RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 103–110

$SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現の Whittaker 関数の明示公式
(Whittaker functions for generalized principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$)

宮崎 直 (Tadashi Miyazaki)

Abstract

We study Whittaker functions for generalized principal series representations of the real special linear group $SL(3,\mathbf{R})$ of degree 3. From the Capelli elements and shift operators, we give the system of partial differential equations characterizing Whittaker functions. We give 6 formal power series solutions of this system. We also give the Mellin-Barnes type integral expressions of the unique solution having the moderate growth property. See [5] for details.

1 序文

本稿では $SL(3,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の明示公式を考える．$SL(3,\mathbf{R})$ の既約許容表現で Whittaker 模型を持つ表現のクラスは主系列表現と (極大放物型部分群から誘導される) 一般主系列表現の 2 種類である．主系列表現に関する Whittaker 関数の明示公式についてはクラス 1 の場合は Bump([1]) によって与えられており，クラス 1 でない場合については石井，眞鍋，織田 ([3]) によって与えられている．ここでは残っている一般主系列表現の場合について，Whittaker 関数の明示公式を与える．詳しい証明などについては [5] を参照されたい．この研究が保型形式の研究に，例えば無限素点での局所ゼータ積分の研究等に役立つ事を期待している．

Received December 17, 2008. Accepted April 28, 2009.
Department of Mathematics, Tokyo University of Agriculture and Technology, Koganei, Tokyo 184-8588, Japan
miyaza@cc.tuat.ac.jp

2　$SL(3,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数

2.1　$SL(3,\mathbf{R})$ の構造

$G = SL(3,\mathbf{R})$ とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．G の岩澤分解 $G = N_0A_0K$ を

$$\begin{aligned}
N_0 &= \left\{ n[x_1,x_2,x_3] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \right\}, \\
A_0 &= \left\{ a[y_1,y_2] = \begin{pmatrix} y_1y_2y_3 & 0 & 0 \\ 0 & y_2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} y_1, y_2 \in \mathbf{R}_{>0}, \\ y_3 = (y_1y_2^2)^{-\frac{1}{3}} \end{array} \right\}, \\
K &= SO(3)
\end{aligned}$$

としておく．極大コンパクト部分群 K の Lie 代数を $\mathfrak{k}$ とし，$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

とする．ここで，$\mathfrak{p}$ は Killing 形式に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間である．

また，P_1 を

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

で定義される G の極大放物型部分群とし，その Langlands 分解 $P_1 = N_1A_1M_1$ を

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{ n[0,x_2,x_3] \mid (x_2,x_3) \in \mathbf{R}^2 \} \subset N_0, \\
A_1 &= \{ a[1,y_2] \mid y_2 \in \mathbf{R}_{>0} \} \subset A_0, \\
M_1 &= \left\{ m[h] = \left(\begin{array}{c|c} h & O_{2,1} \\ \hline O_{1,2} & \det(h)^{-1} \end{array} \right) \;\middle|\; h \in SL^{\pm}(2,\mathbf{R}) \right\} \simeq SL^{\pm}(2,\mathbf{R}), \\
SL^{\pm}(2,\mathbf{R}) &= \{ g \in GL(2,\mathbf{R}) \mid \det(g) = \pm 1 \}
\end{aligned}$$

とする．

2.2　K の既約有限次元表現

$\tilde{V}_l$ を l 次同次多項式のなす多項式環 $\mathbf{C}[x_1,x_2,x_3]$ の部分空間とする．$SO(3)$ の $\tilde{V}_l$ 上の作用を

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_l(g)f(x_1,x_2,x_3) = f((x_1,x_2,x_3)\cdot g), \\
&g \in SO(3), \quad f \in \tilde{V}_l.
\end{aligned}$$

