で大きくなる．λ_i とその平均 $2\sqrt{n}$ との差を $n^{-1/6}$ 倍した量の同時分布関数は収束し，次のようになる．

定理 2.2 ([1, 3, 10, 18])**.** 任意の $k \geq 1$ と $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}} \Big((\lambda_i - 2\sqrt{n}) n^{-1/6} \leq a_i,\ 1 \leq i \leq k \Big) = F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k).$$

定理 2.1 と定理 2.2 を比較することで，大雑把に言えば，Plancherel 測度における λ_i の極限分布は，GUE 行列の固有値 x_i の極限分布に一致するという現象が見られることになる．本稿で扱われる内容の目標は，この対応の類似・拡張を考えることにある．

§2.3. ランダム置換の最長増加部分列の長さの分布

Plancherel 測度の研究は，ランダム置換の問題と密接に関連している．$\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k), \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

を満たす列を σ の増加部分列と呼び，k をその長さと呼ぶ．各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，最も k が大きくなる増加部分列を最長増加部分列といい，その長さを $L^{\mathrm{in}}(\sigma)$ で表す．

例 2.3. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,2\,7\,1\,4\,3\,5\,6\,9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9 \tag{2.3}$$

に対し，13569 や 24569 が最長増加部分列であり，$L^{\mathrm{in}}(\sigma) = 5$ である．

RSK (Robinson-Schensted-Knuth) 対応を思い出そう．単に Robinson 対応，Robinson-Schensted 対応，RS 対応などとも呼ばれる．それによると対称群 $\mathfrak{S}_n$ の各元 σ は，同じ型 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ をもつ標準 Young 盤の順序付きペアと 1 対 1 に対応する（[22]）．例えば，(2.3) で与えられる σ に対しては，ペア

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6&9\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 7\\\cline{1-1} 8\\\cline{1-1}\end{array}\ , \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&3&7&8&9\\\hline 2&5\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1} 6\\\cline{1-1}\end{array}$$

が対応する．一般に，$L^{\mathrm{in}}(\sigma) = \lambda_1$ となることが知られている ([22, Theorem 3.3.2])．よって，任意の k に対し，等式

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda_1 = k) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) = k\}}{n!}$$

が成り立つ．このように，Plancherel 測度における λ_1 の分布は，一様に分布している置換 σ （確率 $\frac{1}{n!}$）における $L^{\mathrm{in}}(\sigma)$ の分布と一致する．定理 2.2 の系として次が分かる．

系 2.4 ([1])**.** 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) \leq 2\sqrt{n} + a n^{1/6}\}}{n!} = F_{\mathrm{GUE}}(a).$$

ここで，$F_{\mathrm{GUE}}(a) = F_{\mathrm{GUE},1}(a)$.

このように，一様ランダム置換の最長増加部分列の長さの極限分布として，GUE 行列の最大固有値の極限分布が現れる．

§2.4. シフト Plancherel 測度

定理 2.2 の類似の結果は幾つか得られている．その中の一つである，筆者の以前の結果をここで簡単に紹介しよう．過去の講究録 [16] も参考にしていただきたい．

分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ がストリクトであるとは，0 でない λ_i が全て異なるときをいう．$\mathcal{SP}_n$ でそのような n の分割全体とする．$\lambda \in \mathcal{SP}_n$ はシフト Young 図形と同一視される．g^λ を標準シフト Young 盤の個数とする．例えば，$\lambda = (3,2) \in \mathcal{SP}_5$ の標準シフト Young 盤は以下の 2 つである．

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 5 \\ \cline{2-3} \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 5 \\ \cline{2-3} \end{array}.$$

このとき，等式 $\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} 2^{n-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2 = n!$ が成り立つ（例えば [12, Corollary 10.8] 参照）．よって，$\mathcal{SP}_n$ 上の確率測度を

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}(\lambda) = \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!}, \qquad \lambda \in \mathcal{SP}_n,$$

で定義することができる．これをシフト Plancherel 測度と呼ぶ．

このシフト Plancherel 測度に対しても，定理 2.2 と同様の主張が成り立っている．

定理 2.5 ([14])**.** 任意の $k \geq 1$ と $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}} \left((\lambda_i - 2\sqrt{2n})(2n)^{-1/6} \leq a_i,\ 1 \leq i \leq k \right) = F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k).$$

このように，二つの測度 $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ と $\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ は有限の n では違う形であるにも関わらず，$n \to \infty$ とすると差異がほとんど無くなる．定理 2.5 では，定理 2.2 での n を $2n$ に置き換えた形になっている．また，§2.3 のような解釈は $\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ にもあって，それは置換の増加部分列の代わりに ascent pair というものを考えることになる．詳しくは [14, §4.2] を参照．

なお，f^λ が $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の次元であったように，g^λ にも表現論的な解釈がある．実際，$2^{\lfloor \frac{n-\ell(\lambda)}{2} \rfloor} g^\lambda$ が $\mathfrak{S}_n$ の既約な負の射影表現の次元となっている（[12]）．よって，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ は $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ の「射影版」と位置づけられる．

§2.5. Tracy-Widom GUE 分布

ここでは，上で登場した関数 $F_{\mathrm{GUE}}(a)$ や $F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k)$ の定義を述べる．文献 [10] を参考にしている．ここでの話は以降の章では必要無いので，読み飛ばしても構わない．

