RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 71–93

階数 4 の multiplicity-free 作用に関する不変式 (Invariant Polynomials for Multiplicity-free Actions of Rank Four)

By

菊地 克彦 (Katsuhiko Kikuchi) *

Abstract

Let V be a finete-dimensional vector space over $\mathbb{C}$, K a connected compact Lie group acting on V as a linear isomprphism. We call the action (K, V) multiplicity-free if each irreducible K-mudule appears at most one in the polynomial ring $\mathcal{P}(V)$. In this announcement we describe K-invariant polynomials and K-invariant differential operators for the multiplicity-free actions (K, V) of rank four such that (K, V) is not derived from a Hermitian symmetric pair. Moreover, we give two 'symmetric' slices for visibility of each action (K, V) in this announcement. We show that the symmetric slice indicates a symmetry of invariant polynomials or of invariant differential operators for the action.

序文

V を (有限次元) 複素 vector 空間, K を V に線型かつ局所効果的に作用する compact Lie 群とする．すると, K は V 上の (正則) 多項式環 $\mathcal{P}(V)$ に自然に作用する．このとき, 作用 (K, V) が **multiplicity-free** であるとは, K の $\mathcal{P}(V)$ への作用において, 各既約成分が高々重複度 1 で現れることである．この論文では, 作用 (K, V) の階数が 4 であるものについて, 各既約成分に自然に対応する不変式と不変微分作用素を具体的に記述する．

作用 (K, V) が multiplicity-free であるとする．$\overline{\mathcal{P}(V)}$, $\mathcal{PD}(V)$ でそれぞれ V 上の反正則多項式環, 多項式係数微分作用素環, $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ でそれぞれ $\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)}$, $\mathcal{PD}(V)$ の K-不変元全体のなす部分環を表し, それぞれ V 上の K-不変式環, K-不変微分作用素環と呼び, それらの元をそれぞれ K-不変式, K-不変微分作用素と呼ぶ. $\mathcal{P}(V)$ の各既約成分 P_λ に対して $\mathcal{PD}(V)$ の K-不変式 $p_\lambda(z, \overline{z})$, K-不変微分作用素 $p_\lambda(z, \partial)$ が自然に定まり, それら全体がそれぞれ $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ の基底をなす.

Received December 24, 2008. Accepted November 16, 2009.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 22E46, Secondary 05E05, 16S32, 20G05
Key Words: *representation theory, multiplicity-free action*
*Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
e-mail: kikuchi@math.kyoto-u.ac.jp

作用 (K, V) が multiplicity-free であるとき, $\mathcal{P}(V)$ に現れる既約成分に対応する highest weight 全体は自由 Abel 半群になる．その半群の基底をなす highest weight を基本 highest weight と呼び, その個数を (K, V) の階数と呼ぶ．すると, $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ はそれぞれ基本 highest weight $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ に対応する K-不変式, K-不変微分作用素たちを変数とする多項式環になる ([7])．この論文の目標は, $\mathcal{P}(V)$ の任意の既約成分 P_λ に対して, $p_\lambda(z, \overline{z})$, $p_\lambda(z, \partial)$ をそれぞれ $p_{\lambda_j}(z, \overline{z})$, $p_{\lambda_j}(z, \partial)$ たちの多項式として具体的に記述することである．

K-不変微分作用素 $p_\lambda(z, \partial)$ は $\mathcal{P}(V)$ の任意の既約成分 P_μ を保存し, 各 P_λ 上では scalar 倍として作用する．その scalar を $\binom{\mu}{\lambda}$ と表し, 2 項係数と呼ぶ．すべての P_μ に対して $\binom{\mu}{\lambda}$ が分かれば $p_\lambda(z, \partial)$ を表す $p_{\lambda_j}(z, \partial)$ たちの多項式を具体的に求めることができる．この 2 項係数は次の性質をもつ．K の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の複素化 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の正 root の和の $\dfrac{1}{2}$ 倍を ρ で表すとする．ρ を用いて 2 項係数を $\tau_\lambda(\mu + \rho) = \binom{\mu}{\lambda}$ と表すとき, τ_λ はある有限群 W の作用および零点により決定される ([11])．このことは, 2 項係数の具体的な形を求める際にとても有用である．

(K, V) が Hermite 型であるときには, (K, V) の階数は対応する Hermite 対称対の階数と一致する．また, $\mathcal{P}(V)$ の既約成分に対応する highest weight λ は分割, 即ち単調非増加非負整数列 $(l_1, \ldots, l_r)$ で表され, $p_\lambda(z, \overline{z})$, $\binom{\mu}{\lambda}$ はそれぞれ r 変数 Jack 多項式, shifted Jack 多項式で表される．従って, 一般の multiplicity-free 作用に対する不変式や 2 項係数を計算することは, Jack 多項式や shifted Jack 多項式のある種の一般化を求めることとみなすことができる．

2 つの作用 (K_1, V_1), (K_2, V_2) が弱同値であるとき, それぞれの不変式および不変微分作用素は自然な対応により同一視される．また, 2 つの作用 (K_1, V_1), (K_2, V_2) の直積で表される作用 $(K_1 \times K_2, V_1 \oplus V_2)$ に関する $K_1 \times K_2$-不変式, $K_1 \times K_2$-不変微分作用素はそれぞれ K_1-不変式と K_2-不変式, K_1-不変微分作用素と K_2-不変微分作用素の積で表される．よって, indecomposable で Hermite 型作用と弱同値でない multiplicity-free 作用に関する不変式および不変微分作用素を求めることが問題となる．indecomposable な作用 (K, V) の階数が 2 以下であるとき, (K, V) はある Hermite 型作用と弱同値になる．Hermite 型作用と弱同値でない階数 3 の indecomposable な mulitiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素は [10] で求められている．これらの結果を基にして, この論文では Hermite 型作用と弱同値でない indecomposable な multiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素を求める．このような作用は以下のものである．

(1) $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{Mat}(2, n, \mathbb{C})), \quad n \geq 2,$

(2) $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4), \mathbb{C}^4 \oplus \wedge^2(\mathbb{C}^4)),$

(3) $(\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n), \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}), \quad n \geq 2,$

ただし, $\wedge^2(\mathbb{C}^4)$ は 4 次複素交代行列全体のなす vector 空間を表す．(1), (2) は [12] において半古典型あるいは case II, (3) は case VI と呼ばれるもののうち階数が 4 となるものである．これらの作用 (K, V) はすべて既約成分が 2 個の可約な作用である．

この論文で扱う 3 個の作用 (K, V) は, すべて基本 highest weight vector として 2 個の

1 次多項式と 2 個の 2 次多項式をもつ．1 次の基本 highest weight vector はそれぞれ V の 2 個の既約成分に対応する．また, (1), (2) については, 2 次の基本 highest weight vector のうちの 1 個は K(に局所同型な群) を真に含み, その作用が Hermite 型になる compact Lie 群 K_1 の $\mathcal{P}(V)$ への作用の基本 highest weight vector として現れるものであり, (3) では 2 次の基本 highest weight vector はともに K(に局所同型な群) を含む $\mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2)$ の $\mathcal{P}(V)$ への作用に現れる基本 highest weight vector になっている．これらの基本 highest weight vector に “対応する” 不変式を用いて, $\mathcal{P}(V)$ の任意の既約成分に対応する不変式は, (scalar 倍を除いて) 通常の意味の 2 項係数および下降冪の比を係数とし, 1 次, 2 次基本 highest weight vector に対応する不変式をそれぞれ 1 次式, 2 次式とみなしたときの斉次多項式として表される．これは, 2 変数の Schur 多項式を 1 次および 2 次の基本対称式の多項式として表したとき, 係数に通常の意味の 2 項係数が現れることの一般化と考えることができ, これは, 階数 2 および Hermite 型作用と弱同値でない階数 3 の作用にも共通して現れる性質である．具体的には, (1), (2) については各項が 2 個の文字で parametrize されるが, その係数はさらに別の文字に関する和として表される．(3) については, $\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(2n)$-不変式と, 2 次の基本 highest weight vector に対応する 2 個の不変式たちを変数とする多項式の積として表される．その 2 個目の因子は $\mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2)$ に関する不変式の因子として現れるものである．

それぞれの作用の 2 項係数は, 不変式の多項式としての表示における 1 次の基本 highest weight vector に対応する不変式を 1 次式の下降冪に, 2 次の基本 highest weight vector に対応する不変式を 1 次式の下降冪 2 個の積に置き換えたものとして得られる．従って, そこに現れる係数は本質的に変わらない．ただし, (1), (2) の作用においては, 2 次の基本 highest weight vector に対応する不変式の 1 つを他の不変式の差として 2 項展開してから下降冪の積に置き換えるので, 4 個の文字についての和の形で表される．(3) については, 不変式と同様に 2 項係数も 2 個の多項式の積で表される．この 2 項係数と, 基本 highest weight vector に “対応する” 不変微分作用素の固有値を比較することにより, $\mathcal{P}(V)$ の各既約成分に対応する不変微分作用素を求めることができる．具体的には, 下降冪およびその積を微分作用素の積に置き換えたものになる．これらのことも, 階数 2 および Hermite 型作用と弱同値でない階数 3 の作用に共通する性質である．

作用の multiplicity-free 性は (強) 可視性と密接な関連がある ([14])．複素多様体 V への Lie 群 K の作用が強可視的であるとは, V の開部分集合 D, D 上の反正則微分同相 σ および D の実部分多様体 S が存在し, 以下の性質を満たすことである．(I) $K\cdot S=D$. (II) σ は D の任意の K-軌道を保存．(III) σ の S 上への制限は恒等写像．このときの S を slice と呼ぶ．特に, V が有限次元複素 vector 空間, K が compact Lie 群であるとき, 作用 (K,V) が multiplicity-free であることと, 強可視的であることは同値である ([19])．(K,V) が Hermite 型であるとき, K を極大 compact 部分群としてもつ非 compact 単純 Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ に現れる $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ (に実 vector 空間として同型なもの) を slice としてとることができ, slice のもつ対称性が不変式や 2 項係数の対称性に反映する．この論文では, 扱う 3 個のそれぞれの作用について, 反正則微分同

相として通常の複素共役をとった上で, 2 個ずつ slice S_1, S_0 を与える. これらの slice は, 不変式や 2 項係数の対称性に関係するものであり, [19] で与えられた slice とは本質的に異なる. 具体的には, それぞれの作用について, S_1 は実部分 vector 空間となり不変式の対称性に対応, S_0 は次元が作用の階数と等しい 4 で 2 項係数の対称性に対応し, さらに, S_1 は S_0 を実 vector 空間として生成する. また, S_1 の次元は (1), (2) については 6, (3) については 8 で, 特に, (1), (2) の S_1 同士, S_0 同士が自然に対応することに注意する.