で定義する．ここで，$(x_1,x_2,x_3)\cdot g$ は行列の積を表す．$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2\in\tilde{V}_2$ は $SO(3)$-不変だから，$r^2\cdot\tilde{V}_{l-2}$ は $\tilde{V}_l$ の $SO(3)$-不変部分空間である．$l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，τ_l を $V_l=\tilde{V}_l/(r^2\cdot\tilde{V}_{l-2})$ 上の $\tilde{\tau}_l$ の商表現とする．($l<0$ のとき，$\tilde{V}_l=0$ とする．) このとき，(τ_l,V_l) は既約 $2l+1$ 次元表現であり，$SO(3)$ の既約有限次元表現の同型類は τ_l ($l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$) で尽くされる．

また，V_l の基底 $\{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in S_l}$ を

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}} &= x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3} \mod r^2\cdot\tilde{V}_{l-2},\\ S_l &= \{\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)\in(\mathbf{Z}_{\geq 0})^3 \mid n_2\leq 1,\ n_1+n_2+n_3=l\} \end{aligned}$$

として定義する．

2.3 一般主系列表現

D_k^+ を Blattner パラメータ $k\geq 2$ の $SL(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現とし，$M_1\simeq SL^{\pm}(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現 D_k を $D_k=\mathrm{Ind}_{SL(2,\mathbf{R})}^{SL^{\pm}(2,\mathbf{R})}(D_k^+)$ によって定める．(M_1 の離散系列表現はこのようなもので尽くされる．) また，$\nu\in\mathbf{C}$ に対して，指標 $e^{\nu}\colon A_1\to\mathbf{C}^{\times}$ を $e^{\nu}(a[1,y_2])=y_2^{\nu}$ で定義しておく．

定義 2.1. G の一般主系列表現 $(\pi_{(\nu,k)},H_{(\nu,k)})$ を

$$\pi_{(\nu,k)}=\mathrm{Ind}_{P_1}^{G}(1_{N_1}\otimes e^{\nu+1}\otimes D_k)$$

で定義する．すなわち，$\pi_{(\nu,k)}$ の表現空間 $H_{(\nu,k)}$ は

$$H_{(\nu,k)}^{\infty}=\left\{ f\colon G\to V_{D_k}^{\infty} \;\middle|\; \begin{array}{l} f\text{ は滑らか},\\ f(namx)=e^{\nu+\rho}(a)D_k(m)f(x),\\ (n,a,m,g)\in N_1\times A_1\times M_1\times G \end{array} \right\}$$

のノルム

$$\|f\|^2=\int_K \|f(k)\|_{D_k}^2dk$$

による完備化であり，G はこの空間に右移動で作用する．ここで，$\|\cdot\|_{D_k}$ は D_k の表現空間 V_{D_k} 上のノルムであり，$V_{D_k}^{\infty}$ は滑らかな元全体のなす V_{D_k} の部分空間である．

補題 2.2. K の既約表現 τ_l ($l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$) の $\pi_{(\nu,k)}|_K$ での重複度を $[\pi_{(\nu,k)}|_K\colon\tau_l]$ と書く事にする．このとき，

$$[\pi_{(\nu,k)}|_K\colon\tau_k]=1,\qquad\qquad [\pi_{(\nu,k)}|_K\colon\tau_l]=0\quad(0\leq l<k).$$

2.4 Whittaker 関数

N_0 のユニタリ指標 ξ は実数 c_1, c_2 を用いて，

$$\xi(n[x_1, x_2, x_3]) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(c_1x_1 + c_2x_2))$$

と書かれる．本稿では ξ は非退化，すなわち $c_1c_2 \neq 0$ の場合を考える．

N_0 の非退化ユニタリ指標 ξ に対して，

$$C_\xi^\infty(N_0\backslash G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(ng) = \xi(n)\varphi(g),\ (n, g) \in N_0 \times G\}$$

