

曲線の差分幾何 (Discrete Differential Geometry of Curves)

福岡大学理学部 (Fukuoka University)

松浦 望 (Matsuura, Nozomu)

概要

This is a survey on discrete differential geometry of curves in Euclidean plane, or in Euclidean space. We discuss explicit solutions to curve motions governed by the continuous, semi-discrete, or discrete potential modified KdV equations.

1 はじめに

差分幾何は離散微分幾何や離散可積分幾何とも呼ばれ、これらの呼び名が示すように、この分野においては、離散可積分系理論に適合するような幾何学的枠組みを構築することが中心的な研究課題となっている。連続系の可積分系理論がいろいろな場面で微分幾何学と結びついていることを受けて、その離散的類似を展開すべく 1990 年代の半ばころから活発に研究されるようになった。たとえば、ソリトン方程式の代表例である KdV 方程式は曲線の運動に付随して自然に現れることが知られているが、このことから、離散 KdV 方程式によって支配されるような離散曲線の離散時間発展を見つけよう、という問題意識が自然に生じてくる。井ノ口の解説 [42] にもある通り、差分幾何を研究することの動機はふたつあり、ひとつは離散系のほうが連続系よりも根源的で豊富な数学的構造を持つであろうことへの期待、もうひとつは、コンピュータによる可視化を支える理論的基盤の整備である。

差分幾何の文献としては、萌芽的なものはサウエル [34] があり、現代的な問題意識ではボベンコとスリスによる教科書 [1] がある。これは主としてベルリン工科大学のグループによる研究成果をまとめたもので、曲面の差分幾何についての広範なことがらを説明している。本講究録の井ノ口による解説も参照されたい。曲線の差分幾何については、ドリヴァとサンティニの論文 [4] やホフマンの講義録 [17] (その日本語訳が [44, 第 4 章] にある) や筆者の [26] などがあるが、教科書として体系的にまとめられたものは見当たらない。これは曲面の場合に比べてまだ理論の蓄積が少ないせいだろう。本稿では、ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ およびユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲線の差分幾何について、おもに井ノ口と梶原と筆者と太田の論文 [20][21] に基づき、最新の研究成果を解説する。本稿の構成はつぎの通りである。まず第 2 節では曲線の微分幾何について基本的な用語を説明する。つづく第 3 節では曲線を離散化し、離散曲線に対するフルネ・セレの公式を導出する。第 4 節では曲線および離散曲線の変形が、特別な場合にはソリトン方程式によって統制されることを説明する。そのなかでも本稿では特に変形 KdV 方程式 (mKdV 方程式) に注目し、ポテンシャル mKdV 方程式による曲線の連続的変形、半離散ポテンシャル mKdV 方程式による離散曲線の連続的変形、および離散ポテンシャル mKdV 方程式による離散曲線の離散的変形、のそれぞれについて第 5 節で詳しく解説する。とりわけ第 5.4 節の明示公式と厳密解、および第 5.6 節のベックルト変換について述べるのが本稿の主眼である。また、第 5.7 節では空間曲線や離散空間曲線の連続的変形について、平面の場合と同様の議論が展開できることを述べる。

2 曲線

この節ではユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ あるいはユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲線について微分幾何の用語を復習する。ここで述べることは微分幾何のどんな教科書にも載っている。標準的な教科書としてはたとえば梶原と山田 [49] や小林 [45] がある。洋書ならばストリイク [35] とアイゼンハルト [5] がどちらも空間曲線について約 50 頁を割いていて、詳しい。あるいはむしろ、井ノ口 [41] やロジャースとシーフ [33] の著書は、目的意識が本稿の趣旨と合致しているから、はじめからこれらを読むのがよいかもしれない。

2.1 平面曲線

ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ 内に曲線があるとする．その曲線上を質点が速さ 1 で動いていく．このとき、時刻 x における質点の位置を $\gamma(x)$ と書けば、速度 $\gamma'(x)$ の大きさは 1、すなわち $\langle \gamma'(x), \gamma'(x) \rangle = 1$ をみたす．質点の速さが 1 でないような一般の場合には、時刻 x の代わりに出発点からの曲線の長さ

$$\tilde{x}(x) = \int^x |\gamma'(x)| dx$$

を径数として採用し、 $\tilde{x}$ によって曲線 γ を径数表示しなおせばやはり $\langle \gamma'(\tilde{x}), \gamma'(\tilde{x}) \rangle = 1$ をみたす．このように、速さ 1 の径数をとることと弧長を径数に選ぶことは本質的に同じことであって、したがって始めから質点の速さを 1 と考えて構わない．速さ 1 となる曲線の径数を弧長径数という．以下、曲線 γ を弧長径数 x で表示しておく．本稿では以後ずっと x と書けばそれは弧長径数である．また、速度 $\gamma'(x)$ を左回りに 90 度回転したベクトルを $N(x)$ と書き、法線ベクトルという．すなわち

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma'(x)$$

である．また $\langle \gamma''(x), \gamma'(x) \rangle = 0$ だから加速度 $\gamma''(x)$ は速度と直交し、したがって

$$\gamma''(x) = \kappa(x)N(x) \quad (1)$$

なる函数 κ が存在する．この函数 κ を平面曲線 γ の曲率という．行列 $(\gamma'(x), N(x))$ を $\Phi(x)$ と書けば

$$\Phi'(x) = \Phi(x) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(x) \\ \kappa(x) & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これをフルネの公式という．逆に、任意に与えられた函数 κ に対して、それを曲率にもつような平面曲線 γ が合同変換（回転と平行移動）を除いて一意に存在することが知られており、これは平面曲線の基本定理といわれる．このように平面曲線は、回転と平行移動の差を除けば、曲率だけで決まってしまう．たとえば $\kappa \equiv 0$ ならば直線、 $\kappa \equiv 1$ ならば左回りの単位円周、 $\kappa \equiv -1$ ならば右回りの単位円周となる．より一般に、表現公式

$$\gamma(x) = \int^x \begin{pmatrix} \cos \theta(x) \\ \sin \theta(x) \end{pmatrix} dx, \quad \theta'(x) = \kappa(x) \quad (2)$$

がある．速度 γ' の偏角 θ の変化率がずばり曲率 κ を与えるところがうれしい．この函数 θ を角函数という．

注意 2.1 弧長径数は理論的には便利だが、現実的には、弧長径数が具体的に（つまり初等函数の範囲で）求められるような曲線に出会うことはめったにない．しかし、このあと第 5.4 節や第 5.7.3 節で見えるように、可積分系理論は、弧長で径数表示された曲線の例を豊富に提供する．

注意 2.2 ここに述べたのはユークリッド幾何における平面曲線論である．幾何を取りかえれば、その幾何に適した径数、および曲率を見つけないといけない．たとえばもし内積の概念がない幾何で考えるならば、上記の議論は破綻してしまう．そのような幾何の例とその取り扱いについては井ノ口 [41, 第 12–14 章], [40, 第 5 章] を参照されたい．

2.2 空間曲線

ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲線 γ を弧長径数 x によって表示しておけば $\langle \gamma'(x), \gamma'(x) \rangle = 1$ をみたすから、 $\langle \gamma''(x), \gamma'(x) \rangle = 0$ 、すなわち加速度 $\gamma''(x)$ と速度 $\gamma'(x)$ は直交する．そこで

$$N(x) = \frac{\gamma''(x)}{|\gamma''(x)|}, \quad \kappa(x) = |\gamma''(x)|$$

とおき, N を主法線ベクトル, κ を空間曲線 γ の曲率という. 平面曲線の場合とちがって, 空間曲線の曲率は非負の値をとる函数として定義されている. さらに, 記号 $\times$ でベクトル積を表し

$$B(x) = \gamma'(x) \times N(x), \quad \lambda(x) = -\langle N(x), B'(x) \rangle$$

とおいて, B を陪法線ベクトル (または従法線ベクトル), λ を捩率という. この陪という漢字には, したがう, とか, たすける, とか, けらい, という意味がある. 曲率 κ が接ベクトル γ' の変化率をはかる量だったのに対し, 捩率 λ は陪法線ベクトル B の変化率をはかる量である. すなわち捩率は接触平面 (接ベクトルと主法線ベクトルとで作られる平面) の変化を記述する. 本稿では, このあと第 5.7 節で見るとおり, 捩率が一定であるような空間曲線が興味の対象となる. 文献によっては曲率のことを第一曲率, 捩率のことを第二曲率と呼ぶ場合がある. 行列 $(\gamma'(x), N(x), B(x))$ を $\Phi(x)$ と書き, フルネ枠 (またはフルネ標構) という. フルネ枠は

$$\Phi'(x) = \Phi(x) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(x) & 0 \\ \kappa(x) & 0 & -\lambda(x) \\ 0 & \lambda(x) & 0 \end{pmatrix}$$

をみたま. これをフルネ・セレの公式という. 逆に, 任意に与えられた正値函数 κ と函数 λ に対して, これらをそれぞれ曲率と捩率にもつような空間曲線が合同変換の差を除いて一意に存在する (空間曲線の基本定理). たとえば $\kappa \equiv 1, \lambda \equiv 1$ ならば螺旋である. より一般に, 曲率と捩率を用いて, 平面曲線の場合にみたような不定積分による表現公式が得られるのかどうか, 筆者は知らない. 勝手に与えた函数たちを曲率と捩率にもつような空間曲線を描くには, とりあえずフルネ・セレの公式を数値的に積分するしかないだろう. そのようにして描かれるいくつかのグラフィクスについてはグレイ [10] を参照されたい.