Airy 関数とは，

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt \right) dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

で定義される関数であり，微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$ の解として知られている．Airy 核 $\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x, y)$ は次で定まる:

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x, y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x - y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

このとき，Tracy-Widom GUE 分布 $F_{\mathrm{GUE}}(a)$ は Fredholm 行列式

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{GUE}}(a) &= \det(I - \mathcal{K}_{\mathrm{Airy}})|_{L^2((a,\infty))} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_{(a,\infty)^l} \det(\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le l} dt_1 \cdots dt_l \end{aligned} \tag{2.4}$$

で定義される．

一般の $F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k)$ は複雑な形になる．$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_k$ と仮定する．まず，

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(z_1, \ldots, z_k; a_1, \ldots, a_k) \\ =&\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_{\mathbb{R}^l} \prod_{i=1}^{l} \left(1 - \prod_{j=1}^{k} (1 + z_j \mathbf{1}_{(a_j, a_{j-1}]}(t_i)) \right) \det(\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le l} dt_1 \cdots dt_l \end{aligned}$$

とおく．ただし，$(a_1, a_0] = (a_1, \infty)$ と見なしており，$\mathbf{1}_I$ は区間 I の特性関数である．このとき，$F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k)$ は以下で定まる．

$$\begin{aligned} &F_{\mathrm{GUE},k}(a_1, \ldots, a_k) \\ &= \sum_{(n_1,\ldots,n_k) \in \mathbb{L}_k} \frac{1}{n_1! \cdots n_k!} \left[\frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_k}}{\partial z_1^{n_1} \cdots \partial z_k^{n_k}} \mathbf{F}(z_1, \ldots, z_k; a_1, \ldots, a_k) \right]_{z_1 = \cdots = z_k = -1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ただし，$\mathbb{L}_k = \{(n_1, \ldots, n_k) \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^k \mid 0 \le n_1 + \cdots + n_r \le r - 1 \ (1 \le r \le k)\}$．例えば，

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{GUE},1}(a) &= \mathbf{F}(-1; a) = F_{\mathrm{GUE}}(a), \\ F_{\mathrm{GUE},2}(a_1, a_2) &= \mathbf{F}(-1, -1; a_1, a_2) + \left[\frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{F}(z_1, z_2; a_1, a_2) \right]_{z_1 = z_2 = -1} \end{aligned}$$

となる．

§3. Jack 測度と Gauss 型 β アンサンブル

前章は，Plancherel 測度と GUE 行列について扱った．ランダム行列論では，GUE 以外に，GOE，GSE という代表的なランダム行列がある．より一般にそれらの固有値分布を拡張することで，GβE が定義される．この GβE に対応するランダム分割は何か，すなわち Plancherel 測度の類似物は何か．この章では，その対応物として Jack 測度を扱う．

我々の主結果は次の章 §4 で与えられる．この章はその準備である．

§ 3.1. Gauss 型 β アンサンブル

β を正の実数とする．集合 $\{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d \mid x_1\geq\cdots\geq x_d\}$ 上に確率密度

$$\frac{d!}{\Psi_d(\beta)}e^{-\frac{\beta}{2}(x_1^2+\cdots+x_d^2)}\prod_{1\leq i<j\leq d}(x_i-x_j)^\beta \tag{3.1}$$

を与えよう．ここで，$\Psi_d(\beta)$ は

$$\begin{aligned}\Psi_d(\beta)=&d!\int_{\substack{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d\\ x_1\geq\cdots\geq x_d}}e^{-\frac{\beta}{2}(x_1^2+\cdots+x_d^2)}\prod_{1\leq i<j\leq d}(x_i-x_j)^\beta dx_1\cdots dx_d\\ =&\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{\beta}{2}(x_1^2+\cdots+x_d^2)}\prod_{1\leq i<j\leq d}|x_i-x_j|^\beta dx_1\cdots dx_d\end{aligned}$$

で定義され，その値は Selberg 積分を通じて具体的に与えられる（[17, Theorem 4.1.1]）：

$$\Psi_d(\beta)=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\beta^{-\frac{d}{2}-\frac{\beta d(d-1)}{4}}\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^{-d}\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}j\right). \tag{3.2}$$

関数 (3.1) は，$\beta=2$ で GUE 行列の固有値の密度 (2.2) に一致している．一般に，確率密度 (3.1) を持つ確率空間 $\{x_1\geq\cdots\geq x_d\}$ を Gauss 型 β アンサンブルといい，GβE(d) または単に GβE とかく．

GUE は，成分の実部と虚部が独立に正規分布しているような Hermite 行列であった．類似のものとして，GOE （Gauss 型直交アンサンブル ; Gaussian orthogonal ensemble）と GSE （Gauss 型斜交アンサンブル ; Gaussian symplectic ensemble）がある．ここでは固有値の分布のみを扱うので行列の具体的な定義は省略するが，GOE 行列，GSE 行列はそれぞれ実対称行列，四元数 Hermite 行列になっている．また，GUE 行列の分布がユニタリ行列による変換で不変だったように，GOE 行列や GSE 行列のそれは直交行列や斜交行列による変換で不変になる．そして固有値分布は，(3.1) の $\beta=1,4$ でそれぞれ与えられる．