以下, この論文では 1 節で基本事項をまとめ, 2 節にて Hermite 型作用について不変式と 2 項係数を論じ, それらを含めて現在まで知られている結果を整理し, この論文で述べる対象を明確にする. そして, 続く 3, 4, 5 節においてそれぞれ (3), (1), (2) の作用について不変式, 2 項係数, 不変微分作用素の正確な形を与え, 強可視性を示す slice を具体的に与える.

なお, この論文の一部は反橋拓朗氏との共同研究である.

§1. 準備

V を (有限次元) 複素 vector 空間, K を V に線型かつ局所効果的に作用する compact Lie 群とする. すると, K は V 上の (正則) 多項式環 $\mathcal{P}(V)$ に自然に作用する.

Definition 1.1. 作用 (K, V) が **multiplicity-free** であるとは, K の $\mathcal{P}(V)$ への作用において, 各既約成分が高々重複度 1 で現れることである.

$\overline{\mathcal{P}(V)}$ で V 上の反正則多項式環を表す. これは, $\overline{V}$ で V の複素共役 vector 空間, 即ち, 実 vector 空間としては V と同じもので, 複素数体の作用が V のときと複素共役になるものとするとき, $\overline{V}$ の正則多項式環とみなせるものである. $n = \dim V$ とし, V 上の K-不変な Hermite 内積 $(\cdot,\cdot)_V$ を 1 つ固定し, この内積に関する正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ をとり, この基底についての座標函数を $z_1, \dots, z_n$ とする. すると, $\mathcal{P}(V)$ の元は $z_1, \dots, z_n$ の多項式で表され, $\overline{\mathcal{P}(V)}$ の元は座標函数の複素共役 $\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n$ の多項式で表される. $z = z_1e_1 + \cdots + z_ne_n \in V$ に対応する $\overline{V}$ の元を $\overline{z}$ で表すとする. すると, K は $k \cdot \overline{z} = \overline{k \cdot z}$ $(k \in K,\ z \in V)$ により V への作用と反傾に $\overline{V}$ に作用する. また, V 上の正則多項式 $f \in \mathcal{P}(V)$ に対して, $\overline{f}(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ で V 上の反正則多項式 $\overline{f} \in \overline{\mathcal{P}(V)}$ が自然に定まる.

$\mathcal{P}(V)$ には以下で与えられる Fischer 内積を入れる.

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\pi^n} \int_V f_1(z)\overline{f_2(z)} e^{-\|z\|_V^2} d\mu(z), \tag{1.1}$$

ただし, $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(V)$, $\|\cdot\|_V$ は V 上の K-不変な内積 $(\cdot,\cdot)_V$ から得られる norm で, μ は V を $\mathbb{R}^{2n}$ とみなしたときの Lebesgue 測度とする. これは次のようにも表される. $f_1(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$, $f_2(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ としたとき, $(f_1, f_2)_{\mathcal{F}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \alpha! a_\alpha \overline{b}_\alpha$, ただし, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

V 上の多項式係数微分作用素全体のなす環を $\mathcal{PD}(V)$ で表すことにする. このとき,

K は $\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)}$, $\mathcal{PD}(V)$ に以下のように作用する.

$$(k\cdot f_1\otimes\overline{f}_2)(z,\overline{z}) = f_1\otimes\overline{f}_2(k^{-1}\cdot z, k^{-1}\cdot\overline{z}) = f_1(k^{-1}\cdot z)\overline{f_2(k^{-1}\cdot z)},$$
$$(k\cdot D)f(z) = k\cdot(D(k^{-1}\cdot f))(z) = D(k^{-1}\cdot f)(k^{-1}\cdot z).$$

$\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)}$, $\mathcal{PD}(V)$ の K-不変元をそれぞれ K-不変式, K-不変微分作用素, それら全体のなす部分環をそれぞれ K-不変式環, K-不変微分作用素環と呼び, $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ と表す. $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ には, $\mathcal{P}(V)$ の既約成分 V_λ から以下のようにして定まる元 $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ がそれぞれ存在する. $d_\lambda=\dim V_\lambda$ とし, V_λ の Fischer 内積に関する正規直交基底 $\{f_1,\dots,f_{d_\lambda}\}$ を 1 つとり, $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ を次のように定める.

$$p_\lambda(z,\overline{z}) = \sum_{j=1}^{d_\lambda} f_j(z)\overline{f_j(z)}, \tag{1.2}$$

$$p_\lambda(z,\partial) = \sum_{j=1}^{d_\lambda} f_j(z)\overline{f}_j(\partial), \tag{1.3}$$

ただし, z_k に関する偏微分作用素を ∂_{z_k}, $\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対し $\partial^\alpha=\partial_{z_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{z_n}^{\alpha_n}$ とし, $f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ とするとき, $\overline{f}(\partial)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\overline{a}_\alpha\partial^\alpha$ とする. $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ は正規直交基底 $\{f_1,\dots,f_{d_\lambda}\}$ の取り方に依らないことに注意する.

以下, 特に断らない限り (K,V) **は multiplicity-free であると仮定する**. ここで, K-不変式環, K-不変微分作用素環の性質を highest weight theory を用いて説明する. $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}(K)$ を K の Lie 代数, $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ を $\mathfrak{k}$ の複素化, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ を $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の Cartan 部分代数, $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とする. $\mathcal{P}(V)$ の既約成分はその highest weight $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ で決まる. $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ を highest weight にもつ既約成分を P_λ とし, その highest weight vector を $h_\lambda\in P_\lambda$ と表すことにする. P_λ に対してある非負整数 $l\in\mathbb{N}$ が存在し, P_λ は l 次斉次多項式全体のなす $\mathcal{P}(V)$ の部分 vector 空間 $\mathcal{P}_l(V)$ に含まれる. この l を λ の**次数**と呼び, $\deg\lambda$ で表す. $\Lambda:=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*\,;\,\exists P_\lambda\subset\mathcal{P}(V)\}$ とすると, Λ は自由 Abel 半群になる. Λ の元 λ で highest weight vector h_λ が既約多項式となるものを基本 highest weight, 対応する highest weight vector h_λ を基本 highest weight vector と呼ぶ. 基本 highest weight 全体をなす集合を $\Lambda_0=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ とすると, Λ_0 は Λ の自由 Abel 半群としての基底になる.

Definition 1.2. Λ_0 の元の個数 r を (K,V) の **rank** と呼び, $\mathrm{rank}\,(K,V)$ と表すことにする.

$\Lambda_0=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ を用いることにより, K-不変式環, K-不変微分作用素環の構造が次のように説明される.

Proposition 1.3 ([7]). $\{p_{\lambda_j}(z,\overline{z})\}_{j=1}^r$, $\{p_{\lambda_j}(z,\partial)\}_{j=1}^r$ はそれぞれ代数的に独立であり, かつ $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K$, $\mathcal{PD}(V)^K$ を可換環として生成する.

$D \in \mathcal{PD}(V)^K$ を V 上の K-不変微分作用素とすると, D は $\mathcal{P}(V)$ のすべての既約成分 P_λ を保存し, 各 P_λ 上 scalar 倍として作用する. 特に, D として $p_\lambda(z,\partial)$ をとるとき, $p_\lambda(z,\partial)$ は各 P_μ $(\mu \in \Lambda)$ に scalar 倍で作用する, 即ち,

$$p_\lambda(z,\partial)|_{P_\mu} = \binom{\mu}{\lambda}\mathrm{Id}_{P_\mu}, \quad \exists\binom{\mu}{\lambda} \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

この複素数 $\binom{\mu}{\lambda}$ を 2 **項係数**と呼ぶ. 2 項係数は以下のようにして特徴づけられる. $\rho \in \mathfrak{h}^*$ を正 root の和の $\dfrac{1}{2}$ 倍とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について次の函数 $\tau_\lambda : \Lambda + \rho \longrightarrow \mathbb{C}$ を考える.

$$\tau_\lambda(\mu+\rho) = \binom{\mu}{\lambda}, \quad \mu \in \Lambda.$$

$\mathfrak{a}^* = \langle\Lambda\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{h}^*$ を Λ で生成される $\mathfrak{h}^*$ の部分 vector 空間とすると, τ_λ は $\mathfrak{a}^*+\rho$ 上の多項式函数とみなされる. この多項式函数 τ_λ は以下のようにして特徴づけられるものである.

Proposition 1.4 ([11])**.** 有限群 W が存在して, $\mathfrak{a}^*$ を保存し, かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ について τ_λ が以下のように特徴づけられる.
(1) τ_λ は W-不変である.
(2) $\deg\tau_\lambda = \deg\lambda$.
(3) $\deg\mu \leq \deg\lambda$, $\mu \neq \lambda$ なる $\mu \in \Lambda$ に対して $\tau_\lambda(\mu+\rho) = 0$.
(4) $\tau_\lambda(\lambda+\rho) = 1$.

ここまでの内容については, [2] を参照せよ.

W の幾何学的意味付けを行うために, 作用の強可視性を定義する.