注意 2.3 たいていの教科書では曲率に零点がない状況のみを考え, したがって空間曲線の曲率を常に正として取り扱う. しかし一般には, むろん, 曲率は零点をもつ. 曲率が 0 となる点 (これを変曲点と呼ぶ) においては主法線ベクトルが定義されず, 議論が面倒だから教科書では扱わないのが普通のようなのである. 普通でない教科書はたとえばウィルモア [38, 9 頁] で, 空間曲線の変曲点に関して短いながらも記述がある. そこでは曲率を「符号付き曲率」として扱うことが提唱されている. より詳しくはホード [19], あるいは川久保 [22, 215 頁] を参照されたい.

注意 2.4 正則な空間曲線 γ の捩率が恒等的に 0 ならば, γ は平面的になる. このとき γ には空間曲線としての曲率 κ と平面曲線としての曲率 $\tilde{\kappa}$ があるが, 両者の関係は $\kappa = |\tilde{\kappa}|$ である.

3 離散曲線

前節の議論を離散化しよう. フルネの公式とフルネ・セレの公式を離散化することがこの節の目標である. そのためには, 接ベクトルや法線ベクトルをどのように定義すればよいかが問題となる. 曲線の離散化については, サウエルの古い本 [34] を始めとして, ドリヴァとサンティニ [4] や久門と中山と和達 [14], ピンカーとスプリングボーンとワイスマン [32] やホフマンとクッツ [18], 藤岡と黒瀬 [7] や筆者 [26] など, いたるところで話が展開されている. 曲線それ自体の離散化はほとんど自明に近いものだから, フルネの公式やフルネ・セレの公式の離散化は誰が考えても同じものが出来上がるようである.

3.1 離散平面曲線

写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^2$, $n \mapsto \gamma_n$ がすべての整数 n に対して $\det(\gamma_{n+1} - \gamma_n, \gamma_n - \gamma_{n-1}) \neq 0$ をみたすとき, すなわちどの連続する 3 点 $\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}$ も同一直線上にないとき, 離散平面曲線, あるいはより詳しく正則

な離散平面曲線であるという。連続系においては弧長径数が大切だったから、その離散的類似として、次の‘接ベクトル’と‘法ベクトル’を考える。

$$a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n}, \quad N_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_n.$$

また連続するベクトル T_{n-1}, T_n のなす角度を κ_n とする。すなわち函数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (-\pi, \pi)$ を

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos \kappa_n & -\sin \kappa_n \\ \sin \kappa_n & \cos \kappa_n \end{pmatrix} T_{n-1} \quad (3)$$

によって定める。このとき $\Phi_n = (T_n, N_n)$ とおけば、 Φ は $\mathrm{SO}(2)$ 値の函数となる。離散平面曲線に対するフルネの公式は

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} \end{pmatrix}$$

となる。図形的な意味は明瞭だろう。

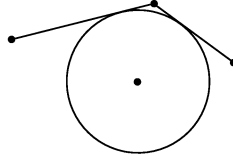
注意 3.1 連続系の式 (1) の類似として

$$T_n - T_{n-1} = \tan \frac{\kappa_n}{2} (N_n + N_{n-1})$$

が成り立つ。したがって大体 $\tan(\kappa_n/2)$ が‘離散曲率’の役割を果たすであろうことが期待される。より正確には

$$\frac{4}{a_n + a_{n-1}} \tan \frac{\kappa_n}{2}$$

を考えるべきかもしれない。いずれにせよ、離散平面曲線に対して曲率半径の離散的類似物を見ると、自然に $\tan(\kappa_n/2)$ が登場する。詳しくはホフマン [17, Definition 2.13] を参照されたい。



注意 3.2 ベクトル T_n は大きさが 1 だから、適当な函数 $\tilde{\theta}$ を用いて

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_n \\ \sin \tilde{\theta}_n \end{pmatrix}$$

と表せる。このとき函数 κ の定義式 (3) によって $\kappa_n = \tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_{n-1}$ である。これらは表現公式 (2) の離散的類似となっている。ところが、このあと第 5.3 節で見るように、離散可積分系理論の観点からは

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2}$$

によって導入される函数 θ が本質的な役割を果たす。

3.2 離散空間曲線

写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ がすべての整数 n に対して $\det(\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}) \neq 0$ をみたすとき、離散空間曲線、あるいはより詳しく正則な離散空間曲線であるという。離散空間曲線 γ に対して

$$a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n}, \quad \Delta T_n = \frac{1}{a_n + a_{n-1}} (T_n - T_{n-1})$$

とおく. この Δ は作用素と思わずに, ΔT_n でひとつの記号と理解されたい. 連続系の場合は, 曲線を弧長で径数表示しておけば速度と加速度が直交するため, 加速度をひとつ目の法線ベクトルとして採用することができたが, 離散系の場合は T_n と ΔT_n は直交せず, したがって T_n を基準とするかぎり ΔT_n を法線ベクトルとして採ることはできない. そこでシュミットの正規直交化法を適用して

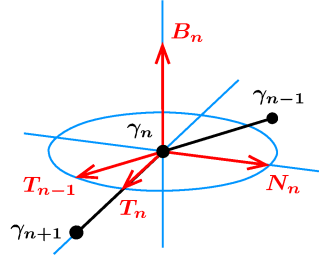
$$N_n = \frac{\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n}{|\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n|}, \quad B_n = T_n \times N_n$$

とおく. このとき $\Phi_n = (T_n, N_n, B_n)$ とおけば, Φ は $SO(3)$ 値の函数となる.

注意 3.3 上では連続系の議論をなぞって主法線ベクトル N_n と陪法線ベクトル B_n を定義したが, あるいは

$$B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n$$

を定義にしても同じことである. この定義のほうが簡単で, 絵がすぐにイメージできる利点がある. ただしこの定義では主法線とか陪法線とかいう言葉の意味は希薄になるだろう. どちらを定義と思うかはともかく, 要点は主法線ベクトルが $N_n \in \text{span}\{T_n, T_{n-1}\}$ をみたすことである. 下図を参照されたい. これと同じ図はサウエル [34, 19 頁] にもある. サウエル [34] は微分幾何の教科書だが, 対象物が連続系であっても離散的に説明するほうがずっと分かりやすいとの考えから, 離散モデルを全面に押し出して曲線と曲面の微分幾何についての基本的な概念を説明している.



次に曲率と捩率に相当するものを定義しよう. 函数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \pi)$ および $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$ を

$$\langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos \kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \lambda_n$$

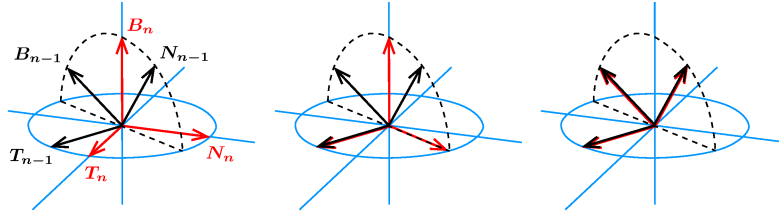
により定める. 実際 B_n は T_{n-1} と直交するから, この関係式をみたす角 λ_n は存在する. 連続系のときは, 正則な空間曲線の曲率は正であったことを思い出そう. これを反映して ‘離散曲率’ $\tan(\kappa_n/2)$ の値も正となっている. このとき Φ は次をみたす.

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n, \quad L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_{n+1} & \sin \lambda_{n+1} \\ 0 & -\sin \lambda_{n+1} & \cos \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} & 0 \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これが離散空間曲線に対するフルネ・セレの公式である. 行列 L は特殊な格好をしているが, 図形的な意味を考えるには次の形が見やすい.

$$\Phi_{n-1} = \Phi_n L_{n-1}^{-1}, \quad L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_n & \sin \kappa_n & 0 \\ -\sin \kappa_n & \cos \kappa_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_n & -\sin \lambda_n \\ 0 & \sin \lambda_n & \cos \lambda_n \end{pmatrix}.$$

この意味するところを絵に描けば次頁の図のようになる.



前頁の注意でも述べたとおり, ポイントは3つのベクトル T_n, T_{n-1}, N_n が同一平面上にあることである. したがってまず B_n を回転軸にして $-\kappa_n$ だけ回転させれば T_n を T_{n-1} に重ね合わせることができる. 次に T_n を回転軸にして λ_n だけ回転させれば Φ_n を Φ_{n-1} に重ね合わせることができる.

4 曲線および離散曲線の変形

曲線あるいは離散曲線が時間とともに少しずつ形を変えていく様子を考えよう. その変形は連続的なものでも離散的なものでもよい. 本稿では曲線の連続変形, 離散曲線の連続変形, 離散曲線の離散変形の3つの場合を考察しこれらを順に連続系, 半離散系, 離散系と呼ぶことにする. いずれの場合も曲線のフルネ枠 Φ は2変数の行列値関数を与える.

	連続系	半離散系	離散系
曲線	連続	離散	離散
変形	連続	連続	離散
イメージ図			
フルネ枠	$\Phi(x, t)$	$\Phi_n(t)$	Φ_n^m
方程式	$\Phi' = \Phi L$ $\dot{\Phi} = \Phi M$	$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n$ $\dot{\Phi}_n = \Phi_n M_n$	$\Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m$ $\Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m$
両立条件	$\dot{L} - M' - [L, M] = 0$	$\dot{L}_n - L_n M_{n+1} + M_n L_n = 0$	$L_n^m M_{n+1}^m - M_n^m L_n^{m+1} = 0$

上の表中の行列 L は, フルネの公式やフルネ・セレの公式によって決まり, すでに第2節と第3節で構成した. 行列 M を適切に定めることによって (つまり変形の仕方を適切に定めることによって), 両立条件としていろいろのソリトン方程式が現れる.