とおいて，G はこの空間に右移動で作用するのものとする．G の既約許容表現 (π, H_π) と，その K-タイプ (τ^*, V_τ^*) と埋め込み $\iota\colon V_\tau^* \to H_\pi$ を固定する．このとき，$\mathcal{I}_{\xi,\pi} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbf{C}, K)}(H_{\pi,K}, C_\xi^\infty(N_0\backslash G))$ の元 T に対して，

$$T(\iota(v^*))(g) = \langle v^*, \Phi_T(g)\rangle \quad (v^* \in V_\tau^*,\ g \in G)$$

という関係式によって定義されるベクトル値関数 $\Phi = \Phi_T\colon G \to V_\tau$ を (π, ξ, ι) に関する Whittaker 関数と呼ぶ事にする．ここで，$H_{\pi,K}$ は H_π の K-有限部分であり，(τ^*, V_τ^*) は (τ, V_τ) の反傾表現である．

$$\mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota) = \{\Phi_T \mid T \in \mathcal{I}_{\xi,\pi}\}$$

を (π, ξ, ι) に関する Whittaker 関数の空間として，さらにその中で緩増加なもの全体を $\mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota)^{\mathrm{mod}}$ と書く事にする．

注意 2.3. $\Phi \in \mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota)$ に対して，

$$\Phi(ngk) = \xi(n)\tau(k)^{-1}\Phi(g),\ (n, g, k) \in N_0 \times G \times K$$

が成り立つ事と岩澤分解 $G = N_0A_0K$ から，Φ は A_0 への制限 $\Phi|_{A_0}$ で決まる事が分かる．$\Phi|_{A_0}$ を Φ の動径成分 (radial part) という．

補題 2.4 ([4],[6],[7])**.** *Whittaker* 関数の空間 $\mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota)$ と緩増加 *Whittaker* 関数の空間 $\mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota)^{\mathrm{mod}}$ の次元は以下で与えられる:

$$\dim_\mathbf{C} \mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota) = 6,$$
$$\dim_\mathbf{C} \mathrm{Wh}(\pi, \xi, \iota)^{\mathrm{mod}} = 1.$$

3 偏微分方程式系

単射 K-準同型 $\iota_k\colon V_k \to H_{(\nu,k)}$ をとって固定する．$\Phi \in \mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)}, \xi, \iota_k)$ に対して，

$$\varphi_\mathbf{n}(y_1, y_2) = \langle v_\mathbf{n}, \Phi(a[y_1, y_2])\rangle, \quad y_1, y_2 \in \mathbf{R}_{>0},\ \mathbf{n} \in S_k$$

とおくと，Φ は $\{\varphi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in S_k}$ で特徴付けられる．$\varphi_{\mathbf{n}}$ を Φ の $\mathbf{n}$-成分と呼ぶ事にする．また，$\varphi_{\mathbf{n}}$ はある $T\in\mathcal{I}_{\xi,\pi_{(\nu,k)}}$ を用いて，$\varphi_{\mathbf{n}}=T(\iota_k(v_{\mathbf{n}}))|_{A_0}$ と表せる事に注意しておく．

ここで，$\pi_{(\nu,k)}$ の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群としての構造から 2 種類の方法で，Whittaker 関数のみたす偏微分方程式を構成する．まず，一つ目は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の普遍包絡環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の元から偏微分方程式を構成する方法である．よく知られているように $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $H_{(\nu,k),K}$ に定数倍で作用するから，$C\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ に対して，ある定数 λ_C が存在して，

$$C\varphi_{\mathbf{n}}=\lambda_C\varphi_{\mathbf{n}}\qquad(\mathbf{n}\in S_k)\tag{3.1}$$

となる事が分かる．$G=SL(3,\mathbf{R})$ の場合，$Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は Capelli 元 C_2,C_3([2, §11] 参照) によって生成されるため，$C=C_2,C_3$ の場合に微分方程式 (3.1) を考えれば良い．