Definition 1.5 ([14])**.** V を有限次元複素多様体, K を V に正則に作用する連結 Lie 群とする. 作用 (K,V) が**強可視的**であるとは, V の K-不変な開集合 D, 全実部分多様体 S および D 上の反正則微分同相 σ が存在して、次の性質を満たすことである.
(1) $K \cdot S = D$.
(2) σ は S を保存し, $\sigma|_S = \mathrm{Id}_S$.
(3) 任意の $v \in S$ について $\sigma(K\cdot v) = K\cdot v$.

この S を作用 (K,V) の **slice** と呼ぶ.

作用 (K,V) が強可視的ならば multiplicity-free である ([14]). また, V を有限次元複素 vector 空間, K を V に線型に作用する連結 compact Lie 群とするとき, (K,V) が multiplicity-free ならば強可視的である ([19]). この論文の次節以降において, 不変式や 2 項係数の対称性を, 適当な slice を保存する群の作用と結びつける.

最後に, 不変式や 2 項係数, 不変微分作用素を記述するために, 下降冪を表す記号を与えておく.

$$a^{\underline{l}} = \begin{cases} a(a-1)\cdots(a-l+1), & l \geq 1, \\ 1, & l = 0. \end{cases}$$

§ 2. Hermite 型の場合

multiplicity-free 作用のうち, 最も典型的なものである Hermite 型作用についてまとめておく. なお, 詳細については [3][4][6][8][15][20][21][22][24] 等を参照せよ. G を中心が有限な非 compact 単純 Lie 群で, G の極大 compact 部分群 K の中心が 1 次元であるものとする. すると, 対 (G,K) は Hermite 対称対になる. $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}\,K$ をそれぞれ G, K の Lie 代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{p}_+ +\mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{k}$ の中心の随伴作用に関する分解とする. すると, $\mathfrak{p}_-$ は既約な K-加群となり, 作用 $(K,\mathfrak{p}_-)$ は multiplicity-free である. このような作用を **Hermite 型**作用と呼ぶことにする. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}$ の複素化とし, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数とすると, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数にもなる. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の root $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ に対して, その root 空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表すとする. 互いに強直交する正 root $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ が存在し, $\mathfrak{g}_{-\alpha_j}\subset\mathfrak{p}_-$ であり, $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_-)$ の K-既約分解に現れる highest weight λ は $a_1\geq\cdots\geq a_r\geq 0$ なる非負整数 $a_1,\dots,a_r$ を用いて $\lambda=a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r$ と表される. 特に, $\mathrm{rank}\,(K,\mathfrak{p}_-)=r$ であり, 基本 highest weight は $\lambda_j=\alpha_1+\cdots+\alpha_j$ $(1\leq j\leq r)$ と表され, $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ は $\langle\Lambda\rangle_{\mathbb{C}}$ の vector 空間としての基底になり, $\deg\lambda_j=j$ である. さらに, $v_j\in\mathfrak{g}_{-\alpha_j}$ を適当にとり, $S=\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\mathbb{R}v_j$ とすると, S は $(K,\mathfrak{p}_-)$ の slice になる. いま, compact 群 $N_K(S)$, $Z_K(S)$, $W_K(S)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
N_K(S)&=\{k\in K\,;\,k\cdot S=S\},\\
Z_K(S)&=\{k\in K\,;\,k\cdot v=v\ \text{for all}\ v\in S\},\\
W_K(S)&=N_K(S)/Z_K(S).
\end{aligned}$$

Proposition 2.1. (1) $W_K(S)$ は有限群であり, $(\mathcal{P}(\mathfrak{p}_-)\otimes\overline{\mathcal{P}(\mathfrak{p}_-)})^K\simeq\mathbb{C}[S]^{W_K(S)}$.
(2) $W=\mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}}(N_K(S))|_{\langle\Lambda\rangle_{\mathbb{C}}}$ とすると, W は Proposition 1.4 の W と一致する.

S の基底 $\{v_1,\dots,v_r\}$ に関する座標函数を $z_1,\dots,z_r$ とし, S 上の多項式 $f(z)$ について, $v=a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r$ に対して $f(z)$ に $|a_1|^2\alpha_1+\cdots+|a_r|^2\alpha_r$ を代入した値を対応させて得られる函数を $f(|z|^2)$ と表すことにする. また, $\lambda\in\Lambda$ を $\lambda=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r$ と表すことにより, λ と $(l_1,\dots,l_r)$ を同一視する.

Proposition 2.2. 任意の $\lambda=(l_1,\dots,l_r)$ に対して, K-不変式 $p_\lambda(z,\overline{z})$ および 2 項係数 $\binom{\mu}{\lambda}$ は次のように表される.

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z,\overline{z})&=c_{t,\lambda}J_\lambda^{(t)}(|z|^2),\quad z\in S,\\
\binom{\mu}{\lambda}&=c_{t,\lambda}J_\lambda^{*(t)}(\mu),\quad \mu\in\Lambda,
\end{aligned}$$

ただし, $J_\lambda^{(t)}$ は Jack 多項式, $J_\lambda^{*(t)}$ は shifted Jack 多項式 ([18] を参照せよ) を表し, t は以

下で与えられる実数で, $c_{t,\lambda}$ は t,λ で決まる正実数である.

$$t=\begin{cases} 2, & (G,K)=(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}),\mathrm{U}(n)), \\ 1, & (G,K)=(\mathrm{SU}(n,m),\mathrm{S}(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{SU}(m))), \\ \frac{1}{2}, & (G,K)=(\mathrm{SO}^*(2n),\mathrm{U}(n)), \\ \frac{2}{n-2}, & (G,K)=(\mathrm{SO}_0(2,n),\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n)), \\ \frac{1}{3}, & (G,K)=(\mathrm{E}_{6(-14)},\mathbb{T}\cdot\mathrm{Spin}(10)), \\ \frac{1}{4}, & (G,K)=(\mathrm{E}_{7(-25)},\mathbb{T}\cdot\mathrm{E}_6). \end{cases}$$

上の結果により, (K,V) が Hermite 型のときは K-不変式および 2 項係数がわかり, K-不変微分作用素も求められる. よって, 問題となるのは (K,V) が Hermite 型作用と本質的に異なるものについて K-不変式や K-不変微分作用素を求めることである. そこで, 本質的に異なるということを明確に定義する.

Definition 2.3. 作用 (K_1,V_1) が (K_2,V_2) と**弱同値**であるとは, 複素線型同型 $\phi: V_1\longrightarrow V_2$ が存在して, 任意の $v\in V_1$ について $\phi(K_1\cdot v)=K_2\cdot\phi(v)$ が成り立つことである.

(K_1,V_1), (K_2,V_2) を弱同値な multiplicity-free 作用とすると, 自然な同型により, $\mathcal{P}(V_1)$ の K_1-既約分解は $\mathcal{P}(V_2)$ の K_2-既約分解と一致する. よって, それぞれの不変式と不変微分作用素は自然に同一視される.

局所効果的な multiplicity-free 作用 (K,V) において, K の中心の次元と V の K-既約成分の個数が一致しているとき, (K,V) は **saturated** であるという. multiplicity-free 作用 (K,V) が saturated でないとき, K に適当な torus T を付け加えることにより, $T\times K$ の中心の次元と V の K-既約成分の個数が一致し, かつ $(T\times K,V)$ が局所効果的となるようにすることができる. このとき, $(T\times K,V)$ も multiplicity-free であり, $(T\times K,V)$ は (K,V) と弱同値である.

multiplicity-free 作用 (K,V) がある Hermite 型作用 $(K',\mathfrak{p}_-)$ と弱同値であるとき, (K,V) は**弱 Hermite 型**であるということにする.

Definition 2.4. $V_1,\dots,V_m$ を有限次元複素 vector 空間, $K_1,\dots,K_m$ を連結な compact Lie 群で, それぞれ $V_1,\dots,V_m$ に線型に作用しているとする. すると, $K_1\times\cdots\times K_m$ は $V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ に自然に作用する. この $(K_1\times\cdots\times K_m,V_1\oplus\cdots\oplus V_m)$ を $(K_1,V_1),\dots,(K_m,V_m)$ の**直積**と呼び, $(K_1,V_1)\times\cdots\times(K_m,V_m)$ と表す.

(K_1,V_1), (K_2,V_2) をともに multiplicity-free 作用とするとき, それらの直積 $(K_1,V_1)\times(K_2,V_2)$ は multiplicity-free であり, $K_1\times K_2$-不変式環 $(\mathcal{P}(V_1\oplus V_2)\otimes\overline{\mathcal{P}(V_1\oplus V_2)})^{K_1\times K_2}$, $K_1\times K_2$-不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(V_1\oplus V_2)^{K_1\times K_2}$ はそれぞれ環としての tensor 積 $(\mathcal{P}(V_1)\otimes\overline{\mathcal{P}(V_1)})^{K_1}\otimes(\mathcal{P}(V_2)\otimes\overline{\mathcal{P}(V_2)})^{K_2}$, $\mathcal{PD}(V_1)^{K_1}\otimes\mathcal{PD}(V_2)^{K_2}$ に一致する.