連続系では, たとえば非線型シュレディンガー方程式や mKdV 方程式, およびこの2つを出発点とする階層 (局所誘導階層) などが登場する. これらについては橋本 [11] や福本と宮崎 [28], ラム [23][24] やゴールドシュタインとペトリッチ [9], あるいはドリヴァとサンティニ [3] やランガー [25] などを参照されたい. また, 平面の幾何構造を変えた場合に現れるようなソリトン方程式の例については, 井ノ口の教科書 [41] にまとめられている.

半離散系では, 上に述べたような方程式たちを半離散化したものが登場するが, これについてはドリヴァとサンティニ [4] やホフマンとクッツ [18], ダニエルとマニヴァンナン [2] や中山 [30] などを参照されたい. このほかにもたくさんの論文があるが, ここに挙げたものも含め, それらはいずれも方程式レベルでの半離散化を議論したものである. 方程式レベルでの半離散化にとどまらず解までを込めて議論したものに, 半離散 mKdV 方程式をあつかった井ノ口と梶原と筆者と太田 [21] がある. その内容については次節で詳しく紹介する.

離散系の研究はまだ始まったばかりで, 先行研究もほんのわずかしかない. 離散非線形シュレディンガー方程式についてはピンカールとスプリングボーンとワイスマン [32], あるいはホフマン [16] (これは文献の引用に混乱が見られるため, 学位論文 [15, 29–55 頁] を見たほうがよい) がある. 離散 mKdV 方程式につい

ては筆者 [26] がある. これらは方程式レベルの離散化である. 解までを込めて議論したものに, 離散 mKdV 方程式をあつかった井ノ口と梶原と筆者と太田 [20] がある. 次節で詳しく紹介する.

5 変形 KdV 方程式

この節では mKdV 方程式を興味を中心に据えて, mKdV 方程式によって統制されるような平面曲線の連続的変形, 半離散 mKdV 方程式によって統制されるような離散平面曲線の連続的変形, 離散 mKdV 方程式によって統制されるような離散平面曲線の離散的変形, のそれぞれを詳しく調べよう. これらの変形の幾何学的な特徴は, 曲線が時間とともに動いていく際に, 伸び縮みせず, もとの弧長を保つこと (等周変形) である. この節ではまず第 5.1 節で連続系の場合を述べ, その方程式レベルでの半離散化を第 5.2 節で, 離散化を第 5.3 節で議論する. 続く第 5.4 節が本稿のハイライトであるが, 第 5.1–5.3 節で用意した方程式たちに対して解 (多重ソリトン解と多重ブリーザー解) を構成し, その解を用いて曲線の等周変形を明示的に与える. 第 5.6 節は曲線のベックルント変換について述べる. 第 5.7 節では, 第 5.1, 5.2, 5.4 節で述べたのと同じことを空間曲線について示す.

5.1 連続系

この節で述べることはラム [23][24] やゴールドシュタインとペトリッチ [9] による結果である. ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ 内の曲線 $\gamma(u)$ が時間とともに変形していく様子を考える. ただし u は弧長径数とは限らない勝手な径数とする. 時刻 t における曲線を $\gamma(u, t)$ と書く. 各曲線 $\gamma(u, t)$ の速さがこの変形で保存される, すなわち関数 $|(\partial/\partial u)\gamma(u, t)|$ が t に依らないための必要十分条件は, 曲線の変形方向 $(\partial/\partial t)\gamma(u, t)$ が

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \gamma(u, t), \frac{\partial}{\partial u} \gamma(u, t) \right\rangle = 0 \quad (4)$$

をみたすことである. 条件 (4) がみたされているとき, もしはじめの曲線 $\gamma(\cdot, 0)$ がその弧長によって径数表示されているならば, どの時刻の曲線もおなじ弧長関数によって径数表示されることになる. これはもとの曲線が伸び縮みせずに変形することを意味する. そこで条件 (4) を等周条件と呼ぶ. 以下では等周条件をみたす変形を考える.

径数 u を弧長径数 x で表したものを $u(x)$ としたとき, 曲線 $\gamma(u(x), t)$ をふたたび $\gamma(x, t)$ と書く. また, 弧長径数 x に関する微分と時刻 t に関する微分をそれぞれプライムとドットで表し, 独立変数を書くのは省略する. すなわち

$$\gamma' = \frac{\partial}{\partial x} \gamma(x, t), \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(x, t)$$

とする. このとき等周条件は $\langle \gamma', \dot{\gamma}' \rangle = 0$ となる. さて, 曲線の変形方向 $\dot{\gamma}$ を接方向と法方向に分解し, その係数をそれぞれ f, g と書こう. すなわち関数 f, g を用いて $\dot{\gamma}$ を

$$\dot{\gamma} = fT + gN$$

と表す. ただし γ' を T と書いた. すると, 等周条件より関数 f, g と曲率 κ の間には

$$f' - \kappa g = 0 \quad (5)$$

の関係があることが分かる. このときフルネ枠 $\Phi = (T, N)$ の時間変化は

$$\dot{\Phi} = \Phi M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa f - g' \\ \kappa f + g' & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる．一方、フルネの公式より

$$\Phi' = \Phi L, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

である．連立偏微分方程式系 (6)–(7) の両立条件 $\dot{L} - M' - [L, M] = 0$ は、ただひとつの式

$$\dot{\kappa} = (\kappa f + g')' \quad (8)$$

になる．したがって等周条件 (5) をみたす函数の組 f, g を好きに選び、その f, g に対して両立条件 (8) の解 κ を求めれば、 κ を曲率にもつような曲線の等周変形が構成できるだろう．特に

$$f = \frac{\kappa^2}{2}, \quad g = \kappa' \quad (9)$$

と選べば両立条件 (8) は変形 KdV 方程式

$$\dot{\kappa} = \frac{3}{2}\kappa^2\kappa' + \kappa''' \quad (10)$$

となる．したがってこのとき角函数、すなわち速度 γ' の偏角 θ は、ポテンシャル mKdV 方程式

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\theta')^3 + \theta''' \quad (11)$$

をみたす．以上、この節では角函数がポテンシャル mKdV 方程式によって統制されるような平面曲線の等周変形を得た．

注意 5.1 等周条件をみたす函数の組 f, g の選びかたには任意性がある．上記 (9) のように選ぶことの数学的な正当性は、ハミルトン系の議論に求めることができる．実際、弧長で径数表示された閉曲線全体の空間に適当にシンプレクティック形式を定めると、弾性エネルギーをハミルトン函数とするハミルトンベクトル場が (9) の f, g を用いて $fT + gN$ となり、したがってハミルトン方程式は mKdV 方程式 (10) となる．

注意 5.2 より一般に高次の mKdV 方程式によって統制されるような等周変形が構成できる．弧長に関する微分作用素を $D = \partial/\partial x$ と書けば、等周条件 (5) より $f = D^{-1}(\kappa g)$ だから、両立条件 (8) は

$$\dot{\kappa} = \Omega g, \quad \Omega = D^2 + \kappa^2 + \kappa' D^{-1}(\kappa \cdot)$$

である．方程式 $\dot{\kappa} = \Omega^n \kappa'$ は第 n 次 mKdV 方程式と呼ばれる．したがって曲線の変形を

$$f = D^{-1}(\kappa \Omega^{n-1} \kappa'), \quad g = \Omega^{n-1} \kappa'$$

によって決めれば、曲率 κ は第 n 次 mKdV 方程式にしたがう．また $n = -1$ とすれば

$$f = D^{-1}(\kappa \Omega^{-2} \kappa'), \quad g = \Omega^{-2} \kappa'$$

だが、中山とシーガーと和達 [31] は、このときの両立条件 $\Omega \dot{\kappa} = \kappa'$ がサイン・ゴールドン方程式とみなせることを示した．

注意 5.3 この節で述べたことは曲率が一定の 2 次元リーマン多様体で成立する．したがって球面と双曲平面でも mKdV 方程式から曲線の変形が定まるが、同じ解でも、外側の空間の曲率によって出てくる曲線のトポロジーが変わる．ムッソ [29] はそういうケースを Mathematica で試した．

注意 5.4 ここでは平面曲線の連続的変形を考えたが、同様に、曲率の変化が mKdV 方程式にしたがうような空間曲線の連続的変形も存在する．ただし振率が一定の空間曲線を考える．詳しくは第 5.7 節を参照のこと．

注意 5.5 mKdV 方程式 (10) は収束型 mKdV 方程式 (focusing mKdV) と呼ばれる. mKdV 方程式にはもうひとつのタイプがあり, それは $\dot{\kappa} = -(3/2)\kappa^2\kappa' + \kappa'''$ である. これは非収束型 mKdV 方程式 (defocusing mKdV) と呼ばれ, この符号の違いは本質的である. 両者の性質の違いについては大宮 [47, 184 頁] を参照されたい. 非収束型 mKdV 方程式は, ミンコフスキー平面や中心アフィン平面内の曲線の変形と関係する. 前者については丸野と梶原と井ノ口と太田とフェンによって研究が進められており, 後者については古畑 [43, 付録] を参照されたい.

注意 5.6 mKdV 方程式の解はミウラ変換によって KdV 方程式をみたすが, これは平面曲線の変形という観点からは, ユークリッド幾何から等積中心アフィン幾何に幾何構造を変更することに対応する. 詳しくは藤岡と黒瀬 [8] を参照されたい.