二つ目はシフト作用素から，偏微分方程式を構成する方法である．随伴表現によって，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ を K-加群とみるとき，$l\geq 2$ に対して，

$$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\otimes_{\mathbf{C}}V_l\simeq V_{l+2}\oplus V_{l+1}\oplus V_l\oplus V_{l-1}\oplus V_{l-2}$$

と既約分解される．ここで $-2\leq i\leq 2$ に対して，I_i を V_{k+i} から $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\otimes_{\mathbf{C}}V_k$ への単射 K-準同型とし，$\tilde{\iota}_k$ を

$$\tilde{\iota}_k\colon\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\otimes_{\mathbf{C}}V_k\ni X\otimes v\mapsto\pi_{(\nu,k)}(X)\iota_k(v)\in H_{(\nu,k),K}$$

で定義される K-準同型とする．このとき，補題 2.2 より，ある定数 μ が存在して，

$$\tilde{\iota}_k\circ I_0=\mu\cdot\iota_k,\qquad\qquad\tilde{\iota}_k\circ I_i=0\quad(i=-1,-2)$$

となる事が分かる．ここで，$\mathbf{n}\in S_k$ に対して，

$$I_i(v_{\mathbf{n}})=\sum_{\mathbf{n}'\in S_k}X^{(i)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}\otimes v_{\mathbf{n}'},\qquad\qquad X^{(i)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}\in\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$$

とすると，

$$\sum_{\mathbf{n}'\in S_k}X^{(0)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}\varphi_{\mathbf{n}'}=\mu\varphi_{\mathbf{n}},\qquad\qquad\sum_{\mathbf{n}'\in S_k}X^{(i)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}\varphi_{\mathbf{n}'}=0\ (i=-1,-2)\tag{3.2}$$

が成り立つ事が分かる．

$\mathfrak{n}_0$ と $\mathfrak{a}_0$ をそれぞれ N_0 と A_0 の Lie 代数とし，$X\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の岩澤分解の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{n}_{0\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{a}_{0\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ に沿った分解を

$$X=X_{\mathfrak{n}_0}+X_{\mathfrak{a}_0}+X_{\mathfrak{k}}\qquad\qquad(X_{\mathfrak{n}_0},X_{\mathfrak{a}_0},X_{\mathfrak{k}})\in\mathfrak{n}_{0\mathbf{C}}\times\mathfrak{a}_{0\mathbf{C}}\times\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$$

と書く事にすると，

$$X\varphi_{\mathbf{n}}=\{X_{\mathfrak{a}_0}+d\xi(X_{\mathfrak{n}_0})\}\varphi_{\mathbf{n}}+T(\iota_k(d\tau_l(X_{\mathfrak{k}})v_{\mathbf{n}}))|_{A_0}\tag{3.3}$$

となる事が分かる．ここで，$d\xi$ と $d\tau_l$ はそれぞれ ξ と τ_l の微分である．これを用いて，(3.1) と (3.2) を具体的に書き下して，整理すると次のような偏微分方程式系を得る．以下，簡単のために，$c_1=c_2=1$ とする．(この仮定は一般性を失わない．)

命題 3.1. $\varphi_{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n}\in S_k)$ を $\Phi\in \mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)$ の $\mathbf{n}$-成分とする.

$$\varphi_{\mathbf{n}}(y_1,y_2)=y_1y_2\tilde{\varphi}_{\mathbf{n}}(y_1,y_2)$$

とおくとき，$\tilde{\varphi}_{\mathbf{n}}$ は以下の微分方程式をみたす.