Definition 2.5. V を有限次元複素 vector 空間, K を連結かつ単連結な半単純 compact Lie 群で, V に線型かつ局所効果的に作用するとする．作用 (K,V) が **indecomposable** であるとは, $(K,V)=(K_1,V_1)\times(K_2,V_2)$ なる自明でない 2 つの作用 (K_1,V_1), (K_2,V_2) が存在しないことである．K が一般の連結 compact Lie 群のとき, K の半単純成分 K_s の普遍被覆群 $\widetilde{K}_s$ をとり, $(\widetilde{K}_s,V)$ が indecomposable であるとき, 作用 (K,V) が **indecomposable** であるという．

multiplicity-free 作用 (K,V) は, K に適当な torus T を付け加えることにより indecomposable な multiplicity-free 作用の直積になる． よって, 一般の multiplicity-free 作用に関する不変式, 不変微分作用素を求めるには, saturated かつ indecomposable な multiplicity-free 作用について考えれば十分である．indecomposable な multiplicity-free 作用は, 既約のとき Kac [9] により, 可約のときは Benson-Ratcriff [1], Leahy [17] により独立に分類されている．階数が 2 以下 indecomposable な multiplicity-free 作用はすべて弱 Hermite 型である．階数 3 の弱 Hermite 型でない indecomposable な multiplicity-free 作用に関する不変式, 不変微分作用素は [10] ですべて求められている．階数 4 の弱 Hermite 型でない indecomposable な multiplicity-free 作用は以下のいずれかと弱同値である．

(1) $(\mathbb{T}^2\times \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(n),\mathbb{C}^2\oplus\mathrm{Mat}(2,n,\mathbb{C})),\quad n\geq 2,$

(2) $(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(4),\mathbb{C}^4\oplus\wedge^2(\mathbb{C}^4)),$

(3) $(\mathbb{T}^2\times\mathrm{Sp}(n),\mathbb{C}^{2n}\oplus\mathbb{C}^{2n}),\quad n\geq 2,$

ここで, $\mathrm{Mat}(2,n,\mathbb{C})$, $\wedge^2(\mathbb{C}^4)$ はそれぞれ $(2,n)$ 複素行列全体, 4 次複素交代行列全体のつくる vector 空間である．なお, (1), (2) はともに Knop [12] により半古典型と名付けられた以下の系列のうち階数が 4 となる作用である．

$(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(m)\times\mathrm{SU}(n),\mathbb{C}^m\oplus\mathrm{Mat}\,(m,n,\mathbb{C})),\quad m\geq 2, n\geq 1,$

$(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(n),\mathbb{C}^n\oplus\wedge^2(\mathbb{C}^n)),\quad n\geq 3.$

以下の節で, それぞれの作用について不変式, 2 項係数および不変微分作用素を具体的に表示する．

§ 3. $(K,V)=(\mathbb{T}^2\times\mathrm{Sp}(n),\mathbb{C}^{2n}\oplus\mathbb{C}^{2n})\quad(n\geq 2)$

この節の内容については, 反橋拓朗氏の修士論文 [23] にて詳細が述べられている．

まず, $\mathrm{Sp}(n)$ の実現の方法を与える．非退化 $2n$ 次交代行列 J_n として反対角なものをとる, 即ち,

$$J_n := \begin{pmatrix} O & I'_n \\ -I'_n & O\end{pmatrix},\quad I'_n=\begin{pmatrix} 0 & & & & 1\\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & 0\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

これを用いて, $\mathrm{Sp}(n)$ を次のように実現する．

$$\mathrm{Sp}(n)=\{g\in\mathrm{U}(2n)\,;\,{}^tgJ_ng=J_n\}=\mathrm{SU}(2n)\cap\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}).$$

このとき, K の V への作用を以下で定義する.

$$(u_1, u_2, g)\cdot(v_1, v_2) := (u_1^{-1}({}^t g^{-1} v_1), u_2^{-1}({}^t g^{-1} v_2)),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{Sp}(n)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}$. $\mathbb{C}^{2n}\oplus\mathbb{C}^{2n}$ をしばしば $\mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})$ と同一視する. すると, 基本 highest weight vector は次のように与えられる.

$$h_{1,1} = z_{1,1},\ h_{1,2} = z_{1,2},\ h_2 = z_{1,1}z_{2,2} - z_{2,1}z_{1,2},\ h_3 = \sum_{j=1}^{n}(z_{j,1}z_{2n-j+1,2} - z_{2n-j+1,1}z_{j,2}).$$

$\mathbb{T}^2$ は $\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(2)$ の部分群に局所同型である. $K_1 = \mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2)$ とするとき, 作用 (K_1, V) は階数 3 の multiplicity-free 作用であり, 基本 highest weight vector として $h_{1,1}, h_2, h_3$ をもつ. $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq 0$ なる非負整数 l_1, l_2, l_3 に対して, $h_{(l_1,l_2,l_3)} = h_{1,1}^{l_1-l_2} h_2^{l_2-l_3} h_3^{l_3}$ とし, $h_{(l_1,l_2,l_3)}$ を highest weight vector にもつ K_1-既約成分を $P_{(l_1,l_2,l_3)}$ とおくと, $\mathcal{P}(V)$ は次のように K_1-既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1\geq l_2\geq l_3\geq 0} P_{(l_1,l_2,l_3)}.$$

ここで, 以下のような K_1-不変式を与える.

$$q_1 := \sum_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ k=1,2}} |z_{j,k}|^2, \qquad q_2 := \det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2n}|z_{j,1}|^2 & \sum_{j=1}^{2n} z_{j,1}\overline{z}_{j,2} \\ \sum_{j=1}^{2n} z_{j,2}\overline{z}_{j,1} & \sum_{j=1}^{2n}|z_{j,2}|^2 \end{pmatrix},$$

$$q_3 := |h_3(z)|^2 = \left|\sum_{j=1}^{n}(z_{j,1}z_{2n-j+1,2} - z_{2n-j+1,1}z_{j,2})\right|^2.$$

これらを用いると, (l_1, l_2, l_3) に対する K_1-不変式は以下のように与えられる.

$$p_{(l_1,l_2,l_3)}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\|h_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{k=l_2}^{\lfloor\frac{l_1+l_2}{2}\rfloor} (-1)^{k-l_2}\binom{l_1-k}{k-l_2} q_1^{l_1+l_2-2k} q_2^{k-l_2}$$
$$\cdot\sum_{j=l_3}^{l_2}(-1)^{j-l_3}\binom{l_2-l_3}{j-l_3}\frac{(l_1-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} q_2^{l_2-j} q_3^{j},$$

ここで, $\|h_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2 = (l_1-l_2)!(l_1-l_3+1)^{\underline{l_2-l_3}}(l_2-l_3)!(l_1+l_2-l_3+2n-1)^{\underline{l_3}} l_3!$.

K_1-既約成分 $P_{(l_1,l_2,l_3)}$ は K-加群として次のように既約分解される.

$$P_{(l_1,l_2,l_3)} = \sum_{l_{1,1}+l_{1,2}=l_1+l_2} P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)},$$

ただし, $P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)}$ は $h_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)} = h_{1,1}^{l_{1,1}-l_2} h_{1,2}^{l_{1,2}-l_2} h_2^{l_2-l_3} h_3^{l_3}$ を highest weight vector にもつ K-既約成分である. $V = V_1\oplus V_2 = \mathbb{C}^{2n}\oplus\mathbb{C}^{2n}$ とするとき, $P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)}$ の元は

$(l_{1,1}, l_{1,2})$ 次斉次多項式である. ここで, 以下のような K-不変式を与える.

$$q_{1,1} = \sum_{j=1}^{2n} |z_{j,1}|^2, \quad q_{1,2} = \sum_{j=1}^{2n} |z_{j,2}|^2.$$

$P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)}$ に対応する K-不変式は, $p_{(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2,l_2,l_3)}(z,\overline{z})$ の $(2l_{1,1}, 2l_{1,2})$ 次斉次成分をとることにより得られる.

Theorem 3.1. $\lambda = (l_{1,1}, l_{1,2}; l_2, l_3)$ に対して, K-不変式 $p_\lambda(z,\overline{z})$ は以下のように表される.

$$\begin{aligned}p_\lambda(z,\overline{z}) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{k=l_2}^{\min\{l_{1,1},l_{1,2}\}} &(-1)^{k-l_2} \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-k}{k-l_2} \\ &\cdot \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-2k}{l_{1,2}-k} q_{1,1}^{l_{1,1}-k} q_{1,2}^{l_{1,2}-k} q_2^{k-l_2} \\ \cdot \sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} &\frac{(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_{1,1}+l_{1,2}-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} q_2^{l_2-j} q_3^{j},\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}c_\lambda &= \| h_{1,1}^{l_{1,1}+l_{1,2}-2l_2} h_2^{l_2-l_3} h_3^{l_3} \|_{\mathcal{F}}^2 \\ &= (l_{1,1}+l_{1,2}-2l_2)!(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-l_3+1)^{\underline{l_2-l_3}}(l_2-l_3)! \\ &\quad \cdot (l_{1,1}+l_{1,2}-l_3+2n-1)^{\underline{l_3}} l_3!.\end{aligned}$$

K-不変微分作用素を求めるために, $\mathcal{P}(V)$ の K-既約分解を別の視点から眺める. 定義より, $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n)$ であった. $K_2 = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2n)$ とおくと, 作用 (K_2, V) も階数 3 の multiplicity-free 作用であり, 基本 highest weight vector として $h_{1,1}, h_{1,2}, h_2$ をもつ. $l_{1,1}, l_{1,2} \geq l_2 \geq 0$ なる非負整数 $l_{1,1}, l_{1,2}, l_2$ に対して $h_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)} = h_{1,1}^{l_{1,1}-l_2} h_{1,2}^{l_{1,2}-l_2} h_2^{l_2}$ とし, $h_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)}$ を highest weight にもつ K_2-既約成分を $P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)}$ と表すとすると, $\mathcal{P}(V)$ は以下のように K_2-既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_{1,1},l_{1,2} \geq l_2 \geq 0} P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)}.$$

$(l_{1,1}, l_{1,2}; l_2)$, $(m_{1,1}, m_{1,2}; m_2)$ に対して, 2 項係数は次のように表される.

$$\begin{aligned}\binom{(m_{1,1}, m_{1,2}; m_2)}{(l_{1,1}, l_{1,2}; l_2)} = \frac{1}{c_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)}} &\sum_{j=l_2}^{\min\{l_{1,1},l_{1,2}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-2j}{l_{1,2}-j} \\ &\cdot (m_{1,1}-j)^{\underline{l_{1,1}-j}} (m_{1,2}-j)^{\underline{l_{1,2}-j}} (m_{1,1}+m_{1,2}-m_2+1)^{\underline{j}} m_2^{\underline{j}},\end{aligned}$$

ただし,

$$c_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)} = \|h_{1,1}^{l_{1,1}+l_{1,2}-l_2} h_2^{l_2}\|_{\mathcal{F}}^2$$
$$= (l_{1,1}+l_{1,2}-2l_2)!(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2+1)^{\underline{l_2}} l_2!.$$