5.2 半離散系

この節ではホフマンとクッツ [18] やドリヴァとサンティニ [4] にしたがって, 離散平面曲線が時間とともに連続的に変形していく様子を考える. 時刻 t における離散平面曲線を $\gamma_n(t)$ と書く. 各セグメントの長さ $|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)|$ がこの変形で保存されるための必要十分条件は, 各点の変形方向 $\dot{\gamma}_n(t)$ が

$$\langle \dot{\gamma}_{n+1}(t) - \dot{\gamma}_n(t), \gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t) \rangle = 0 \quad (12)$$

をみたすことである. 条件 (12) を連続系にならって等周条件と呼ぶ. 以下, 等周条件をみたす変形を考える.

$$T_n(t) = \frac{\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)}{a_n}, \quad N_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_n(t)$$

とおく. ただし $a_n = |\gamma_{n+1}(0) - \gamma_n(0)| = |\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)|$ である. 以後, 離散変数 n のみを明示して連続変数 t を書くのは省略する. 各点の変形方向 $\dot{\gamma}_n$ を T_n 方向と N_n 方向に分解し, その係数をそれぞれ f_n, g_n と書こう. すなわち

$$\dot{\gamma}_n = f_n T_n + g_n N_n$$

である. 等周条件 (12) より, 関数 f_n, g_n と関数 $\kappa_n = \angle(T_n, T_{n-1})$ の間には

$$f_{n+1} \cos \kappa_{n+1} - f_n - g_{n+1} \sin \kappa_{n+1} = 0 \quad (13)$$

の関係があり, このとき枠 $\Phi_n = (T_n, N_n)$ の時間変化は

$$\dot{\Phi}_n = \Phi_n M_n, \quad M_n = \frac{f_{n+1} \sin \kappa_{n+1} + g_{n+1} \cos \kappa_{n+1} - g_n}{a_n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

と書ける. 一方, フルネの公式より

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n, \quad L_n = \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

である. 連立方程式 (14)–(15) の両立条件 $\dot{L}_n - L_n M_{n+1} + M_n L_n = 0$ は, ただひとつの式

$$\dot{\kappa}_n = \frac{f_{n+1} \sin \kappa_{n+1} + g_{n+1} \cos \kappa_{n+1} - g_n}{a_n} - \frac{f_n \sin \kappa_n + g_n \cos \kappa_n - g_{n-1}}{a_{n-1}} \quad (16)$$

になる. 特に, 各セグメントの長さが等しいとき, すなわち $a_n = a > 0$ であるような場合に

$$f_n = 1, \quad g_n = -\tan \frac{\kappa_n}{2}$$

と選べばこれは等周条件 (13) をみたし, 両立条件 (16) は半離散 mKdV 方程式

$$\dot{\kappa}_n = \frac{1}{a} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \quad (17)$$

となる. したがって $\kappa_n = (\theta_{n+1} - \theta_{n-1})/2$ で定まる関数 θ は, 半離散ポテンシャル mKdV 方程式

$$\dot{\theta}_n = \frac{2}{a} \tan \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{4} \quad (18)$$

をみたし, このとき接ベクトル T_n の偏角は $(\theta_{n+1} + \theta_n)/2$ となる. 以上, この節では ‘角函数’ が半離散ポテンシャル mKdV 方程式によって統制されるような離散平面曲線の等周変形を得た.

注意 5.7 あるいは, やはり各セグメント長が一定 $a_n = a > 0$ のときに

$$\begin{aligned} f_n &= 2 \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \tan \frac{\kappa_n}{2} + 1 \right), \\ g_n &= \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} - \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) - 2 \tan \frac{\kappa_n}{2} \end{aligned}$$

と選べばこれは等周条件 (13) をみたし, 両立条件 (16) は高次の半離散 mKdV 方程式

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_n &= \frac{1}{a} \left(\left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_{n+1}}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_{n+2}}{2} + \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_n}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-2}}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

となる.

注意 5.8 ここで述べたことの応用として WKI 方程式の半離散化がある. フェンと井ノ口と梶原と丸野と太田 [6] にしたがって述べる. まず連続系の場合は, 角函数がポテンシャル mKdV 方程式 (11) によって統制されるような平面曲線の等周変形 γ を, グラフとして表示し

$$\gamma(x, t) = \int^x \begin{pmatrix} \cos \theta(x, t) \\ \sin \theta(x, t) \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} z \\ y(z, t) \end{pmatrix}$$

と書こう. このとき mKdV 方程式 (10) は WKI 方程式

$$y_t = \left(\frac{y_{zz}}{(1 + y_z^2)^{3/2}} \right)_z$$

に書き直される. この変換はホドグラフ変換と呼ばれる. 半離散系の場合も同様に, 角函数が半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (18) によって統制されるような離散平面曲線の等周変形 γ_n を

$$\gamma_n(t) = a \sum_k^{n-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \\ \sin \frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

と表示しなおす. このとき半離散 mKdV 方程式 (17) は

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n &= -\frac{y_{n+1} - y_n}{a} \left(\frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{1 + \Delta_{n+1}\Delta_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{1 + \Delta_n\Delta_{n-1}} \right), \\ \dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n &= -\frac{z_{n+1} - z_n}{a} \left(\frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{1 + \Delta_{n+1}\Delta_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{1 + \Delta_n\Delta_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

と書き直される. ただし

$$\Delta_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{a + z_{n+1} - z_n}$$

とおいた. この連立方程式が半離散 WKI 方程式となる.

注意 5.9 ここでは離散平面曲線の連続的変形を考えたが, 同様に, 半離散ポテンシャル mKdV 方程式によって統制されるような離散空間曲線の連続的変形も存在する. ただし振率が一定の離散空間曲線を考える. 詳しくは第 5.7 節を参照のこと.

5.3 離散系

離散平面曲線が離散的に変形していく様子を考えよう．時刻 m における離散平面曲線を γ_n^m と書く．各セグメントの長さ $|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m|$ がこの変形 $\gamma_n^m \mapsto \gamma_n^{m+1}$ で保存されるための必要十分条件は，ベクトル $\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m$ が

$$\langle (\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m) - (\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m), (\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m) + (\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m) \rangle = 0 \quad (20)$$

をみたすことである．連続系の用語を踏襲して，条件 (20) を等周条件と呼ぼう．以下では等周条件をみたす離散変形を考え，

$$T_n^m = \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n}, \quad N_n^m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_n^m$$

とおく．ただし $a_n = |\gamma_{n+1}^0 - \gamma_n^0| = |\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m|$ である．さらに独立変数 n, m に関して対称性を要請し，長さ $|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m|$ が n に依らないこと，すなわち

$$\langle (\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m) - (\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m), (\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m) + (\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m) \rangle = 0 \quad (21)$$

を要請する．この条件 (21) を等距離条件と呼ぼう．このとき

$$b_m = |\gamma_0^{m+1} - \gamma_0^m| = |\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m|$$

とおいて，ベクトル $(\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m) / b_m$ を T_n^m 方向と N_n^m 方向に分解し，その係数をそれぞれ f_n^m, g_n^m と書く．すなわち

$$\frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = f_n^m T_n^m + g_n^m N_n^m$$

とする．左辺のベクトルの大きさは 1 だから

$$f_n^m = \cos w_n^m, \quad g_n^m = \sin w_n^m$$

とおける．このとき

$$\frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = \begin{pmatrix} \cos w_n^m & -\sin w_n^m \\ \sin w_n^m & \cos w_n^m \end{pmatrix} T_n^m$$

だから w_n^m はベクトル $\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m$ とベクトル $\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m$ のなす角である．等周条件 (20) は

$$a_n \sin \frac{\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m}{2} = b_m \sin \frac{\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m - w_n^m}{2} \quad (22)$$

であり，等距離条件 (21) もまた式 (22) となる．以上より，枠 $\Phi_n^m = (T_n^m, N_n^m)$ の時間変化は

$$\Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m, \quad M_n^m = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m) & -\sin(\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m) \\ \sin(\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m) & \cos(\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m) \end{pmatrix} \quad (23)$$

と書ける．行列 M_n^m が回転行列となるのは自明だが，その回転角が $\kappa_{n+1}^m + w_{n+1}^m + w_n^m$ となることは非自明である．一方，離散平面曲線に対するフルネの公式から

$$\Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m, \quad L_n^m = \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1}^m & -\sin \kappa_{n+1}^m \\ \sin \kappa_{n+1}^m & \cos \kappa_{n+1}^m \end{pmatrix} \quad (24)$$

である．連立偏差分方程式系 (23)–(24) の両立条件 $L_n^m M_{n+1}^m - M_n^m L_n^{m+1} = 0$ は，ただひとつの式

$$\kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m = w_{n+1}^m - w_{n-1}^m \quad (25)$$

となる．等周等距離条件 (22) を κ について解けば

$$\kappa_{n+1}^m = 2 \arctan \left(\frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{w_n^m}{2} \right) - w_{n+1}^m$$

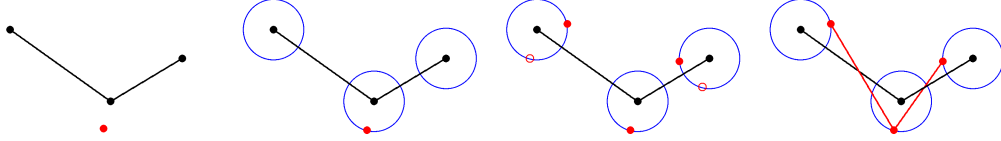
だから、これを両立条件 (25) に代入すると、離散 mKdV 方程式

$$w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = 2 \arctan \left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{w_n^{m+1}}{2} \right) - 2 \arctan \left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{w_{n+1}^m}{2} \right)$$

となる．離散 mKdV 方程式と呼ばれる差分方程式はいくつかあるが、これは広田 [13] により提出されたものである．ふたつの 1 変数関数 a, b がそれぞれ n 方向と m 方向の差分間隔の役割を果たしており、不等間隔差分による差分方程式となっている．

以上、式だけを頼りに離散 mKdV 方程式にしたがうような離散平面曲線の離散的変形を導いた．これは結局つぎのように動かすこと（等周等距離変形）を意味している．離散平面曲線 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^2$ がひとつ与えられたとき、それを以下に述べる手順で動かして、新たな離散平面曲線 $\bar{\gamma}$ を作る．