$$\begin{aligned}
&\{\partial_1^2+\partial_2^2-\partial_1\partial_2-4\pi^2(y_1^2+y_2^2)-k\partial_1\\
&\quad +l_1l_2+l_2l_3+l_3l_1-k^2\}\tilde{\varphi}_{(k,0,0)}=0, &(3.4)\\
&\{\partial_1(\partial_1-\partial_2)\partial_2+4\pi^2(y_2^2\partial_1+y_1^2\partial_2)\\
&\quad -k\partial_1(\partial_1+k)+4k\pi^2y_1^2-l_1l_2l_3\}\tilde{\varphi}_{(k,0,0)}=0, &(3.5)\\
&(-2\partial_1+2\partial_2+k-1-\nu)\tilde{\varphi}_{(k-1,1,0)}\\
&\quad +4\pi\sqrt{-1}y_2\tilde{\varphi}_{(k-1,0,1)}+4\pi\sqrt{-1}y_1\tilde{\varphi}_{(k,0,0)}=0, &(3.6)\\
&(2\partial_1-k+1-\nu)\tilde{\varphi}_{(n_1,1,n_3)}\\
&\quad -4\pi\sqrt{-1}y_1(\tilde{\varphi}_{(n_1+1,0,n_3)}+\tilde{\varphi}_{(n_1-1,0,n_3+2)})=0, &(3.7)\\
&(2\partial_1-k+1-\nu)\tilde{\varphi}_{(n_1,0,n_3)}+4\pi\sqrt{-1}y_1\tilde{\varphi}_{(n_1-1,1,n_3)}=0. &(3.8)
\end{aligned}$$

ここで，$(l_1,l_2,l_3)=(-\nu+k,\ \frac{\nu+k-1}{2},\ \frac{\nu+k+1}{2})$ とし，$\partial_i=y_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ は y_i に関する *Euler* 作用素とする.

(3.6)，(3.7)，(3.8) によって，$\tilde{\varphi}_{(k,0,0)}$ から他の $\tilde{\varphi}_{\mathbf{n}}$ は帰納的に決まる事が分かる．さらに (3.4)，(3.5) は $\tilde{\varphi}_{(k,0,0)}$ がみたす微分方程式であるが，具体的な計算によって解空間が 6 次元である事が分かる．これは $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)$ の次元と一致しており，この偏微分方程式系は $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)$ の元である事を特徴付ける事が分かる.

注意 3.2. 微分方程式 (3.1) は 1 つの関数 $\varphi_{\mathbf{n}}$ の偏微分方程式のように見えるが，(3.3) を用いて書き下すと，実際には $\varphi_{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n}\in S_k)$ 達の微分差分方程式になる．(3.4) と (3.5) は (3.1) と (3.2) から得られる微分方程式を組み合わせる事によって得られるものである.

4　Whittaker 関数の明示公式

命題 3.1 の偏微分方程式系を確定特異点 $(y_1,y_2)=(0,0)$ の近傍で解く事によって，次の定理を得る.

定理 4.1. $l_i-l_j\notin 2\mathbf{Z}$ $(1\le i\ne j\le 3)$ と仮定する．$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$ と $\mathbf{n}\in S_k$ に対して，$M_{\mathbf{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(y_1,y_2)$ を

$$\begin{aligned}
&M_{\mathbf{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(y_1,y_2)=(-1)^{n_1}(-\sqrt{-1})^{n_2}y_1y_2\\
&\times\sum_{m_1,m_2\ge 0}C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{(\mathbf{n};m_1,m_2)}(\pi y_1)^{l_\alpha+2r_{1,\alpha}+2m_1}(\pi y_2)^{-l_\beta+k-2r_{2,\beta}+2m_2}
\end{aligned}$$

$$C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{(\mathbf{n};m_1,m_2)} = \frac{\left(\frac{l_\alpha-l_\beta+2}{2}\right)_{m_1+m_2+r_{1,\alpha}-r_{2,\beta}+n_2/2}}{m_1!m_2!\left(\frac{l_\alpha-l_\beta+2}{2}\right)_{m_1+r_{1,\alpha}-r_{1,\beta}}\left(\frac{l_\alpha-l_\gamma+2}{2}\right)_{m_1+r_{1,\alpha}-r_{1,\gamma}}} \times \frac{1}{\left(\frac{l_\alpha-l_\beta+2}{2}\right)_{m_2+r_{2,\alpha}-r_{2,\beta}}\left(\frac{l_\gamma-l_\beta+2}{2}\right)_{m_2+r_{2,\gamma}-r_{2,\beta}}}$$