$P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)}$ は次のように K-既約分解される.

$$P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} P_{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)}.$$

このとき, 2 項係数は以下のような性質をもつ.

$$\binom{(m_{1,1},m_{1,2};m_2)}{(l_{1,1},l_{1,2};l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} \binom{(m_{1,1},m_{1,2};m_2,m_3)}{(l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)}, \quad 0 \le m_3 \le m_2,$$

$$\binom{(m_{1,1}+l,m_{1,2}+l;m_2+l,m_3+l)}{(l_{1,1}+l,l_{1,2}+l;l_2+l,l_3+l)} = \frac{(m_{1,1}+m_{1,2}-m_3+l+2n-1)^{\underline{l}}(m_3+l)^{\underline{l}}}{(l_{1,1}+l_{1,2}-l_3+l+2n-1)^{\underline{l}}(l_3+l)^{\underline{l}}} \cdot \binom{(m_{1,1},m_{1,2};m_2,m_3)}{l_{1,1},l_{1,2};l_2,l,3)}, \quad l \ge 0.$$

ここで, 以下のような K-不変微分作用素を与える.

$$D_{1,1} := \sum_{j=1}^{2n} z_{j,1}\partial_{z_{j,1}}, \quad D_{1,2} := \sum_{j=1}^{2n} z_{j,2}\partial_{z_{j,2}},$$
$$D_2 := \det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2n} z_{j,1}\partial_{z_{j,1}}+1 & \sum_{j=1}^{2n} z_{j,1}\partial_{z_{j,2}} \\ \sum_{j=1}^{2n} z_{j,2}\partial_{z_{j,1}} & \sum_{j=1}^{2n} z_{j,2}\partial_{z_{j,2}} \end{pmatrix},$$
$$D_3 := h_3(z)h_3(\partial),$$

ただし, D_2 における行列式は列行列式とする.

Theorem 3.2. $\lambda = (l_{1,1},l_{1,2};l_2,l_3)$ および $\mu = (m_{1,1},m_{1,2};m_2,m_3)$ に対して, 2 項係数 $\binom{\mu}{\lambda}$, K-不変微分作用素 $p_\lambda(z,\partial)$ は以下のように表される.

$$\binom{\mu}{\lambda} = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{k=l_2}^{\min\{l_{1,1},l_{1,2}\}} (-1)^{k-l_2} \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-k}{k-l_2} \binom{l_{1,1}+l_{1,2}-2k}{l_{1,2}-k}$$
$$\cdot (m_{1,1}-k)^{\underline{l_{1,1}-k}}(m_{1,2}-k)^{\underline{l_{1,2}-k}}(m_{1,1}+m_{1,2}-m_2-l_2+1)^{\underline{k-l_2}}(m_2-l_2)^{\underline{k-l_2}}$$
$$\cdot \sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_{1,1}+l_{1,2}-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}}$$
$$\cdot (m_{1,1}+m_{1,2}-m_2-j+1)^{\underline{l_2-j}}(m_2-j)^{\underline{l_2-j}}$$
$$\cdot (m_{1,1}+m_{1,2}-m_3+2n-1)^{\underline{j}} m_3^{\underline{j}},$$

$$
\begin{aligned}
p_\lambda(z,\partial) = \frac{1}{c_\lambda} & \sum_{k=l_2}^{\min\{l_{1,1},l_{1,2}\}} (-1)^{k-l_2}\binom{l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-k}{k-l_2}\binom{l_{1,1}+l_{1,2}-2k}{l_{1,2}-k} \\
& \cdot \prod_{a=k}^{l_{1,1}-1}(D_{1,1}-a)\prod_{b=k}^{l_{1,2}-1}(D_{1,2}-b)\prod_{c=l_2}^{k-1}(D_2-c(D_{1,1}+D_{1,2})+c^2-c) \\
& \cdot \sum_{j=l_3}^{l_2}(-1)^{j-l_3}\binom{l_2-l_3}{j-l_3}\frac{(l_{1,1}+l_{1,2}-l_2-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_{1,1}+l_{1,2}-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} \\
& \cdot \prod_{d=j}^{l_2-1}(D_2-d(D_{1,1}+D_{1,2})+d^2-d) \\
& \cdot \prod_{e=0}^{j-1}(D_3-e(D_{1,1}+D_{1,2})+e^2-(2n-1)e).
\end{aligned}
$$

この作用 (K,V) の強可視性を示す slice を与える．まず，簡単のために記号を導入する．

$$
\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n-1,2} \\ z_{2n,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ z_{2n-1,1} & z_{2n-1,2} \\ z_{2n,1} & z_{2n,2} \end{pmatrix}.
$$

そこで，次のような V の部分集合を考える．

$$
S_1 := \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n-1,2} \\ z_{2n,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} ;\ z_{j,k} \in \mathbb{R} \right\},
$$

$$
S_2 := \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n-1,2} \\ z_{2n,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} ;\ \begin{array}{rcl} z_{1,1} & = & r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3, \\ z_{1,2} & = & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3, \\ z_{2,1} & = & r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3, \\ z_{2,2} & = & -r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3, \\ z_{2n-1,1} & = & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, \\ z_{2n-1,2} & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, \\ z_{2n,1} & = & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ z_{2n,2} & = & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ r & > & 0,\ \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.
$$

すると，S_1 は 8 次実 vector 空間，S_0 は 4 次実部分多様体で，S_1 を実 vector 空間として生

成する．さらに, $\sigma : V \longrightarrow V$ を通常の複素共役とすると, S_1, S_0 ともに (K,V) の slice になり, $K \cdot S_1 = V$, $K \cdot S_0 = V \setminus \{0\}$ となる．ここで, 次の群を考える．

$$\begin{aligned} N_K(S_j) &:= \{g \in K \,;\, g \cdot S_j = S_j\}, \\ Z_K(S_j) &:= \{g \in K \,;\, g \cdot v = v \text{ for all } v \in S_j\}, \\ W_K(S_j) &= N_K(S_j)/Z_K(S_j), \\ \widetilde{W} &= \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}}(N_K(S_0))|_{\langle\Lambda\rangle_{\mathbb{C}}}. \end{aligned}$$

すると, $W_K(S_1) \simeq \mathrm{U}(2) \rtimes \{\pm 1\}$, $\widetilde{W} \simeq \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$.

Theorem 3.3. (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[S_1]^{W_K(S_1)}$.
(2) $\widetilde{W}$ は Proposition 1.4 の W と一致する．

§ 4. $(K,V) = (\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{Mat}(2,n,\mathbb{C}))$ $(n \geq 2)$

K の V への作用を以下で定義する．

$$(u_1, u_2, g_1, g_2) \cdot (v_1, v_2) = (u_1^{-1}({}^t g_1^{-1} v_1), u_2^{-1}({}^t g_1^{-1} v_2 g_2^{-1})),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g_1 \in \mathrm{SU}(2)$, $g_2 \in \mathrm{SU}(n)$, $v_1 \in \mathbb{C}^2$, $v_2 \in \mathrm{Mat}(2,n,\mathbb{C})$. V を以下のようにしてしばしば $\mathrm{Mat}(2,n+1,\mathbb{C})$ と同一視する．

$$(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,n} \end{pmatrix} \right) \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,n} \end{pmatrix}.$$

すると, 基本 highest weight vector は次のように表される．

$$h_{1,0} = z_{1,0},\ h_{1,1} = z_{1,1},\ h_{2,0} = z_{1,0}z_{2,1} - z_{2,0}z_{1,1},\ h_{2,1} = z_{1,1}z_{2,2} - z_{2,1}z_{1,2}.$$

$\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$ は $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n+1)$ の部分群と局所同型である．$K_1 = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n+1)$ とするとき, (K_1, V) は階数 2 の Hermite 型作用であり, $h_{1,0}, h_{2,0}$ を基本 highest weight vector としてもつ． $l_1 \geq l_2 \geq 0$ なる非負整数 l_1, l_2 に対して, $h_{(l_1,l_2)} = h_{1,0}^{l_1-l_2} h_{2,0}^{l_2}$ を highest weight vector にもつ $\mathcal{P}(V)$ の K_1-既約成分を $P_{(l_1,l_2)}$ と表すと, $\mathcal{P}(V)$ は $\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \geq l_2 \geq 0} P_{(l_1,l_2)}$ と K_1-既約分解される．$P_{(l_1,l_2)}$ に対応する K_1-不変式 $p_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z})$ は分割 (l_1,l_2) に対応する 2 変数 Schur 多項式 $J^{(1)}_{(l_1,l_2)}$ で表される．

$P_{(l_1,l_2)}$ の (r,s) 次斉次多項式全体のなす部分 vector 空間を $P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}$ と表すと, $P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}$ は K-不変であり, $P_{(l_1,l_2)}$ は次のように K-加群として分解される．

$$P_{(l_1,l_2)} = \sum_{r+s=l_1+l_2} P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}.$$

$P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}$ に対応する K-不変式 $p^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z})$ は $p_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z})$ の $(2r,2s)$ 次斉次成分である. $l_{1,1} \geq l_{2,0} \geq l_{2,1} \geq 0$ かつ $l_{1,0} \geq l_{2,0} - l_{2,1}$ なる非負整数 $l_{1,0}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1}$ について $h_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})} = h_{1,0}^{l_{1,0}-l_{2,0}+l_{2,1}} h_{1,1}^{l_{1,1}-l_{2,0}} h_{2,0}^{l_{2,0}-l_{2,1}} h_{2,1}^{l_{2,1}}$ を highest weight にもつ K-既約成分を $P_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}$ と表すと, $P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}$ は次のように K-既約分解される.

$$P^{(r,s)}_{(l_1,l_2)} = \sum_{l_{2,1} \leq l_2, s-l_2} P_{(r,s-l_{2,1},l_2,l_{2,1})}.$$

このことを用いて $P_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}$ に対応する K-不変式 $p_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}(z,\overline{z})$ を計算することができる. ここで, 以下のような K-不変式を与える.