§ 3.2. Jack 測度の定義

α を正の実数とする．各 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し，

$$c_\lambda(\alpha)=\prod_{(i,j)\in\lambda}(\alpha(\lambda_i-j)+(\lambda_j'-i)+1),\qquad c_\lambda'(\alpha)=\prod_{(i,j)\in\lambda}(\alpha(\lambda_i-j)+(\lambda_j'-i)+\alpha) \tag{3.3}$$

とおく．さらに

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)=\frac{\alpha^n n!}{c_\lambda(\alpha)c_\lambda'(\alpha)} \tag{3.4}$$

と定める．この $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)$ は正の値である．また，$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)=1$ となることが知られている（[13, VI (10.32)] を参照）．したがって，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}$ は $\mathcal{P}_n$ 上の確率測度を定

めている．これを **Jack 測度**と呼ぶ．この Jack 測度は [4, 7, 8, 11, 20] などで研究されている．

Jack 測度は Plancherel 測度の拡張である．実際，$c_\lambda(1) = c'_\lambda(1) = H_\lambda$ だから，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},1} = \mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ である．また，関係式 $c'_\lambda(\alpha) = \alpha^{|\lambda|} c_{\lambda'}(\alpha^{-1})$ から，双対性

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda) = \mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha^{-1}}(\lambda')$$

が導かれる．

例 3.1. $\lambda = (4,2,2) \in \mathcal{P}_8$ に対し，$c_\lambda(\alpha)$ と $c'_\lambda(\alpha)$ はそれぞれ次の Young 図形内の数の積となる．

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3\alpha+3 & 2\alpha+3 & \alpha+1 & 1 \\ \hline \alpha+2 & 2 \\ \cline{1-2} \alpha+1 & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4\alpha+2 & 3\alpha+2 & 2\alpha & \alpha \\ \hline 2\alpha+1 & \alpha+1 \\ \cline{1-2} 2\alpha & \alpha \\ \cline{1-2} \end{array} .$$

例 3.2. $\mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}$ は具体的に以下のようになる．

$$\mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((3)) = \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)}, \quad \mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((2,1)) = \frac{6\alpha}{(2\alpha+1)(\alpha+2)},$$
$$\mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((1^3)) = \frac{\alpha^2}{(\alpha+2)(\alpha+1)}.$$

より具体的に，$\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$ のときに注目すると，

$$\left(\mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((3)), \mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((2,1)), \mathbb{P}_3^{\mathrm{Jack},\alpha}((1^3))\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{15}\right), & \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき}, \\ \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), & \alpha = 1 \text{ のとき}, \\ \left(\frac{1}{15}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right), & \alpha = 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ を一つ固定して $\alpha \to 0$ とすると，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)$ は $\lambda = (n)$ を除いて 0 になる．同様に $\alpha \to \infty$ では，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)$ は $\lambda = (1^n)$ を除いて 0 になる．このように，α に依ってどのような分割が選ばれやすいかが異なってくる．

§3.3. Jack 測度と GβE についての考察

Jack 測度は Plancherel 測度のパラメータ α 付きの拡張であり，GβE は GUE のパラメータ β 付きの拡張である．$\alpha = 1$ と $\beta = 2$ の間には，定理 2.1 &定理 2.2 のような関係があった．すなわち，$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ で $n \to \infty$ とするとき，また GUE(d) で $d \to \infty$ とするときに，それぞれにおける λ_i や x_i の（あるスケーリングでの）極限分布は一致した．また，$\alpha = \frac{1}{2}$ と $\beta = 4$（すなわち GSE 行列）の間の，定理 2.1 &定理 2.2 に対応した主張

は，[2, 6] で得られている．同様のことは，一般の Jack 測度と GβE にも拡張されると期待されている．そのときの α と β の対応は，

$$\alpha = 2/\beta$$

である．

我々は，定理 2.1 &定理 2.2 を Jack 測度へ拡張したい．しかし，既に得られている $\alpha = 1, 2$ の場合の手法を，他の α に対して適用することは難しい．

ランダム行列の一般的な理論を用いると，$\alpha = 1/2, 1, 2$（対応する β は順に $\beta = 4, 2, 1$）のときは，Jack 測度と GβE は共に行列式点過程またはパフィアン点過程という枠組みで捉えられる．それは，各測度に対応して定義される相関関数が，行列式またはパフィアンで表すことができるということである．ところが，一般の α や β ではそのような行列式・パフィアンといった枠組みで捉えられない．したがって，そのような特別な α や β 以外では，Jack 測度および GβE の扱いは難しい，というのが現状である．

しかしながら，我々は次の章で，全ての $\beta = 2/\alpha$ に対してJack 測度と GβE との間の関係を一つ与える．それは，定理 2.1 &定理 2.2 と似ているが，異なるものである．

§4. 制限された Jack 測度に関する極限定理

§4.1. Jack 測度の制限

ここで与える主結果は前章で定義した Jack 測度の制限についての主張である．n の分割全体ではなく，長さの制限された分割を考える．d を正の整数として固定する．記号 $\mathcal{P}_n(d)$ で長さが d 以下の n の分割全体を表すとする:

$$\mathcal{P}_n(d) = \{\lambda \in \mathcal{P}_n \mid \ell(\lambda) \le d\}.$$

Jack 測度 $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}$ をこの集合の上に制限する．すなわち，$\mathcal{P}_n(d)$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},\alpha}$ を次で定義する:

$$\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda) = \frac{1}{C_{n,d}(\alpha)} \frac{1}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n(d).$$