1. まず、離散平面曲線 γ のどこか 1 点（たとえば γ_0 ）を好きな位置に動かす．
2. 次に、その動いた距離を b としたとき、各頂点 γ_n を中心に共通の半径 b をもった円 C_n を描く．
3. 各頂点 γ_n の移動先 $\bar{\gamma}_n$ は円 C_n 上であって、しかももとのセグメント長を保存する位置とする．前者の条件を等距離条件と呼び、後者の条件を等周条件と呼ぶ．
4. このとき各頂点に対して移動先の候補は 2 つあるが、このうちもとの線分と平行になるほうは捨てて、平行でないほうを選ぶ．



この手順は、ベルリン工科大学のグループにおいては一種の‘言い伝え’として以前から知られていた、とのことである．実際、ホフマンの講義録 [17, Definition 2.43] に上で説明したのと同じことが書いてある．彼らはこの等周等距離変形 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ を離散平面曲線のダルブー変換と呼んでいる．

さて、両立条件 (25) はまたポテンシャル関数 θ の存在も主張している．すなわち

$$\kappa_n^m = \frac{\theta_{n+1}^m - \theta_{n-1}^m}{2}, \quad w_n^m = \frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{2}$$

である．したがって

$$\frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = {}^t \left(\cos \frac{\theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{2}, \sin \frac{\theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{2} \right)$$

であり、これは連続系における表現公式 (2) の離散版となっている．また、等周等距離条件 (22) を具体的に書き下すと、離散ポテンシャル mKdV 方程式

$$\tan \frac{\theta_{n+1}^{m+1} - \theta_n^m}{4} = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{4} \quad (26)$$

になる．以上、この節では‘角関数’が離散ポテンシャル mKdV 方程式によって統制されるような離散平面曲線の等周等距離変形を得た．

注意 5.10 半離散系の場合と同様に、この場合もホドグラフ変換に应用があつて、やはり WKI 方程式などの離散化に使える．具体的な方程式はフェンと井ノ口と梶原と丸野と太田 [6] を参照されたい．

注意 5.11 連続系の場合と同様に、離散 mKdV 方程式の解を離散 KdV 方程式の解にうつすような変換がある．これは離散平面曲線の離散的変形という観点からは、ユークリッド幾何から等積中心アフィン幾何に幾何構造を変更することに対応する．詳しくは筆者 [26] を参照されたい．

5.4 明示公式と具体例

この節で述べるのが本稿のハイライトである。前節までに議論した連続系、半離散系、離散系のそれぞれ方程式たちに対して、解（多重ソリトン解と多重ブリーザー解）を構成し、さらに曲線の等周変形をも τ 関数を用いて明示的に与える。井ノ口と梶原と筆者と太田 [20], [21] に基づいて説明する。

まず離散系のみを対象にしよう。前節では離散平面曲線の等周等距離変形から函数 a, b を定義し、角函数に相当する量 θ が離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) をみたすことを見た。本節では逆に、任意に指定した函数 a, b に対して離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) の解 θ をとり、その解によって統制されるような離散平面曲線の等周等距離変形 γ を具体的・明示的に構成する。ふたつの数列 a, b を任意に固定する。このとき

$$\theta_n^m = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_n^m}{\tau_n^{*m}}$$

において離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) を双線形形式に書き直すと

$$b_m \tau_n^{*m+1} \tau_{n+1}^m - a_n \tau_{n+1}^{*m} \tau_n^{m+1} + (a_n - b_m) \tau_{n+1}^{*m+1} \tau_n^m = 0 \quad (27)$$

である。ただし星印は複素共役を表す。前節で述べた等周等距離変形は

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} &= R \left(\frac{\theta_{n+1}^m - \theta_{n-1}^m}{2} \right) \frac{\gamma_n^m - \gamma_{n-1}^m}{a_{n-1}}, \\ \frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} &= R \left(\frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} \end{aligned} \quad (28)$$

である。ただし $R(\theta)$ で角 θ の回転行列を表した。この連立方程式 (28) は和分することができる。実際

$$\gamma_n^m = \frac{\partial}{\partial y} \bigg|_{y=0} \left(\begin{array}{c} -\Re \log \tau_n^m \\ \Im \log \tau_n^m \end{array} \right) \quad (29)$$

である。ただし τ は独立変数 m, n のほかに、連続なパラメータ y にも依存するものとし、この y については

$$\begin{aligned} D_y \tau_{n+1}^m \cdot \tau_n^m &= -a_n \tau_{n+1}^{*m} \tau_n^m, \\ D_y \tau_n^{m+1} \cdot \tau_n^m &= -b_m \tau_n^{*m+1} \tau_n^m \end{aligned} \quad (30)$$

なる双線形構造を要請する（ D は広田微分）。連立方程式 (27), (30) は離散 2 次元戸田格子階層の簡約として得ることができる。離散 2 次元戸田格子方程式についてはウィロックスと時弘と薩摩 [39], あるいは広田 [12] と三輪 [27] を参照されたい。また簡約については辻本の解説 [48] に詳しい。連立方程式 (27), (30) をみたす函数 $\tau = \tau_n^m(y)$ は、たとえばカソラチ型として

$$\begin{aligned} \tau_n^m(y) &= \exp \left(-y \left(\sum_k^{n-1} a_k + \sum_l^{m-1} b_l \right) \right) \det (f_{j-1}^i)_{i,j=1,\dots,N}, \\ f_s^i &= \alpha_i (p_i)^s \exp \frac{y}{p_i} \prod_k^{n-1} \frac{1}{1 - a_k p_i} \prod_l^{m-1} \frac{1}{1 - b_l p_i} + \beta_i (-p_i)^s \exp \left(-\frac{y}{p_i} \right) \prod_k^{n-1} \frac{1}{1 + a_k p_i} \prod_l^{m-1} \frac{1}{1 + b_l p_i} \end{aligned}$$

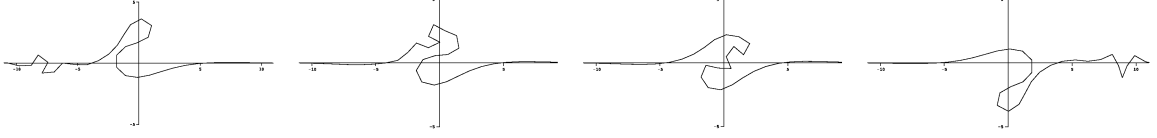
と与えられる。パラメータ p_i と α_i を実数にとり、かつ β_i を純虚数にとれば N ソリトン解を与える。あるいは行列のサイズ N を偶数にとり、かつパラメータ p_i, α_i, β_i を複素数として関係式

$$p_{2k} = p_{2k-1}^*, \quad \alpha_{2k} = \alpha_{2k-1}^*, \quad \beta_{2k} = -\beta_{2k-1}^* \quad (31)$$

を要請すればブリーザー解を与える。これらを明示公式 (29) に代入すれば、ソリトン解やブリーザー解に対応した離散平面曲線の等周等距離変形を得る。たとえば $N = 2$ のときに $a \equiv 1, b \equiv 1/2$ とし、パラメータを $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1, \beta_1 = \beta_2 = \sqrt{-1}, p_1 = 3/10, p_2 = 9/10$ とすれば、次のようになる。



あるいは $N = 4$ として, $a \equiv 1$, $b \equiv 3/2$ とし, 関係式 (31) のもとにパラメータを $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = \sqrt{-1}$, $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = \sqrt{-1}$, $p_1 = (1/5)(1 - \sqrt{-1})$, $p_3 = (4/5)(1 + \sqrt{-1})$ とすれば, 次のようになる.



明示公式 (29) は離散系だけでなく, 半離散系および連続系にも通用する表示である. 半離散系の場合 ([21, Theorem 4.1]) は明示公式は

$$\gamma_n = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \begin{pmatrix} -\Re \log \tau_n \\ \Im \log \tau_n \end{pmatrix}, \quad \theta_n = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_n}{\tau_n^*}$$

であり, 双線形構造は

$$\begin{aligned} D_t \tau_n^* \cdot \tau_n &= \frac{1}{2a} (\tau_{n+1}^* \tau_{n-1} - \tau_{n-1}^* \tau_{n+1}), \\ \tau_n^* \tau_n &= \frac{1}{2} (\tau_{n+1}^* \tau_{n-1} + \tau_{n-1}^* \tau_{n+1}), \\ D_t D_y \tau_n \cdot \tau_n &= -2\tau_{n+1}^* \tau_{n-1}^*, \\ D_y \tau_{n+1} \cdot \tau_n &= -a\tau_{n+1}^* \tau_n^* \end{aligned}$$

である. この連立方程式をみたす解 τ はたとえば

$$\begin{aligned} \tau_n(t; y) &= \exp(-y(an + t)) \det(f_{j-1}^i)_{i,j=1,\dots,N}, \\ f_s^i &= \alpha_i \frac{(p_i)^s}{(1 - ap_i)^n} \exp\left(\frac{p_i}{1 - a^2(p_i)^2} t + \frac{1}{p_i} y\right) + \beta_i \frac{(-p_i)^s}{(1 + ap_i)^n} \exp\left(-\frac{p_i}{1 - a^2(p_i)^2} t - \frac{1}{p_i} y\right) \end{aligned}$$

と与えられる. 連続系の場合 ([20, Theorem 3.1, Proposition 5.1]) もやはり明示公式は

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \begin{pmatrix} -\Re \log \tau \\ \Im \log \tau \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau}{\tau^*}$$

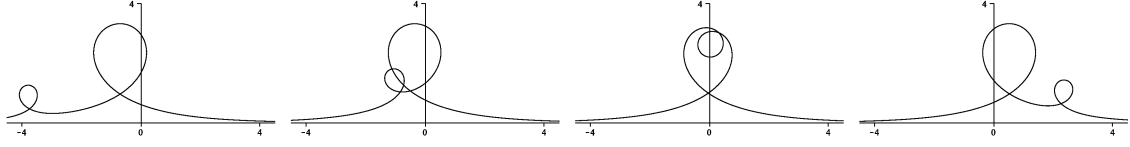
であって, 双線形構造は

$$\begin{aligned} (D_x^3 + D_t) \tau^* \cdot \tau &= 0, \\ D_x^2 \tau^* \cdot \tau &= 0, \\ D_x D_y \tau \cdot \tau &= -2\tau^{*2} \end{aligned}$$

である. この解はたとえば

$$\begin{aligned} \tau(x, t; y) &= \exp(-xy) \det(f_{j-1}^i)_{i,j=1,\dots,N}, \\ f_s^i &= \alpha_i (p_i)^s \exp\left(p_i x - 4(p_i)^3 t + \frac{1}{p_i} y\right) + \beta_i (-p_i)^s \exp\left(-p_i x + 4(p_i)^3 t - \frac{1}{p_i} y\right) \end{aligned}$$

と与えられる. 離散系で述べたのと同じようにパラメータを制約することで, ポテンシャル mKdV 方程式の N ソリトン解や N ブリーザー解によって統制される平面曲線の等周変形が得られる.