$$q_{1,0} := |z_{1,0}|^2 + |z_{2,0}|^2, \qquad q_{1,1} := \sum_{\substack{j=1,2 \\ 1 \leq k \leq n}} |z_{j,k}|^2,$$
$$q_{2,0} := \sum_{j=1}^{n} |z_{1,0}z_{2,j} - z_{2,0}z_{1,j}|^2, \quad q_{2,1} := \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_{1,j}z_{2,k} - z_{2,j}z_{1,k}|^2.$$

すると, 次の関係式を得る.

$$p^{(r,s)}_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z}) = \sum_{l_{2,1} \leq s, l_2 - s} p_{(r,s-l_{2,1},l_2,l_{2,1})}(z,\overline{z}),$$
$$p_{(l_{1,0},l_{1,1}+l,l_{2,0}+l,l_{2,1}+l)}(z,\overline{z}) = \frac{1}{(l_{1,1}+l+1)^{\underline{l}}(l_{2,1}+l)^{\underline{l}}} p_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}(z,\overline{z}) q_{2,1}^{l}, \quad l \geq 0.$$

Theorem 4.1. $\lambda = (l_{1,0}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1})$ に対して, K-不変式 $p_\lambda(z,\overline{z})$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z,\overline{z}) = \frac{1}{c_\lambda} & \sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor \frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2} \rfloor} \sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k, l_{1,1}+l_{2,1}-k\}} (-1)^{j-l_{2,0}} \\ & \cdot \binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}} \binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k} \\ & \cdot \sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0}, l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}} (-1)^{l-l_{2,1}} \binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}} \binom{j-l}{j-k} \frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+1)^{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1})^{\underline{l-l_{2,1}}}} \\ & \cdot q_{1,0}^{l_{1,0}-j+k} q_{1,1}^{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k} q_{2,0}^{j-k} q_{2,1}^{k}, \end{aligned}$$

ただし,
$c_\lambda = (l_{1,0}+l_{1,1}-2l_{2,0}+l_{2,1})!(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+1)^{\underline{l_{2,0}-l_{2,1}}}(l_{2,0}-l_{2,1})!(l_{1,1}+1)^{\underline{l_{2,1}}} l_{2,1}!.$

2 項係数を求めるには, 不変式 $p_\lambda(z,\overline{z})$ に対応する積分核 $p_\lambda(z,\overline{w})$ の固有値を考えることにより得られる. $q_{1,0}, q_{1,1}, q_{2,0}, q_{2,1}$ において $(z,\overline{z})$ を $(z,\overline{w})$ に変えたものをそれぞれ

$q_{1,0}(z,\overline{w})$, $q_{1,1}(z,\overline{w})$, $q_{2,0}(z,\overline{w})$, $q_{2,1}(z,\overline{w})$ と表すと, 次が得られる. $\deg\mu \leq \deg\lambda$ なる $\mu=(m_{1,0},m_{1,1},m_{2,0},m_{2,1})$ について

$$\begin{aligned}
&(h_\mu, q_{1,0}^{l_{1,0}-j+k}(\cdot,\overline{w})q_{1,1}^{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k}(\cdot,\overline{w})q_{2,0}^{j-k}(\cdot,\overline{w})q_{2,1}^{k}(\cdot,\overline{w}))_{\mathcal{F}}\\
&= (m_{1,0}-j+k)^{\underline{l_{1,0}-j+k}}(m_{1,1}+m_{2,1}-j-k)^{\underline{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k}}\sum_{s=0}^{j-k}\Bigg((-1)^s\binom{j-k}{s}\\
&\cdot(m_{1,0}+m_{1,1}-m_{2,0}+m_{2,1}-k-s+1)^{\underline{j-k-s}}(m_{2,0}-k-s)^{\underline{j-k-s}}(m_{1,1}+1)^{\underline{k+s}}m_{2,1}^{\underline{k+s}}\Bigg)h_\mu(w).
\end{aligned}$$

このことと Proposition 1.4 より 2 項係数が求められる. ここで, 以下のような K-不変微分作用素を与える.

$$D_{1,0}:=z_{1,0}\partial_{z_{1,0}}+z_{2,0}\partial_{z_{2,0}},\qquad D_{1,1}:=\sum_{\substack{j=1,2\\1\leq k\leq n}} z_{j,k}\partial_{z_{j,k}},$$

$$D_{2,0}:=\det\begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{n}z_{1,j}\partial_{z_{1,j}}+1 & \sum_{j=0}^{n}z_{1,j}\partial_{z_{2,j}}\\ \sum_{j=0}^{n}z_{2,j}\partial_{z_{1,j}} & \sum_{j=0}^{n}z_{2,j}\partial_{z_{2,j}}\end{pmatrix},\ D_{2,1}:=\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}z_{1,j}\partial_{z_{1,j}}+1 & \sum_{j=1}^{n}z_{1,j}\partial_{z_{2,j}}\\ \sum_{j=1}^{n}z_{2,j}\partial_{z_{1,j}} & \sum_{j=1}^{n}z_{2,j}\partial_{z_{2,j}}\end{pmatrix},$$

ただし, $D_{2,0}, D_{2,1}$ における行列式は列行列式とする. また, $D_{2,0}$ は $q_{2,0}$ とは異なり, 既約 K-部分加群 $P_{(1,1,1,0)}$ ではなく, $P_{(1,1,1,0)}+P_{(0,1,1,1)}$ に対応する K-不変微分作用素であることに注意する. すると, $\mu=(m_{1,0},m_{1,1},m_{2,0},m_{2,1})$ について

$$\begin{aligned}
&D_{1,0}h_\mu = m_{1,0}h_\mu, \qquad D_{1,1}h_\mu=(m_{1,1}+m_{2,1})h_\mu,\\
&D_{2,0}h_\mu=(m_{1,0}+m_{1,1}-m_{2,0}+m_{2,1}+1)m_{2,0}h_\mu,\ D_{2,1}h_\mu \quad =(m_{1,1}+1)m_{2,1}h_\mu.
\end{aligned}$$

これらを用いることにより, K-不変微分作用素が計算できる.

Theorem 4.2. $\lambda=(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})$, $\mu=(m_{1,0},m_{1,1},m_{2,0},m_{2,1})$ に対して, 2 項係数 $\binom{\mu}{\lambda}$, K-不変微分作用素 $p_\lambda(z,\partial)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned}
\binom{\mu}{\lambda}=&\frac{1}{c_\lambda}\sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor\frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2}\rfloor}\sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k,l_{1,1}+l_{2,1}-k\}}(-1)^{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k}\\
&\cdot\sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0},l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}}(-1)^{l-l_{2,1}}\binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}}\binom{j-l}{j-k}\frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+1)^{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1})^{\underline{l-l_{2,1}}}}\\
&\cdot(m_{1,0}-j+k)^{\underline{l_{1,0}-j+k}}(m_{1,1}+m_{2,1}-j-k)^{\underline{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k}}\sum_{s=0}^{j-k}(-1)^s\binom{j-k}{s}\\
&\cdot(m_{1,0}+m_{1,1}-m_{2,0}+m_{2,1}-k-s+1)^{\underline{j-k-s}}(m_{2,0}-k-s)^{\underline{j-k-s}}(m_{1,1}+1)^{\underline{k+s}}m_{2,1}^{\underline{k+s}},
\end{aligned}$$

$$p_\lambda(z,\partial)=\frac{1}{c_\lambda}\sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor\frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2}\rfloor}\sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k,l_{1,1}+l_{2,1}-k\}}(-1)^{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k}$$

$$\cdot\sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0},l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}}(-1)^{l-l_{2,1}}\binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}}\binom{j-l}{j-k}\frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+1)^{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1})^{\underline{l-l_{2,1}}}}$$

$$\cdot\prod_{a=j-k}^{l_{1,0}-1}(D_{1,0}-a)\prod_{b=j+k}^{l_{1,1}+l_{2,1}-1}(D_{1,1}-b)\sum_{s=0}^{j-k}(-1)^s\binom{j-k}{s}$$

$$\cdot\prod_{t=k+s}^{j-1}(D_{2,0}-t(D_{1,0}+D_{1,1})+t^2-t)\prod_{c=0}^{k+s-1}(D_{2,1}-cD_{1,1}+c^2-c).$$

この作用 (K,V) の強可視性を示す slice を与える．まず, 記号を与える．

$$\begin{bmatrix}x_{1,0}&x_{1,1}&x_{1,2}\\x_{2,0}&x_{2,1}&x_{2,2}\end{bmatrix}:=\begin{pmatrix}x_{1,0}&x_{1,1}&x_{1,2}&0&\cdots&0\\x_{2,0}&x_{2,1}&x_{2,2}&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

そこで, 次のような V の部分集合を考える．

$$S_1:=\left\{\begin{bmatrix}x_{1,0}&x_{1,1}&x_{1,2}\\x_{2,0}&x_{2,1}&x_{2,2}\end{bmatrix}\ ;\ x_{j,k}\in\mathbb{R}\right\},$$

$$S_0:=\left\{\begin{bmatrix}x_{1,0}&x_{1,1}&x_{1,2}\\x_{2,0}&x_{2,1}&x_{2,2}\end{bmatrix}\ ;\ \begin{aligned}x_{1,0}&=\ \ r\cos\theta_1\cos\theta_2,\\x_{1,1}&=\ \ r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\x_{1,2}&=\ \ r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,\\x_{2,0}&=\ \ r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\x_{2,1}&=\ \ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\x_{2,2}&=-r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,\\&r>0,\ \theta_1,\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\}.$$

すると, S_1 は 6 次元実 vector 空間, S_0 は 4 次元実部分多様体で, S_1 を実 vector 空間として生成する．さらに, $\sigma:V\longrightarrow V$ を通常の複素共役とすると, S_1, S_2 はともに (K,V) の slice になり, $K\cdot S_1=V$, $K\cdot S_0=V\setminus\{0\}$ となる．3 節と同様にして $N_K(S_j)$, $Z_K(S_j)$, $N_K(S_j)$, $\widetilde{W}$ を考えると, $W_K(S_1)\simeq\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(2)$, $\widetilde{W}\simeq\{\pm1\}\times\{\pm1\}$ となることがわかる．