$$r_{1,1} = -(n_2+n_3)/2, \qquad r_{2,1} = -n_3/2,$$

$$r_{1,2} = \begin{cases} 1/2 & \textit{if } 2|(n_2+n_3-1), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \qquad r_{2,2} = \begin{cases} 1/2 & \textit{if } 2|(n_3-1), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

$$r_{1,3} = -r_{1,2}, \qquad r_{2,3} = -r_{2,2},$$

で定義する．ここで，$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ とする．このとき，$M^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{\mathbf{n}}$ を $\mathbf{n}$-成分に持つ $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)$ の元 $M^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ が存在し，

$$\{M^{(\alpha,\beta,\gamma)} \mid \{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}\}$$

は $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)$ の基底をなす.

さらに定数倍を除いて唯一つの $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)^{\mathrm{mod}}$ の元は次の定理で与えられる.

定理 4.2. $\mathbf{n} \in S_k$ に対して，$W_{\mathbf{n}}(y_1,y_2)$ を

$$W_{\mathbf{n}}(y_1,y_2) = \frac{(-1)^{n_1}(\sqrt{-1})^{n_2}\pi y_1 y_2}{2^{k-1}(2\pi\sqrt{-1})^2} \times \int_{\rho_2-\sqrt{-1}\infty}^{\rho_2+\sqrt{-1}\infty}\int_{\rho_1-\sqrt{-1}\infty}^{\rho_1+\sqrt{-1}\infty} V_{\mathbf{n}}(s_1,s_2)(2\pi y_1)^{-s_1}(2\pi y_2)^{-s_2}ds_1ds_2,$$

$$V_{\mathbf{n}}(s_1,s_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{s_1-\nu+n_1}{2}\right)\Gamma\left(s_1+\frac{\nu+k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+\nu+n_3}{2}\right)\Gamma\left(s_2-\frac{\nu-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+k-n_2}{2}\right)}$$

と定義する．ここで，$\rho_1,\rho_2 \in \mathbf{R}$ は積分路が被積分関数の全ての極の右側になるようにとる．このとき，$\mathbf{n}$-成分が $W_{\mathbf{n}}$ となる $\mathrm{Wh}(\pi_{(\nu,k)},\xi,\iota_k)^{\mathrm{mod}}$ の元 W が存在する．さらに，W は $M^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ によって，以下のように展開される:

$$W(g) = \sum_{\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}} \Gamma(\alpha,\beta,\gamma)\cdot M^{(\alpha,\beta,\gamma)}(g),$$

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma) = \Gamma\left(\frac{l_\beta-l_\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l_\beta-l_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l_\gamma-l_\alpha}{2}\right).$$

参考文献

[1] Daniel Bump. *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$, Vol. 1083 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Roger Howe and Tōru Umeda. The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions. *Math. Ann.*, Vol. 290, No. 3, pp. 565–619, 1991.

[3] Hiroyuki Manabe, Taku Ishii, and Takayuki Oda. Principal series Whittaker functions on $\mathrm{SL}(3, R)$. *Japan. J. Math. (N.S.)*, Vol. 30, No. 1, pp. 183–226, 2004.

[4] Hisayosi Matumoto. Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators. *Acta Math.*, Vol. 161, No. 3-4, pp. 183–241, 1988.

[5] Tadashi Miyazaki. Whittaker functions for generalized principal series representations for $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$. *Manuscripta Math.*, Vol. 128, pp. 107–135, 2009.

[6] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 100, pp. 171–193, 1974.

[7] Nolan R. Wallach. Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups. In *Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983)*, Vol. 1024 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 287–369. Springer, Berlin, 1983.