5.5 連続極限

ここでは、離散系から半離散系を経て連続系にいたる連続極限のとり方 ([21, Theorem 6.1]) について述べる. 離散系の変数を θ_n^m , 半離散系の変数を $\theta_l(s)$, 連続系の変数を $\theta(x, t)$ と書いておく. まず離散系から半離散系へ移行するには

$$a_n = a, \quad b_m = b, \quad \delta = \frac{a+b}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a-b}{2}, \quad s = \delta(n+m), \quad l = n-m$$

として $\delta \rightarrow 0$ とすればよい. このとき離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) は半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (18) となり, 解や離散曲線の変形のレベルにおいてもきちんと極限移行する. 次に, 半離散系から連続系へは

$$x = \varepsilon l + s, \quad t = -\frac{\varepsilon^2}{6}s$$

として $\varepsilon \rightarrow 0$ とすればよい. 半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (18) はポテンシャル mKdV 方程式 (11) となり, 解や離散曲線の変形のレベルにおいてもきちんと極限移行する. これらを実際に計算するときは $\mathbb{E}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視して複素数として計算するのがよい.

5.6 ベックルント変換

この節では連続系, 半離散系, 離散系のそれぞれについて, 曲線の等周変形のベックルント変換を述べる. 先と同様 $R(\theta)$ で角 θ の回転行列を表そう.

5.6.1 連続系

まず和達 [37] によるポテンシャル mKdV 方程式のベックルント変換を記す. ポテンシャル mKdV 方程式 (11) の解 θ と勝手な定数 $c \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, 函数 $\bar{\theta}$ を

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta}' + \theta'}{2} &= \frac{2}{c} \sin \frac{\bar{\theta} - \theta}{2}, \\ \frac{\dot{\bar{\theta}} + \dot{\theta}}{2} &= \frac{1}{c} \left((\theta')^2 + \frac{8}{c^2} \right) \sin \frac{\bar{\theta} - \theta}{2} - \frac{2}{c} \theta'' \cos \frac{\bar{\theta} - \theta}{2} - \frac{4}{c^2} \theta' \end{aligned}$$

によって定めると, $\bar{\theta}$ はまたポテンシャル mKdV 方程式 (11) をみたす. さらに函数 θ によって統制される平面曲線の等周変形を γ とするとき

$$\bar{\gamma} = \gamma + cR\left(\frac{\bar{\theta} - \theta}{2}\right)\gamma'$$

とおくと, $\bar{\gamma}$ は函数 $\bar{\theta}$ によって統制される平面曲線の等周変形となる. これが曲線の変形のレベルでのベックルント変換である.

5.6.2 半離散系

半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (18) の解 θ と定数 $c \in \mathbb{R}^\times$ に対して, 函数 $\bar{\theta}$ を

$$\begin{aligned} \tan \frac{\bar{\theta}_{n+1} - \theta_n}{4} &= \frac{c+a}{c-a} \tan \frac{\bar{\theta}_n - \theta_{n+1}}{4}, \\ (c+a) \frac{\dot{\bar{\theta}}_n}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{\bar{\theta}_n - \theta_{n+1}}{4} \right) + (c-a) \frac{\dot{\theta}_n}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{\bar{\theta}_{n+1} - \theta_n}{4} \right) \\ &= \tan \frac{\bar{\theta}_n - \theta_{n+1}}{4} + \tan \frac{\bar{\theta}_{n+1} - \theta_n}{4} \end{aligned}$$

によって定めると, $\bar{\theta}$ はまた半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (18) をみたす. さらに函数 θ によって統制される離散平面曲線の等周変形を γ とするとき

$$\bar{\gamma}_n = \gamma_n + c R \left(\frac{\bar{\theta}_n - \theta_{n+1}}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a}$$

とおくと, $\bar{\gamma}$ は函数 $\bar{\theta}$ によって統制される離散平面曲線の等周変形となる.

5.6.3 離散系

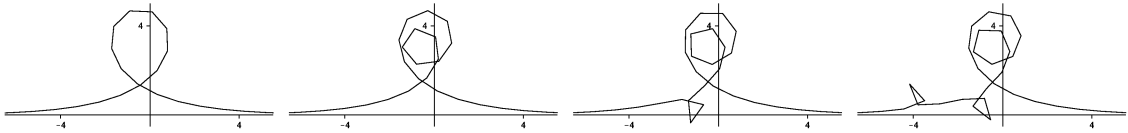
離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) の解 θ と勝手な定数 $c \in \mathbb{R}^\times$ に対して, 函数 $\bar{\theta}$ を

$$\begin{aligned} \tan \frac{\bar{\theta}_{n+1}^m - \theta_n^m}{4} &= \frac{c+a_n}{c-a_n} \tan \frac{\bar{\theta}_n^m - \theta_{n+1}^m}{4}, \\ \tan \frac{\bar{\theta}_n^{m+1} - \theta_n^m}{4} &= \frac{c+b_m}{c-b_m} \tan \frac{\bar{\theta}_n^m - \theta_n^{m+1}}{4} \end{aligned}$$

によって定めると, $\bar{\theta}$ はまた離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) をみたす. さらに函数 θ によって統制される離散平面曲線の等周等距離変形を γ とするとき

$$\bar{\gamma}_n^m = \gamma_n^m + c R \left(\frac{\bar{\theta}_n^m - \theta_{n+1}^m}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n}$$

とおくと, $\bar{\gamma}$ は函数 $\bar{\theta}$ によって統制される離散平面曲線の等周等距離変形となる. 具体例を挙げよう. 離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) の N ソリトン解を $\theta(N)$ と書き, $\theta(N)$ によって統制される離散平面曲線の等周等距離変形を $\gamma(N)$ と書くとき, 定数 c をソリトンの波数 p_{N+1} によって $c = -1/p_{N+1}$ と決めれば $\bar{\theta} = \theta(N+1)$, $\bar{\gamma} = \gamma(N+1)$ となる. 下図はこのベックルント変換を 3 回繰り返した様子である.



さて, 離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) は, もし θ_n^m が解ならば $-\theta_n^m$ も解となるから, ベックルント変換がもうひとつ構成できる. すなわち, 離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) の解 θ に対して, 函数 $\hat{\theta}$ を

$$\tan \frac{\hat{\theta}_{n+1}^m + \theta_n^m}{4} = \frac{c+a_n}{c-a_n} \tan \frac{\hat{\theta}_n^m + \theta_{n+1}^m}{4}, \quad (32)$$

$$\tan \frac{\hat{\theta}_n^{m+1} + \theta_n^m}{4} = \frac{c+b_m}{c-b_m} \tan \frac{\hat{\theta}_n^m + \theta_n^{m+1}}{4} \quad (33)$$

によって定めると, $\hat{\theta}$ はまた離散ポテンシャル mKdV 方程式 (26) をみたす. さらに函数 θ によって統制される離散平面曲線の等周等距離変形を γ とするとき

$$\hat{\gamma}_n^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\gamma_n^m + cR \left(-\frac{\hat{\theta}_n^m + \theta_{n+1}^m}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} \right)$$

とおくと, $\hat{\gamma}$ は函数 $\hat{\theta}$ によって統制される離散平面曲線の等周等距離変形となる.

注意 5.12 連続系でも半離散系でも, ポテンシャル mKdV 方程式は符号を反転する対称性をもっているから, ここで述べたのと同じ議論が通用する. 曲線の変形のレベルでは, やはり座標軸に関して折り返すようなベックルント変換が登場する.

注意 5.13 ベックルント変換 (32), (33) はそれぞれ次のようにも書ける.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\hat{\theta}_{n+1}^m - \theta_{n+1}^m - \hat{\theta}_n^m + \theta_n^m}{4} &= c a_n \sin \frac{\hat{\theta}_{n+1}^m + \theta_{n+1}^m + \hat{\theta}_n^m + \theta_n^m}{4}, \\ \sin \frac{\hat{\theta}_{n+1}^{m+1} - \theta_{n+1}^{m+1} - \hat{\theta}_n^m + \theta_n^m}{4} &= c b_m \sin \frac{\hat{\theta}_{n+1}^{m+1} + \theta_{n+1}^{m+1} + \hat{\theta}_n^m + \theta_n^m}{4}. \end{aligned}$$

これらはそれぞれ離散サイン・ゴルドン方程式である.