Theorem 4.3. (1) $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K\simeq\mathbb{C}[S_1]^{W_K(S_1)}$.
(2) $\widetilde{W}$ は Proposition 1.4 の W と一致する．

§ 5. $(K,V)=(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(4),\mathbb{C}^4\oplus\wedge^2(\mathbb{C}^4))$

K の V への作用を以下で定義する．

$$(u_1,u_2,g)\cdot(v_1,v_2)=(u_1^{-1}({}^tg^{-1}v_1),u_2^{-1}({}^tg^{-1}v_2g^{-1})),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{SU}(4)$, $v \in \mathbb{C}^4$, $v_2 \in \wedge(\mathbb{C}^4)$. V を以下のようにしてしばしば $\wedge(\mathbb{C}^5)$ と同一視する.

$$(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x_{2,1} & -x_{3,1} & -x_{4,1} \\ x_{2,1} & 0 & -x_{3,2} & -x_{4,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 0 & -x_{4,3} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & 0 \end{pmatrix} \right) \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 & -x_{1,0} & -x_{2,0} & -x_{3,0} & -x_{4,0} \\ x_{1,0} & 0 & -x_{2,1} & -x_{3,1} & -x_{4,1} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & 0 & -x_{3,2} & -x_{4,2} \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & 0 & -x_{4,3} \\ x_{4,0} & x_{4,1} & x_{42} & x_{4,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

すると, 基本 highest weight vector は次のように表される.

$$h_{1,0} = z_{1,0},\ h_{1,1} = z_{2,1},\ h_{2,0} = \mathrm{Pf}(z_{\{0,1,2,3\}}),\ h_{2,1} = \mathrm{Pf}(z_{\{1,2,3,4\}}) = z_{2,1}z_{4,3} - z_{3,1}z_{4,2} + z_{4,1}z_{3,2},$$

ただし, $\mathrm{Pf}(z_{\{j_1,j_2,j_3,j_4\}})$ で交代行列 $(z_{j,k})$ の第 j_1, j_2, j_3, j_4 行, 第 j_1, j_2, j_3, j_4 列からなる 4 次交代行列の Pfaffian を表すとする. $\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4)$ は $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(5)$ の部分群と局所同型である. $K_1 = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(5)$ とするとき, (K_1, V) は階数 2 の Hermite 型作用であり, $h_{1,0}, h_{2,0}$ を基本 highest weight vector としてもつ. $l_1 \geq l_2 \geq 0$ なる非負整数 l_1, l_2 に対して $h_{(l_1,l_2)} = h_{1,0}^{l_1-l_2} h_{2,0}^{l_2}$ を highest weight vector にもつ $\mathcal{P}(V)$ の K_1-既約成分を $P_{(l_1,l_2)}$ と表すと, $\mathcal{P}(V)$ は $\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \geq l_2 \geq 0} P_{(l_1,l_2)}$ と K_1-既約分解される. $P_{(l_1,l_2)}$ に対応する K_1-不変式 $p_{(l_1,l_2)}(z, \overline{z})$ は分割 (l_1, l_2) に対応する 2 変数 Jack 多項式 $J_{(l_1,l_2)}^{(\frac{1}{2})}$ で表される.

4 節と同様にして, $P_{(l_1,l_2)}$ の (r, s) 次斉次多項式全体のなす部分空間を $P_{(l_1,l_2)}^{(r,s)}$ と表し, $h_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})} = h_{1,0}^{l_{1,0}-l_{2,0}+l_{2,1}} h_{1,1}^{l_{1,1}-l_{2,0}} h_{2,0}^{l_{2,0}-l_{2,1}} h_{2,1}^{l_{2,1}}$ を highest weight にもつ K-既約成分を $P_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}$ と表すと, K-表現空間としての $P_{(l_1,l_2)} = \sum_{r+s=l_1+l_2} P_{(l_1,l_2)}^{(r,s)}$ なる分解, および $P_{(l_1,l_2)}^{(r,s)} = \sum_{l_{2,1} \leq l_2, s-l_2} P_{(r,s-l_{2,1},l_2,l_{2,1})}$ なる K-既約分解が得られる. ここで, 以下のような K-不変式を与える.

$$q_{1,0} := \sum_{j=1}^{4} |z_{j,0}|^2,\ q_{1,1} := \sum_{1 \leq j < k \leq 4} |z_{j,k}|^2,\ q_{2,0} := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 4} \left| \mathrm{Pf}(z_{\{0,j_1,j_2,j_3\}}) \right|^2,\ q_{2,1} := \left| \mathrm{Pf}(z_{\{1,2,3,4\}}) \right|^2.$$

不変式についても 4 節と同様にして $p_{(l_1,l_2)}^{(r,s)}(z, \overline{z}) = \sum_{l_{2,1} \leq s, l_2-s} p_{(r,s-l_{2,1},l_2,l_{2,1})}(z, \overline{z})$ となり, さらに次の関係式が成り立つ.

$$p_{(l_{1,0},l_{1,1}+l,l_{2,0}+l,l_{2,1}+l)}(z, \overline{z}) = \frac{1}{(l_{1,1}+l+2)^{\underline{l}}(l_{2,1}+l)^{\underline{l}}} p_{(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})}(z, \overline{z}) q_{2,1}^{l}, \quad l \geq 0.$$

Theorem 5.1. $\lambda = (l_{1,0}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1})$ に対して, K-不変式 $p_\lambda(z, \overline{z})$ は次のように

表される.

$$p_\lambda(z,\overline{z})=\frac{1}{c_\lambda}\sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor\frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2}\rfloor}\sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k,l_{1,1}+l_{2,1}-k\}}(-1)^{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}}$$
$$\cdot\binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k}\frac{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j+1}{l_{1,0}+l_{1,1}-2l_{2,0}+l_{2,1}+1}\sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0},l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}}(-1)^{l-l_{2,1}}$$
$$\cdot\binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}}\binom{j-l}{j-k}\frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+2)^{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1}+1)^{\underline{l-l_{2,1}}}}q_{1,0}^{l_{1,0}-j+k}q_{1,1}^{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k}q_{2,0}^{j-k}q_{2,1}^{k},$$

ただし, $c_\lambda=(l_{1,0}+l_{1,1}-2l_{2,0}+l_{2,1})!(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+2)^{\underline{l_{2,0}-l_{2,1}}}(l_{2,0}-l_{2,1})!(l_{1,1}+2)^{\underline{l_{2,1}}}l_{2,1}!$.

2 項係数や K-不変微分作用素は 4 節と同様に積分核の固有値を計算することにより求められる. ここで, 以下のような K-不変微分作用素を与え, それらの固有値を求めておく. ただし, (∂_z) で交代行列 $(z_{j,k})$ の各成分 $z_{j,k}$ を偏微分作用素 $\partial_{z_{j,k}}$ に変えて得られる交代行列を表し, $\mu=(m_{1,0},m_{1,1},m_{2,0},m_{2,1})$ とする.

$$D_{1,0}:=\sum_{j=1}^{4}z_{j,0}\partial_{z_{j,0}},\ D_{1,1}:=\sum_{1\le j<k\le 4}z_{k,j}\partial_{z_{k,j}},\ D_{2,1}:=\mathrm{Pf}(z_{\{1,2,3,4\}})\mathrm{Pf}((\partial_z)_{\{1,2,3,4\}}),$$
$$D_{2,0}:=\sum_{0\le j_1<j_2<j_3<j_4\le 4}\mathrm{Pf}(z_{\{j_1,j_2,j_3,j_4\}})\mathrm{Pf}((\partial_z)_{\{j_1,j_2,j_3,j_4\}});\ D_{1,0}h_\mu=m_{1,0}h_\mu,\ D_{1,1}h_\mu=(m_{1,1}+m_{2,1})h_\mu,$$
$$D_{2,1}h_\mu=(m_{1,1}+2)m_{2,1}h_\mu,\ D_{2,0}h_\mu=(m_{1,1}+m_{1,1}-m_{2,0}+m_{2,1}+2)m_{2,0}h_\mu.$$

Theorem 5.2. $\lambda=(l_{1,0},l_{1,1},l_{2,0},l_{2,1})$, $\mu=(m_{1,0},m_{1,1},m_{2,0},m_{2,1})$ に対して, 2 項係数 $\binom{\mu}{\lambda}$, K-不変微分作用素 $p_\lambda(z,\partial)$ は次のように表される.