ここで定数 $C_{n,d}(\alpha)$ は

$$C_{n,d}(\alpha) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n(d)} \frac{1}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)}$$

と定めている．$d \ge n$ のときは，$\mathcal{P}_n(d) = \mathcal{P}_n$ であるから，(3.4) より $C_{n,d}(\alpha) = (\alpha^n n!)^{-1}$ である．$d < n$ のときは $C_{n,d}(\alpha)$ を具体的に表すことはできないが，$n \to \infty$ のときの漸近挙動を後で与える（補題 6.3）．

§4.2. トレースレス Gauss 型 β アンサンブル

β を正の実数とする．集合 $\mathfrak{H}_d$ を

$$\mathfrak{H}_d = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \ge \cdots \ge x_d, \quad x_1 + \cdots + x_d = 0\}$$

と定める．この集合上に，確率密度関数

$$\mathbb{P}_d^{\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0}(x_1,\dots,x_d)=\frac{1}{Z_d(\beta)}e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^d x_j^2}\prod_{1\le j<k\le d}(x_j-x_k)^\beta, \tag{4.1}$$

を考える．ここで，

$$Z_d(\beta)=\int_{\mathfrak{H}_d}e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^d x_j^2}\prod_{1\le j<k\le d}(x_j-x_k)^\beta dx_1\cdots dx_{d-1}. \tag{4.2}$$

と置いている．これは $x_d:=-(x_1+\cdots+x_{d-1})$ として $(x_1,\dots,x_d)\in\mathfrak{H}_d$ となるような，点 $(x_1,\dots,x_{d-1})\in\mathbb{R}^{d-1}$ たちの上での積分である．この $Z_d(\beta)$ の値は，Regev [21] により計算され，具体的な値が (3.2) の $\Psi_d(\beta)$ を用いて書ける:

$$Z_d(\beta)=\frac{1}{d!}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi d}}\Psi_d(\beta).$$

ただし，本稿ではこの具体的な値を特に必要としない．

確率密度関数 (4.1) を備えた確率空間 $\mathfrak{H}_d$ のことを，トレースレス Gauss 型 β アンサンブル (traceless Gaussian β-ensemble) と呼び，$\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0(d)$ と表すことにする．

$\beta=1,2,$ または 4 とする．このとき，$\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0(d)$ はそれぞれトレースが 0 であるような $d\times d$ の GOE, GUE, GSE ランダム行列の固有値の分布を与えている．

§ 4.3. 主結果

確率測度 $\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},\alpha}$ における確率変数 $\mathcal{P}_n(d)\ni\lambda\mapsto\lambda_i$ に関する，$n\to\infty$ での極限定理を与える．分割の長さが d 以下と制限されているので，$\lambda\in\mathcal{P}_n$ は定義から $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_d=n$ を満たす．十分 n が大きい時，各 λ_i は大体 $\frac{n}{d}$ くらいになりそうである．その差 $\lambda_i-\frac{n}{d}$ を $\sqrt{n}$ のスケールで見ると，そこに $\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0(d)$ の分布が見えてくる，ということを次の定理は主張している．

定理 4.1 (主定理)**.** α を任意の正の実数とし，$\beta=2/\alpha$ とおく．$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\mathcal{P}_n(d)$ を確率 $\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)$ で選ばれるランダム分割とする．また，$(x_1,\dots,x_d)\in\mathfrak{H}_d$ は，確率 $\mathbb{P}_d^{\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0}(x_1,\dots,x_d)$ で選ばれる確率変数列とする．このとき，$n\to\infty$ で，確率変数列

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha d}{n}}\left(\lambda_i-\frac{n}{d}\right)\right)_{1\le i\le d}$$

は $(x_i)_{1\le i\le d}$ に同時分布収束する．すなわち，次が成り立つ: 任意の $1\le k\le d$ と実数 $h_1,\dots,h_k$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\mathcal{P}_n(d)\\ \sqrt{\frac{\alpha d}{n}}\left(\lambda_i-\frac{n}{d}\right)\le h_i\ (1\le i\le k)}}\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)=\int_{\substack{(x_1,\dots,x_d)\in\mathfrak{H}_d\\ x_i\le h_i\ (1\le i\le k)}}\mathbb{P}_d^{\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0}(x_1,\dots,x_d)dx_1\cdots dx_{d-1}.$$

この定理の $\alpha = 1$ の場合（すなわち，Plancherel 測度の場合）は，Śniady [23] により与えられている．我々の結果はŚniady の結果を全ての α に対する Jack 測度へ拡張しており，対応する極限分布が GβE$_0$ ($\beta = 2/\alpha$) となっていることを主張している．

我々の主結果は，定理 2.2 の類似（拡張ではない）として位置づけられよう．定理 2.1 ＆定理 2.2 との違いを明記しておこう．

- 定理 2.1 ＆定理 2.2 では Plancherel 測度（$\alpha = 1$）と GUE 行列の固有値分布（$\beta = 2$）の間の関係を与えているが，定理 4.1 は 全ての正の実数 $\alpha = 2/\beta$ での Jack 測度と（トレースレス）GβE との関係を与えている．
- 定理 2.1 ＆定理 2.2 と異なり，定理 4.1 では，長さの制限されたランダム分割と，トレースが 0 のランダム行列（の β-拡張）を扱っていることになる．
- λ_i についてのスケーリングが異なっている．これは，集合 $\mathcal{P}_n(d)$ 上では λ の長さが制限されているために起こっている．
- 定理 2.1 ＆定理 2.2 ではランダム行列のサイズ d を無限大に飛ばして初めて λ_i の分布と一致しているのに対し，定理 4.1 では d が有限で一致している．