5.7 空間曲線での議論

いままで平面曲線の場合に述べてきたことを空間曲線の場合に拡張しよう. そのために振率が一定な空間曲線を対象にする. なお現在のところ, 連続系と半離散系の場合に部分的に成功しているに過ぎず, 離散系については方程式レベルでの離散化すらできていない. 離散 mKdV 方程式によって統制されるような離散空間曲線の離散変形を定式化することは, 今後の研究課題である.

5.7.1 連続系

弧長 x で径数表示された空間曲線の族 $\gamma(x, t)$ について, 各時刻 t における空間曲線の曲率を $\kappa(x, t)$, 振率を $\lambda(x, t)$ とする. また主法線ベクトルを $N(x, t)$, 陪法線ベクトルを $B(x, t)$ と書く. 振率が定数函数 $\lambda(x, t) = \lambda \in \mathbb{R}$ であるとき, 変形の方法を

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\kappa^2}{2} - 3\lambda^2 \right) \gamma' + \kappa' N - 2\lambda \kappa B$$

と決めれば曲率 κ は mKdV 方程式 (10) にしたがう. これは平面の場合と同様, $\dot{\gamma} = f\gamma' + gN + hB$ において, 両立条件として mKdV 方程式が現れるように函数 f, g, h を探すことで得られる. このとき

$$v = \frac{\kappa}{2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{-1}}{2} \lambda$$

とおき, フルネ枠 $\Phi = (\gamma', N, B)$ を $SU(2)$ 値の函数 ϕ に変換すると

$$\phi' = \phi L, \quad L = \begin{pmatrix} \mu & -v \\ v & -\mu \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\dot{\phi} = \phi M, \quad M = \begin{pmatrix} 2\mu v^2 + 4\mu^3 & -v'' - 2v^3 - 4\mu^2 v + 2\mu v' \\ v'' + 2v^3 + 4\mu^2 v + 2\mu v' & -2\mu v^2 - 4\mu^3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

となり, 変形 KdV 方程式は

$$\dot{v} = 6v^2 v' + v''' \quad (36)$$

の形となる. 解と明示公式については第 5.7.3 節に述べる. また, ここではフルネ枠 $\Phi \in SO(3)$ を $\phi \in SU(2)$ に変換したが, その変換の仕方については第 5.7.4 節に述べる.

注意 5.14 平面曲線の場合と同じように、空間曲線の変形でも第 n 次 mKdV 方程式によって統制されるような等周変形がある。より一般に局所誘導階層について書かれたランガー [25, Proposition 18] や川久保 [46] を参照されたい。

5.7.2 半離散系

セグメント長が一定 $a_n = a > 0$ であるような離散空間曲線の連続的変形を $\gamma_n(t)$ と書き、各時刻について、隣りあう接ベクトル $T_{n-1}(t)$, $T_n(t)$ のなす角を $\kappa_n(t)$ と書く。また、隣りあう陪法線ベクトルのなす角はどの時刻でも一定、すなわち定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\langle B_n(t), B_{n-1}(t) \rangle = \cos \lambda$$

であるとする。このとき、変形の方法 $\dot{\gamma}$ を

$$\dot{\gamma}_n = \cos \lambda T_n - \cos \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} N_n + \sin \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} B_n$$

と決めれば、函数 κ は半離散 mKdV 方程式 (17) にしたがう。枠 $\Phi = (T, N, B)$ を $SU(2)$ 値の函数 ϕ に変換すると

$$\phi_{n+1} = \phi_n L_n, \quad L_n = \pm \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\right) \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} & -\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\right) \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\right) \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} & \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\right) \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\dot{\phi}_n = \phi_n M_n, \quad M_n = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \sin \lambda & -\exp(-\sqrt{-1}\lambda) \tan \frac{\kappa_n}{2} - \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ \exp(\sqrt{-1}\lambda) \tan \frac{\kappa_n}{2} + \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} & \sqrt{-1} \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (38)$$

となる。したがって τ 函数を用いて ϕ の成分を明示的に構成することができれば、シムの公式（後述）によって離散空間曲線の等周変形の明示公式を与えることができる。

注意 5.15 あるいは、やはりセグメント長が一定 $a_n = a > 0$ かつ‘振率’が一定 $\langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda$ であるときに

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n = & 2 \left(\cos \lambda \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \tan \frac{\kappa_n}{2} + \cos 2\lambda \right) T_n \\ & + \left(\cos \lambda \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} - \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \right) - 2 \cos 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) N_n \\ & + \left(\sin \lambda \left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) + 2 \sin 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) B_n \end{aligned}$$

と決めれば、函数 κ は高次の半離散 mKdV 方程式 (19) にしたがう。

5.7.3 明示公式と具体例

この節では空間曲線の等周変形の明示公式を述べる。連立方程式 (34)–(36) の解 ϕ に対して

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi \right) \phi^{-1} \quad (39)$$

とおく。さらに

$$\gamma = -2 \begin{pmatrix} \Im f_{11} \\ \Im f_{21} \\ \Re f_{21} \end{pmatrix} \quad (40)$$

とおくと, γ は曲率 $2v$, 振率 λ の空間曲線の変形を表す. したがって τ 函数を用いて ϕ の成分を明示的に構成すれば, 式 (40) が空間曲線の等周変形の明示公式を与える. 式 (39) はシムの公式 ([36]) と呼ばれ, 可積分幾何のいろいろの場面に登場する. 函数 ϕ は $SU(2)$ に値をとるから, その成分は

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ -\psi^* & \varphi^* \end{pmatrix}, \quad |\varphi|^2 + |\psi|^2 = 1 \quad (41)$$

と表せる. 函数 φ, ψ はたとえば 2 成分の τ 函数を用いて次のように具体的に構成できる.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\tau_{N+1,N}}{\tau_{N,N}}, \quad \psi = \frac{\tau_{N,N+1}}{\tau_{N,N}}, \quad v = \frac{\tau_{N-1,N+1}}{\tau_{N,N}} = \frac{\tau_{N+1,N-1}}{\tau_{N,N}}, \\ \tau_{N,M} &= \det \left((f_j^i)_{\substack{i=1,\dots,N+M \\ j=1,\dots,N}}, (g_j^i)_{\substack{i=1,\dots,N+M \\ j=1,\dots,M}} \right), \\ f_j^i &= \alpha_i p_i^{j-1} \exp \left(p_i \frac{x}{2} + p_i^3 \frac{t}{2} \right), \quad g_j^i = \beta_i (-p_i)^{j-1} \exp \left(-p_i \frac{x}{2} - p_i^3 \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

ただしパラメータ α_i, β_i, p_i ($i = 1, \dots, 2N+1$) のうち

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

を自由に選び, 残りは

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{N+1} \\ \vdots \\ \alpha_{2N} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_{N+1} \\ \vdots \\ \beta_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{N+1} \\ \vdots \\ p_{2N} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad p_{2N+1} = \sqrt{-1}\lambda$$

と決める. このとき (34)–(36) は成立する. さらに (41) を達成するためパラメータ $\alpha_{2N+1}, \beta_{2N+1} \in \mathbb{R}$ を

$$1 = \det \phi = (\alpha_{2N+1}^2 + \beta_{2N+1}^2) \prod_{j=1}^N (p_j^2 - 4\mu^2)$$

をみたくように選ぶ. たとえば $N = 2$ とすると, 明示公式 (40) は mKdV 方程式の 2 ソリトン解によって統制されるような振率一定の空間曲線の等周変形を与える. パラメータの値を適当に指定すると次頁の図のようになる.

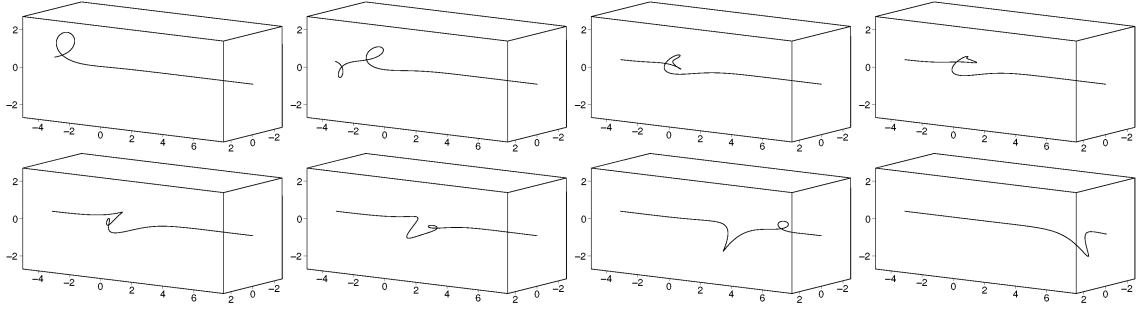
注意 5.16 τ 函数を 1 成分で作ると

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{-1} \frac{\lambda}{2} \frac{\tau_{N+1}^s}{\tau_N^s} + \frac{\tau_{N+1}^{s+1}}{\tau_N^{s+1}}, \quad \psi = -\frac{\lambda}{2} \frac{\tau_{N+1}^s}{\tau_N^s} - \sqrt{-1} \frac{\tau_{N+1}^{s+1}}{\tau_N^{s+1}}, \quad v = \frac{2}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\log \frac{\tau_N^{s+1}}{\tau_N^s} \right), \\ \tau_N^s &= \det (f_{s+j-1}^i)_{i,j=1,\dots,N}, \\ f_s^i &= \alpha_i p_i^s \exp (p_i x + 4p_i^3 t) + \beta_i (-p_i)^s \exp (-p_i x - 4p_i^3 t), \\ \alpha_i &\in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, N+1), \\ p_j &\in \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, N), \quad p_{N+1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \lambda \end{aligned}$$

となる. このとき (34)–(36) は成立する. さらに (41) を達成するため

$$1 = \det \phi = \lambda^2 (\alpha_{N+1}^2 - \beta_{N+1}^2) \prod_{j=1}^N \left(p_j^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \right)$$

をみたくようにパラメータ $\alpha_{N+1}, \beta_{N+1}$ を選べばよい. しかし $\lambda = 0$ のとき, すなわち空間曲線が実質的に平面曲線となるような場合は, パラメータをそのように選ぶことができない.