$$\binom{\mu}{\lambda}=\frac{1}{c_\lambda}\sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor\frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2}\rfloor}\sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k,l_{1,1}+l_{2,1}-k\}}(-1)^{j-l_{2,0}}\binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}}$$
$$\cdot\binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k}\frac{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j+1}{l_{1,0}+l_{1,1}-2l_{2,0}+l_{2,1}+1}$$
$$\cdot\sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0},l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}}(-1)^{l-l_{2,1}}\binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}}\binom{j-l}{j-k}\frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+2)^{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1}+1)^{\underline{l-l_{2,1}}}}$$
$$\cdot(m_{1,0}-j+k)^{\underline{l_{1,0}-j+k}}(m_{1,1}+m_{2,1}-j-k)^{\underline{l_{1,1}+l_{2,1}-j-k}}\sum_{s=0}^{j-k}(-1)^s\binom{j-k}{s}$$
$$\cdot(m_{1,0}+m_{1,1}-m_{2,0}+m_{2,1}-k-s+2)^{\underline{j-k-s}}(m_{2,0}-k-s)^{\underline{j-k-s}}(m_{1,1}+2)^{\underline{k+s}}m_{2,1}^{\underline{k+s}},$$

$$
\begin{aligned}
p_\lambda(z,\partial) = \frac{1}{c_\lambda} & \sum_{k=l_{2,1}}^{\lfloor\frac{l_{1,1}+l_{2,1}}{2}\rfloor} \sum_{j=\max\{k,l_{2,0}\}}^{\min\{l_{1,0}+k,l_{1,1}+l_{2,1}-k\}} (-1)^{j-l_{2,0}} \binom{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j}{j-l_{2,0}} \\
& \cdot \binom{l_{1,0}+l_{1,1}+l_{2,1}-2j}{l_{1,0}-j+k} \frac{l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}-j+1}{l_{1,0}+l_{1,1}-2l_{2,0}+l_{2,1}+1} \\
& \cdot \sum_{l=l_{2,1}}^{\min\{l_{2,0},l_{1,1}-l_{2,0}+l_{2,1}\}} (-1)^{l-l_{2,1}} \binom{l_{2,0}-l_{2,1}}{l-l_{2,1}} \binom{j-l}{j-k} \frac{(l_{1,0}+l_{1,1}-l_{2,0}+2)_{\underline{l-l_{2,1}}}}{(l_{1,1}-l_{2,1}+1)_{\underline{l-l_{2,1}}}} \\
& \cdot \prod_{a=j-k}^{l_{1,0}-1} (D_{1,0}-a) \prod_{b=j+k}^{l_{1,1}+l_{2,1}-1} (D_{1,1}-b) \sum_{s=0}^{j-k} (-1)^s \binom{j-k}{s} \\
& \cdot \prod_{t=k+s}^{j-1} (D_{2,0}-t(D_{1,0}+D_{1,1})+t^2-2t) \prod_{c=0}^{k+s-1} (D_{2,1}-cD_{1,1}+c^2-2c).
\end{aligned}
$$

この作用 (K,V) の強可視性を示す slice を与える. そのために, 記号を与える.

$$
\begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,2} & x_{1,4} \\ x_{3,0} & x_{3,2} & x_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_{1,0} & 0 & -x_{3,0} & 0 \\ x_{1,0} & 0 & x_{1,2} & 0 & x_{1,4} \\ 0 & -x_{1,2} & 0 & -x_{3,2} & 0 \\ x_{3,0} & 0 & x_{3,2} & 0 & x_{3,4} \\ 0 & -x_{1,4} & 0 & -x_{3,4} & 0 \end{pmatrix}.
$$

そこで, 次のような V の部分集合を考える.

$$
S_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,2} & x_{1,4} \\ x_{3,0} & x_{3,2} & x_{3,4} \end{bmatrix} ; x_{j,k} \in \mathbb{R} \right\},
$$

$$
S_0 := \left\{ \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,2} & x_{1,4} \\ x_{3,0} & x_{3,2} & x_{3,4} \end{bmatrix} ; \begin{aligned} x_{1,0} &= \ r\cos\theta_1\cos\theta_2, \\ x_{1,2} &= \ r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ x_{1,4} &= \ r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, \\ x_{3,0} &= \ r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_{3,2} &= \ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ x_{3,4} &= -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, \\ & r>0,\ \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}.
$$

すると, 4 節と同様に, S_1 は 6 次元実 vector 空間, S_0 は 4 次元実部分多様体で, S_1 を実 vector 空間として生成する. さらに, $\sigma : V \longrightarrow V$ を通常の複素共役とすると, S_1, S_2 はともに (K,V) の slice になり, $K \cdot S_1 = V$, $K \cdot S_0 = V \setminus \{0\}$ となる. 3 節と同様にして $N_K(S_j)$, $Z_K(S_j)$, $N_K(S_j)$, $\widetilde{W}$ を考えると, $W_K(S_1) \simeq \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$, $\widetilde{W} \simeq \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ となることがわかる.

Theorem 5.3. (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[S_1]^{W_K(S_1)}$.
(2) $\widetilde{W}$ は Proposition 1.4 の W と一致する.

Remark. 4, 5 節の 2 つの作用の slice には次のような関係がある．$S_j^{(4)}$, $S_j^{(5)}$ $(j = 1, 0)$ でそれぞれ 4, 5 節に現れた slice S_j を表し, $\psi : S_1^{(4)} \longrightarrow S_1^{(5)}$ を以下で定義する．

$$\psi : \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & 0 \cdots 0 \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & -x_{1,0} & 0 & -x_{2,0} & 0 \\ x_{1,0} & 0 & x_{1,1} & 0 & x_{1,2} \\ 0 & -x_{1,1} & 0 & -x_{2,1} & 0 \\ x_{2,0} & 0 & x_{2,1} & 0 & x_{2,2} \\ 0 & -x_{1,2} & 0 & -x_{2,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

すると, ψ は実線型同型写像であり, $\psi(S_0^{(4)}) = S_0^{(5)}$ が成り立つ．さらに, この ψ により $W_K(S_1)$ 同士, $\widetilde{W}$ 同士も同一視される．それにもかかわらず 4 節と 5 節に違いが現れるのは, ρ が異なることによる．それは以下のように説明される．$\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^*$ 上の K-不変な内積により $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}^* \oplus (\mathfrak{a}^*)^{\perp}$ と直和分解し, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ $(\rho_1 \in \mathfrak{a}^*, \rho_2 \in (\mathfrak{a}^*)^{\perp})$ と表す．このとき, 2 項係数に本質的に影響するのは ρ_1 である．この ρ_1 を 4, 5 節の対象について具体的に表す．まず, 4 節の $\mathfrak{a}^*$ を, $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n)$ が $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n)$ と局所同型であることより以下のようにして $\mathbb{C}^4$ と同一視する．

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 \ni \lambda &= (l_{1,0}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1}) \\ &\leftrightarrow (l_{1,0} + l_{1,1} - l_{2,0} + l_{2,1}, l_{2,0}; l_{1,1}, l_{2,1}, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{h}^*. \end{aligned}$$

すると, ρ_1 は次のように表わされる．

$$\mathbb{C}^4 \ni (0, 1, 0, 0) \leftrightarrow (1, 0; 1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{h}^*.$$

5 節の $\mathfrak{a}^*$ は, $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4)$ を $\mathbb{T} \times \mathrm{U}(4)$ と局所同型な compact Lie 群と考えることにより以下のようにして $\mathbb{C}^4$ と同一視される．

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 \ni \lambda &= (l_{1,0}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1}) \\ &\leftrightarrow (l_{1,0}; l_{1,0} + l_{1,1} - l_{2,0} + l_{2,1}, l_{1,1}, l_{2,0}, l_{2,1}) \in \mathfrak{h}^*. \end{aligned}$$

このことにより, ρ_1 は次のように表わされる．

$$\mathbb{C}^4 \ni (0, 2, 0, 0) \leftrightarrow (0; 2, 2, 0, 0) \in \mathfrak{h}^*.$$

4, 5 節の対象のいずれについても, Proposition 1.4 の W は $\mathfrak{a}^* + \rho_1 \simeq \mathbb{C}^4$ に以下のように作用する元で生成される．

$$\begin{aligned} &(l_{1,0}, l_{1,1} + c, l_{2,0}, l_{2,1}) \mapsto (l_{1,0}, l_{2,1}, l_{2,0}, l_{1,1} + c), \\ &(l_{1,0}, l_{1,1} + c, l_{2,0}, l_{2,1}) \mapsto (l_{1,0}, l_{1,1} + c, l_{1,0} + l_{1,1} - l_{2,0} + l_{2,1} + c, l_{2,1}), \end{aligned}$$

ただし, c は 4, 5 節の対象それぞれに対して 1, 2 である．

References

[1] Benson, C. and Ratcliff, G., A classification of multiplicity-free actions, *J. Algebra*, **181** (1996), 152–186.

[2] Benson, C. and Ratcliff, G., On multiplicity free actions, *Representations of Real and p-adic Groups*, *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci., Natl. Univ. Singapole*, **2**, Singapole Univ. Press, 2004, pp. 221–304.

[3] Faraut, J. and Koranyi, A., Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, *J. Funct. Anal.*, **88** (1990), 64–89.

[4] Faraut, J. and Koranyi, A., *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Sci. Publ., Oxford, 1994.

[5] Goodman, R. and Wallach, N. R., *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[6] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, San Diego, 1978.

[7] Howe, R. and Umeda, T., The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, *Math. Ann.*, **290** (1991), 565–619.

[8] Johnson, K., On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmetric space, *J. Algebra*, **67** (1980), 72–81.

[9] Kac, V. G., Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra*, **64** (1980), 190–213.

[10] 菊地 克彦,「階数３の multiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素」, *Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B7**, RIMS, 2008, pp. 101–120.

[11] Knop, F., Some remarks on multiplicity free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **514**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 301–317.

[12] Knop, F., Construction of commuting difference operators for multiplicity free spaces, *Sel. Math. N.S.*, **6** (2000), 443–470.

[13] Knop, F., Semisymmetric polynomials and the invariant theory of matrix vector pairs, *Representation Theory*, **5** (2001), 224–266.

[14] Kobayashi, T., Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. RIMS* **41** (2005), 497–549.

[15] Kobayashi, T., Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, *Representation Theory and Automorphic Forms*, *Progr. Math.*, **255**, Birkhäuser Boston, Boston, 2008, pp, 45–109.

[16] Koike, K. and Terada, I., Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n, *J, Algebra*, **107** (1987), 466–511.

[17] Leahy, A., A classification of multiplicity free representations, *J, Lie Theory* **8** (1998), 367–391.

[18] Okounkov, A. and Olshanski, G., Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications, *Math. Res. Letter* **4** (1997), 69–78.

[19] Sasaki, A., Visible actions on multiplicity-free spaces, Doctoral dissertation, Waseda University, 2008.

[20] Satake, I., *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Iwanami Shoten Publ. and Princeton Univ. Press, Tokyo, 1980.

[21] Schmid, W., Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen, *Invent. Math.* **9** (1969), 61–80.

[22] Sekiguchi, J., Zonal spherical functions on some symmetric spaces, *Publ. RIMS* **12** suppl. (1977), 455–464.

[23] 反橋 拓朗, Multiplicity free 作用に関する不変式と不変微分作用素, 京都大学大学院理学研究科修士論文, 2008.

[24] Upmeier, H., Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 1–25.