一般の $\alpha > 0$ における Jack 測度の，λ_i たちの関する極限分布についての主張は，筆者の知る限りこれまでに無かった．定理 4.1 は，分割の長さが制限されているとはいえ，Jack 測度と GβE の間の深い関係を表しているといえよう．

§ 5.　RSK 対応

ここでは，Jack 測度の $\alpha = 1, \frac{1}{2}, 2$ の場合を RSK 対応を通じて解釈することを目的とする．

§ 5.1.　Plancherel 測度 ($\alpha = 1$) の場合

再び RSK 対応を思い出そう．§2.3 で置換 σ の最長増加部分列の長さを $L^{\mathrm{in}}(\sigma)$ と置いたが，同様に最長減少部分列の長さを $L^{\mathrm{de}}(\sigma)$ と書くことにする．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の各元 σ が，型 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の標準 Young 盤の順序付きペアと対応しているとする．このとき $L^{\mathrm{in}}(\sigma) = \lambda_1$, $L^{\mathrm{de}}(\sigma) = \lambda'_1 (= \ell(\lambda))$ となる ([22, Theorem 3.3.2])．したがって，次が成り立つ．

補題 5.1.　任意の正の整数 a, d に対し，

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_n(d) \\ \lambda_1 \le a}} \mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},1}(\lambda) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le a, \quad L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le d\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le d\}}.$$

この左辺は確率測度 $\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},1}$ における確率変数 λ_1 の分布関数 $\mathbb{P}_{n,d}^{\mathrm{Jack},1}(\lambda_1 \le a)$ に他ならない．一方右辺は，$L^{\mathrm{de}}(\sigma)$ が高々d であるような置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 全体での，さらに $L^{\mathrm{in}}(\sigma)$ が高々a であるものの割合である．

§5.2. $\alpha = 2$ または $\frac{1}{2}$ の場合

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対し，$2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$, $\lambda \cup \lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots)$ とおく．次は定義から容易に確かめられる:

$$c_\lambda(2) c'_\lambda(2) = H_{2\lambda}, \qquad c_\lambda(1/2) c'_\lambda(1/2) = 2^{-2n} H_{\lambda\cup\lambda}.$$

さらに鉤公式 $f^\mu = n!/H_\mu$ を用いることで，

$$\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},2}_{n,d}(\lambda) \propto f^{2\lambda}, \qquad \mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\frac{1}{2}}_{n,d}(\lambda) \propto f^{\lambda\cup\lambda}$$

が分かる．

対称群 $\mathfrak{S}_N$ の元 σ が，同じ型 $\mu \in \mathcal{P}_N$ の標準 Young 盤のペア (P, Q) に対応しているとしよう．このとき，σ^{-1} はペア (Q, P) に対応する ([22, Theorem 3.6.6])．よって，$\mathfrak{S}_N$ の中での対合（involution）全体は，サイズ N の標準 Young 盤全体と 1 対 1 対応している．ここで，σ が対合であるとは，$\sigma^{-1} = \sigma$ となるときをいう．

今，対合 σ が丁度 k 個の固定点を持つとし，また σ は型 μ の標準 Young 盤 P に対応しているとする．このとき，P の奇数の長さをもつ列の個数は k に等しい（[22, Excercises 3.12.7]）．特に，N が偶数のとき，固定点を持たない $\mathfrak{S}_N$ 内の対合の個数は，$\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_N \\ \mu':\mathrm{even}}} f^\mu$ に等しい．ここで，μ' が even であるとは，μ' の成分が全て偶数であるときをいう．そのような μ はいつでも $\mu = \lambda \cup \lambda$, $\lambda \in \mathcal{P}_{\frac{N}{2}}$ の形で表すことができる．したがって，$L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le a$ かつ $L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2b$ を満たし，さらに固定点を持たないような $\mathfrak{S}_{2n}$ 内の対合の個数は，

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n \\ \lambda_1 \le a,\ \lambda'_1 \le b}} f^{\lambda\cup\lambda} = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n \\ \lambda_1 \le b,\ \lambda'_1 \le a}} f^{2\lambda}$$

に等しい．

$\mathfrak{S}_{2n}$ 内の固定点を持たない対合全体の集合を $\mathfrak{S}^0_{2n}$ とおく．言いかえれば，$\mathfrak{S}^0_{2n}$ はサイクルタイプが (2^n) となる置換全体であり，$\#\mathfrak{S}^0_{2n} = (2n-1)!!$ である．

以上より次が言える．

補題 5.2. 任意の正の整数 a, d に対し，等式

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n(d) \\ \lambda_1 \le a}} \mathbb{P}^{\mathrm{Jack},1/2}_{n,d}(\lambda) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}^0_{2n} \mid L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2d, \quad L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le a\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}^0_{2n} \mid L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2d\}},$$

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n(d) \\ \lambda_1 \le a}} \mathbb{P}^{\mathrm{Jack},2}_{n,d}(\lambda) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}^0_{2n} \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le d, \quad L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2a\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}^0_{2n} \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le d\}}$$