注意 5.17 行列のサイズを偶数 $N = 2K$ にとり, さらにパラメータ α_i, β_i, p_i たちに課する制約を適切に変更することによって, modified KdV 方程式の K ブリーザー解, およびそれによって統制される空間曲線の等周変形も構成できる.

注意 5.18 このノートでは τ 関数を二重ロンスキー行列式やロンスキー行列式として構成したが, グラム行列式を用いることによって, シムの公式に頼らずに明示公式を作ることもできる.

5.7.4 $\mathrm{SO}(3)$ と $\mathrm{SU}(2)$ の同一視

$\mathrm{SU}(2)$ は $\mathrm{SO}(3)$ の二重被覆であるが, これをロジャースとシーフ [33, Appendix A] にしたがって述べる. まず $\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$e_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と $\mathfrak{so}(3)$ の基底

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を $e_i \leftrightarrow E_i$ ($i = 1, 2, 3$) によって同一視する. $\mathrm{SU}(2)$ 値の関数 ϕ を微分し, それを $\phi' = \phi \sum_{k=1}^3 f_k e_k$ と書いておく. このとき $\mathrm{SO}(3)$ 値の関数 $\Phi = (\Phi_{ij})$ を

$$\Phi_{ij} = -2 \operatorname{tr} (e_i \phi e_j \phi^{-1})$$

と定めれば Φ は $\Phi' = \Phi \sum_{k=1}^3 f_k E_k$ をみたす. 関数 ϕ を (41) のように表示した場合, Φ は

$$\Phi = \begin{pmatrix} |\varphi|^2 - |\psi|^2 & 2\Re(\varphi\psi^*) & -2\Im(\varphi\psi^*) \\ -2\Re(\varphi\psi) & \Re(\varphi^2 - \psi^2) & -\Im(\varphi^2 + \psi^2) \\ -2\Im(\varphi\psi) & \Im(\varphi^2 - \psi^2) & \Re(\varphi^2 + \psi^2) \end{pmatrix}$$

となる. また

$$\frac{\Phi_{22} + \sqrt{-1}\Phi_{32}}{1 - \Phi_{12}} = \frac{\varphi + \psi}{\varphi^* - \psi^*}, \quad \frac{\Phi_{23} + \sqrt{-1}\Phi_{33}}{1 - \Phi_{13}} = \sqrt{-1} \frac{\varphi - \sqrt{-1}\psi}{\varphi^* - \sqrt{-1}\psi^*}$$

が成り立つから, もし先に $\mathrm{SO}(3)$ 値の Φ があった場合には, この関係式により複素数値の関数の組 φ, ψ が実数倍の差を除いて一意に決まり, したがって $\mathrm{SU}(2)$ 値の ϕ が符号の差を除いて一意に決まる.

参考文献

- [1] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris, *Discrete differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, Integrable structure. MR 2467378 (2010f:37125)
- [2] M. Daniel and K. Manivannan, *On the geometric equivalence of certain discrete integrable Heisenberg ferromagnetic spin chains*, J. Math. Phys. **40** (1999), no. 6, 2560–2567. MR 1694217 (2000f:82013)
- [3] A. Doliwa and P. M. Santini, *An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve*, Phys. Lett. A **185** (1994), no. 4, 373–384. MR 1261407 (95b:58075)
- [4] Adam Doliwa and Paolo Maria Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 1259–1273. MR 1317439 (95m:58072)
- [5] Luther Pfahler Eisenhart, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Dover Publications Inc., New York, 1960. MR MR0115134 (22 #5936)
- [6] Bao-Feng Feng, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Ken-ichi Maruno, and Yasuhiro Ohta, *Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 295201.
- [7] Atsushi Fujioka and Takashi Kurose, *Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy*, Osaka J. Math. **45** (2008), no. 4, 1057–1065. MR 2493970 (2010b:35398)
- [8] ———, *Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7** (2010), no. 1, 165–175. MR 2647776
- [9] Raymond E. Goldstein and Dean M. Petrich, *The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), no. 23, 3203–3206. MR MR1135964 (92g:58050)
- [10] Alfred Gray, Elsa Abbena, and Simon Salamon, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®*, third ed., Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. MR 2253203 (2007d:53001)
- [11] Hidenori Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), no. 3, 477–485.
- [12] Ryogo Hirota, *Discrete analogue of a generalized Toda equation*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), no. 11, 3785–3791. MR 638804 (83e:58035)
- [13] ———, *Discretization of the potential modified KdV equation*, J. Phys. Soc. Japan **67** (1998), no. 7, 2234–2236. MR MR1647153
- [14] Masato Hisakado, Kazuaki Nakayama, and Miki Wadati, *Motion of discrete curves in the plane*, J. Phys. Soc. Japan **64** (1995), no. 7, 2390–2393. MR MR1345549 (96i:53008)
- [15] Tim Hoffmann, *Discrete curves and surfaces*, Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin, 2000.
- [16] ———, *Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow*, Discrete differential geometry, Oberwolfach Semin., vol. 38, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 95–115. MR 2405662 (2010b:37196)
- [17] ———, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, COE Lecture Note, vol. 18, Kyushu University, Faculty of Mathematics, Fukuoka, 2009, Math-for-Industry Lecture Note Series.

- [18] Tim Hoffmann and Nadja Kutz, *Discrete curves in $\mathbb{CP}^1$ and the Toda lattice*, Stud. Appl. Math. **113** (2004), no. 1, 31–55. MR MR2061648 (2005b:37170)
- [19] Richard A. Hord, *Torsion at an inflection point of a space curve*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 371–374. MR 0301644 (46 #800)
- [20] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura, and Yasuhiro Ohta, *Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves*, to appear in Kyushu J. Math.
- [21] ———, *Explicit solutions to semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012), 045206.
- [22] Satoshi Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in the three-sphere*, Tohoku Math. J. (2) **56** (2004), no. 2, 205–235. MR 2053319 (2005a:74056)
- [23] G. L. Lamb, Jr., *Solitons and the motion of helical curves*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), no. 5, 235–237. MR MR0473584 (57 #13250)
- [24] ———, *Solitons on moving space curves*, J. Mathematical Phys. **18** (1977), no. 8, 1654–1661. MR MR0440173 (55 #13052)
- [25] Joel Langer, *Recursion in curve geometry*, New York J. Math. **5** (1999), 25–51 (electronic). MR 1701825 (2002a:37105)
- [26] Nozomu Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN.
- [27] Tetsuji Miwa, *On Hirota's difference equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), no. 1, 9–12. MR 649054 (83f:58042)
- [28] Takeshi Miyazaki and Yasuhide Fukumoto, *N -solitons on a curved vortex filament with axial flow*, J. Phys. Soc. Japan **57** (1988), no. 10, 3365–3370. MR 974941 (89k:76027)
- [29] E. Musso, *An experimental study of Goldstein-Petrich curves*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **67** (2009), no. 4, 407–426. MR 2668358
- [30] Kazuaki Nakayama, *Elementary vortex filament model of the discrete nonlinear Schrödinger equation*, J. Phys. Soc. Japan **76** (2007), no. 7, 074003.
- [31] Kazuaki Nakayama, Harvey Segur, and Miki Wadati, *Integrability and the motion of curves*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), no. 18, 2603–2606. MR MR1187927 (93g:53004)
- [32] Ulrich Pinkall, Boris Springborn, and Steffen Weißmann, *A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow*, J. Phys. A **40** (2007), no. 42, 12563–12576. MR 2392889 (2009a:76031)
- [33] C. Rogers and W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux transformations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Geometry and modern applications in soliton theory. MR 1908706 (2003j:37120)
- [34] Robert Sauer, *Differenzengeometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. MR 0262939 (41 #7544)
- [35] Dirk J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, second ed., Dover Publications Inc., New York, 1988. MR 939369 (89b:53002)

- [36] A. Sym, *Soliton surfaces*, Lett. Nuovo Cimento (2) **33** (1982), no. 12, 394–400. MR 654311 (84g:35157)
- [37] Miki Wadati, *Bäcklund transformation for solutions of the modified Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan **36** (1974), no. 5, 1498.
- [38] T. J. Willmore, *An introduction to differential geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1959 reprinted from corrected sheets of the first edition, 1959. MR 0159265 (28 #2482)
- [39] R. Willox, T. Tokihiro, and J. Satsuma, *Darboux and binary Darboux transformations for the nonautonomous discrete KP equation*, J. Math. Phys. **38** (1997), no. 12, 6455–6469. MR 1483504 (98k:58131)
- [40] 井ノ口順一, 幾何学いろいろ, 日本評論社, 2007.
- [41] ———, 曲線とソリトン, 開かれた数学, vol. 4, 朝倉書店, 2010.
- [42] ———, 差分幾何, 数学セミナー, vol. 49, 日本評論社, 2010, pp. 26–31.
- [43] 古畑仁, 中心アファイン幾何学にあらわれる曲面たち, 数理解析研究所講究録 (2009), no. 1623, 1–11.
- [44] 若山正人 (編), 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店, 2010.
- [45] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 改訂版, 裳華房, 1995.
- [46] 川久保哲, 3次元空間形内の局所誘導階層について, 福岡大学理学集報 **40** (2010), no. 2, 155–161. MR 2766405 (2011j:37142)
- [47] 大宮眞弓, 非線形波動の古典解析, 森北出版, 2008.
- [48] 辻本諭, 可積分系の離散化について, 可積分系の応用数理, 裳華房, 2000, pp. 1–52.
- [49] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—, 裳華房, 2002.