が成り立つ．

§5.3. 最長増加（減少）部分列の長さに関する極限定理

補題 5.1 と補題 5.2 から，我々の定理 4.1 の次の系を得ることができる．ただし，1 つ目の主張は [23] で得られている．

系 5.3. d を任意の正の整数，h を任意の実数とする．

1. 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sqrt{\frac{d}{n}}\left(L^{\mathrm{in}}(\sigma) - \frac{n}{d}\right) \le h, \quad L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le d\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le d\}}$$

は存在し，その値は $d \times d$ の GUE_0 ランダム行列の最大固有値が h 以下となる確率に等しい．

2. 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^0 \mid \sqrt{\frac{d}{2n}}\left(L^{\mathrm{in}}(\sigma) - \frac{n}{d}\right) \le h, \quad L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2d\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^0 \mid L^{\mathrm{de}}(\sigma) \le 2d\}}$$

は存在し，その値は $d \times d$ の GSE_0 ランダム行列の最大固有値が h 以下となる確率に等しい．

3. 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^0 \mid \sqrt{\frac{2d}{n}}\left(\frac{L^{\mathrm{de}}(\sigma)}{2} - \frac{n}{d}\right) \le h, \quad L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le d\}}{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^0 \mid L^{\mathrm{in}}(\sigma) \le d\}}$$

は存在し，その値は $d \times d$ の GOE_0 ランダム行列の最大固有値が h 以下となる確率に等しい．

このように，ランダム置換の最長増加（減少）部分列の長さの極限分布と，ランダム行列の固有値分布との間の関連性が見られる．

§6. 定理 4.1 の証明の概略

定理 4.1 は，やや技術的だが初等的な計算で得ることができる．証明の中心的なアイディアは，我々の結果の $\alpha = 1$ の場合である [23] のそれと同じである．我々はまず，Jack 測度の密度の，ガンマ関数を用いた次の表示を使う．

補題 6.1. 任意の正の実数 α と $\lambda \in \mathcal{P}_n(d)$ に対して，

$$c_\lambda(\alpha) = \alpha^n \prod_{1\le i<j\le d} \frac{\Gamma(\lambda_i - \lambda_j + (j-i)/\alpha)}{\Gamma(\lambda_i - \lambda_j + (j-i+1)/\alpha)} \cdot \prod_{i=1}^{d} \frac{\Gamma(\lambda_i + (d-i+1)/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)},$$

$$c'_\lambda(\alpha) = \alpha^n \prod_{1\le i<j\le d} \frac{\Gamma(\lambda_i - \lambda_j + (j-i-1)/\alpha + 1)}{\Gamma(\lambda_i - \lambda_j + (j-i)/\alpha + 1)} \cdot \prod_{i=1}^{d} \Gamma(\lambda_i + (d-i)/\alpha + 1).$$

補題 6.1 の式の右辺たちは λ_i が整数でなくとも意味を持つ．一般に $r_1+\cdots+r_d=n$ を満たす非負実数の列 $r_1\ge\cdots\ge r_d\ge 0$ に対して，補題 6.1 の右辺の各 λ_i を r_i に置き換えたものとして，$c_{(r_1,\dots,r_d)}(\alpha)$ と $c'_{(r_1,\dots,r_d)}(\alpha)$ を定めよう．次は，Stirling の公式などを適用することで得ることが出来る．

補題 6.2. 任意の $(y_1,\dots,y_d)\in\mathfrak{H}_d$ に対し，$r_i=\frac{n}{d}+y_i\sqrt{\frac{n}{d}}$ $(1\le i\le d)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}(2\pi)^d\left(\frac{n}{d}\right)^{2n+\frac{d+d^2}{2\alpha}}}{\Gamma(1/\alpha)^d e^{2n}}\frac{1}{c_{(r_1,\dots,r_d)}(\alpha)c'_{(r_1,\dots,r_d)}(\alpha)}\\ =&e^{-y_1^2-\cdots-y_d^2}\prod_{1\le i<j\le d}(y_i-y_j)^{2/\alpha}.\end{aligned}$$

上の補題は，$(y_1,\dots,y_d)\in\mathfrak{H}_d$ の関数としての各点収束を表している．大雑把に言うと，十分大きな n に対し，ランダム分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ の密度が $\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{n,d}(\lambda)$ で与えられているとき，$y_i=\sqrt{\frac{d}{n}}(\lambda_i-\frac{n}{d})$ たち（の定数倍）の密度が $\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_0$ $(\beta=2/\alpha)$ に従うということである．

和 $C_{n,d}(\alpha)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n(d)}(c_\lambda(\alpha)c'_\lambda(\alpha))^{-1}$ の $n\to\infty$ での漸近挙動について次が言える．

補題 6.3.

$$\lim_{n\to\infty}C_{n,d}(\alpha)\frac{\alpha^{2n}(2\pi)^d\left(\frac{n}{d}\right)^{2n+\frac{d^2+d}{2\alpha}-\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(1/\alpha)^d e^{2n}}=\alpha^{-\frac{d(d-1)}{2\alpha}-\frac{d-1}{2}}Z_d(2/\alpha).$$

証明の概略． まず，

$$\begin{aligned}&C_{n,d}(\alpha)\frac{\alpha^{2n}(2\pi)^d\left(\frac{n}{d}\right)^{2n+\frac{d^2+d}{2\alpha}-\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(1/\alpha)^d e^{2n}}\\ =&\sum_{\substack{\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_d\ge 0\\ \lambda_d:=n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{d-1})}}\left(\sqrt{\frac{d}{n}}\right)^{d-1}\frac{1}{c_\lambda(\alpha)c'_\lambda(\alpha)}\frac{\alpha^{2n}(2\pi)^d\left(\frac{n}{d}\right)^{2n+\frac{d^2+d}{2\alpha}}}{\Gamma(1/\alpha)^d e^{2n}}.\end{aligned}$$

各整数 $r\in\mathbb{Z}$ に対し，$\xi_r^{(n)}=\sqrt{\frac{d}{n}}\left(r-\frac{n}{d}\right)$ とおく．すなわち，$\lambda_i=\frac{n}{d}+\xi_{\lambda_i}^{(n)}\sqrt{\frac{n}{d}}$ である．上の式は，体積が $\left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{d-1}{2}}$ である集合

$$[\xi_{\lambda_1}^{(n)},\xi_{\lambda_1+1}^{(n)})\times\cdots\times[\xi_{\lambda_{d-1}}^{(n)},\xi_{\lambda_{d-1}+1}^{(n)})$$

から，点 $(\xi_{\lambda_1}^{(n)},\dots,\xi_{\lambda_{d-1}}^{(n)})$ を取り出して和をとっていると思える．$\xi_{\lambda_d}^{(n)}$ は自動的に決まっていることに注意する．したがって，上の和は Riemann 和と見なすことができて，よって補題 6.2 から積分

$$\int_{\substack{(y_1,\dots,y_{d-1},y_d)\in\mathfrak{H}_d\\ y_d:=-(y_1+\cdots+y_{d-1})}}e^{-y_1^2-\cdots-y_d^2}\prod_{1\le i<j\le d}(y_i-y_j)^{2/\alpha}dy_1\cdots dy_{d-1}$$

に収束することが分かる．後は，変数変換 $y_j = \alpha^{-1/2}x_j$ を行えば $Z_d(2/\alpha)$ が見える．

ただし，補題 6.2 では被積分関数の各点収束しか述べていないので，その積分を扱うことは乱暴である．厳密には，優関数を巧くとって優収束定理を適用するべきである．この優関数を巧くとる点が，やや技巧的であり手間がかかる．詳細はここでは割愛する． □

上の補題の証明中の和を $\sqrt{\alpha}\xi^{(n)}_{\lambda_i} \le h_i$ $(1 \le i \le k)$ となる λ に制限し，それと補題 6.3 の主張との比をとれば分布関数が得られる．それにより定理 4.1 の証明が完成する．詳しい証明は [15] を御覧いただきたい．

§ 7.　Jack 対称関数と Jack 測度

Jack 測度の名は Jack 対称関数に由来している．その理由を簡単に説明しよう．

$\mathcal{P}$ を分割全体とする：$\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$．ただし $\mathcal{P}_0$ は 0 の分割 (0) のみからなる．実係数の対称関数のなす代数を Λ と表す。Macdonald の本 [13] に従い Jack 対称関数を $J^{(\alpha)}_{\lambda}$ とする．特に，s_λ を Schur 関数とすると $J^{(1)}_{\lambda} = H_\lambda s_\lambda$ である．ここで，H_λ は (2.1) で定義されている鉤の長さの積（hook-length product）である．次の Cauchy 恒等式が成り立つ．

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \frac{J^{(\alpha)}_{\lambda}(\mathbf{x}) J^{(\alpha)}_{\lambda}(\mathbf{y})}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)} = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - x_i y_j)^{-1/\alpha}.$$

ここで，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$．この等式から，$\mathcal{P}$ 上に形式的な確率測度

$$\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - x_i y_j)^{1/\alpha} \cdot \frac{J^{(\alpha)}_{\lambda}(\mathbf{x}) J^{(\alpha)}_{\lambda}(\mathbf{y})}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}, \tag{7.1}$$

が定義できる．特に $\alpha = 1$ のときは，これは Okounkov の Schur 測度と呼ばれている．もちろん $\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda)$ は厳密な意味での測度ではない．ちゃんとした測度にするためには，対称関数の特殊化を考えて，密度が非負実数で，かつ Cauchy 恒等式が形式的ではなく解析関数として意味を持たなければならない．

そのような $\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ の特殊化を一つ与えよう．$\xi > 0$ を実数とし，Λ 上の代数準同型関数 ϕ を

$$\phi(p_r) = \sqrt{\xi}\delta_{r,1}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

と定める．ここで，p_r は冪和対称関数 $p_r(\mathbf{x}) = x_1^r + x_2^r + \cdots$ である．このとき，$\phi(J^{(\alpha)}_{\lambda}) = \xi^{\frac{|\lambda|}{2}}$ が成り立つ．よって，$\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ の特殊なケースとして，確率測度

$$\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha,\xi}(\lambda) = e^{-\xi/\alpha} \frac{\xi^{|\lambda|}}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}$$

を得る．これを $\mathcal{P}_n$ または $\mathcal{P}_n(d)$ 上に制限し，確率測度になるように適当に定数倍することで，Jack 測度 $\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{n}$ や $\mathbb{P}^{\mathrm{Jack},\alpha}_{n,d}$ が復元される．なお，§2.4 で述べたシフト Plancherel

測度は，Jack 対称関数の代わりに Schur の Q 関数を考えれば，上と同様の議論で得られる．

この特殊化以外にも (7.1) の特殊化を考えることができる．$0<\eta<1$ を実数，N を正の整数として，Λ 上の代数準同型関数 ψ を，

$$\psi(p_r)=N\eta^r, \qquad r=1,2,\dots$$

と定めよう．これは $\Lambda \ni f(\mathbf{x}) \mapsto f(\underbrace{\eta,\dots,\eta}_{N},0,0,\dots)$ という特殊化に他ならない．このとき，

$$\psi(J_\lambda^{(\alpha)})=\eta^{|\lambda|}\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+\alpha(j-1)-(i-1))$$

となる（[13, VI.(10.20)]）．この特殊化 ψ を通じて，Jack 測度 (7.1) の特殊化である $\mathcal{P}$ 上の確率測度が定まる．

$$\mathbb{P}_{N;\eta}^{\mathrm{Jack},\alpha}(\lambda)=(1-\eta^2)^{N^2/\alpha}\cdot\frac{\eta^{2|\lambda|}\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+\alpha(j-1)-(i-1))^2}{c_\lambda(\alpha)c'_\lambda(\alpha)}, \qquad \lambda\in\mathcal{P}.$$

特に $\alpha=1$ ならば，$\psi(J_\lambda^{(\alpha)})=\eta^{|\lambda|}H_\lambda s_\lambda(1^N)$ であり，$s_\lambda(1^N)$ は番号 $\{1,2,\dots,N\}$ を使って表示される型 λ の半標準 Young 盤（semi-standard tableaux）の個数である．また $s_\lambda(1^N)$ はユニタリ群 $U(N)$ の既約表現の次元でもある．測度 $\mathbb{P}_{N;\eta}^{\mathrm{Jack},1}(\lambda)$ における定理 2.2 の類似は [9] で得られている．しかし一般の α では Jack 測度 $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Jack},\alpha}$ と同じく，対応する極限定理は知られていない．

このように，Plancherel 測度や Jack 測度の背後には，Schur 関数や Jack 関数といった対称関数が潜んでいる．

References

[1] Baik, J., Deift, P., and Johansson, K., On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 4, 1119–1178.

[2] Baik, J. and Rains, E. M., The asymptotics of monotone subsequences of involutions, *Duke Math. J.* **109** (2001), no. 2, 205–281.

[3] Borodin, A., Okounkov, A., and Olshanski, G., Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481–515.

[4] Borodin, A. and Olshanski, G., Z-measures on partitions and their scaling limits, *European J. Combi.* **26** (2005), 795–834.

[5] Forrester, P. J., *Log-gases and Random matrices*, book in preparations, `http://www.ms.unimelb.edu.au/~matpjf/matpjf.html`.

[6] Forrester, P. J., Nagao, T., and Rains, E. M., Correlation functions for random involutions, *Internat. Math. Res. Notices* (2006), articleID 89796, 1–35.

[7] Fulman, J., Stein's method, Jack measure, and the Metropolis algorithm, *J. Combin. Theory* Ser. A **108** (2004), 275–296.

[8] Fulman, J., Stein's method and random character ratios, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), no. 7, 3687–3730.
[9] Johansson, K., Shape fluctuations and random matrices, *Comm. Math. Phys.* **209** (2000), no. 2, 437–476.
[10] Johansson, K., Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Ann. Math.* **153** (2001), 259–296.
[11] Hora, A. and Obata, N., *Quantum probability and spectral analysis of graphs*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Berlin, 2007.
[12] Hoffman, P. N. and Humphreys, J. F., *Projective representations of the symmetric groups. Q-functions and shifted tableaux*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1992.
[13] Macdonald, I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.
[14] Matsumoto, S., Correlation functions of the shifted Schur measure, *J. Math. Soc. Japan* **57** (2005), 619–637.
[15] Matsumoto, S., Jack deformations of Plancherel measures and traceless Gaussian random matrices, *Electron. J. Combin.* **15** (2008), # R149, 18pp.
[16] 松本 詔, シューア測度とその類似の極限分布，数理解析研究所講究録 **1438** (2005), 表現論における組合せ論的手法とその応用，66–82.
[17] Mehta, M. L., *Random matrices*, 3rd ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
[18] Okounkov, A., Random matrices and random permutations, *Internat. Math. Res. Notices* (2000), 1043–1095.
[19] 岡田聡一，古典群の表現論と組合せ論，上・下，数理物理シリーズ 3・4，培風館，2006.
[20] Okounkov, A., The uses of random partitions, XIVth International Congress on Mathematical Physics, 379–403, World Sci. Publ., Hackensack, NJ 2005, available: arXiv:math-ph/0309015v1.
[21] Regev, A., Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams, *Adv. in Math.* **41** (1981), 115–136.
[22] Sagan, B. E., *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, **203**, Springer-Verlag, New York, 2001.
[23] Śniady, P., Permutations without long decreasing subsequences and random matrices, *Electron. J. Combin.* **14** (2007), no. 1, R11, 9 pages.
[24] Tracy, C. A. and Widom, H., Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Comm. Math. Phys.* **159** (1994), no. 1, 151–174.
[25] Tracy, C. A. and Widom, H., Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices, *J. Statist. Phys.* **92** (1998), 809–835.