

# 微分方程式の精度保証付き数値計算

—逐次反復に基づく計算機援用証明—

Numerical verification methods for differential equations:  
Computer-assisted proofs based on infinite dimensional sequential iteration

渡部 善隆 (Yoshitaka Watanabe)

九州大学 情報基盤研究開発センター

Research Institute for Information Technology, Kyushu University

## 概要

本稿では、残差形式と逐次反復に基づく無限次元関数方程式の解の存在検証アルゴリズムを提案し、非線形偏微分方程式を含むいくつかの微分方程式に対する精度保証付き数値計算結果を示す。不動点定式化から導かれるコンパクト作用素が不動点のまわりで引き込み的であることが前提になるため、手法の適用範囲には限界がある。しかしながら、近似解の算定と近似解に関連するノルム評価が主たる計算となるため、無限次元 Newton 型反復に代表される他の検証手法と比べ軽コストであるという特長を持つ。

ABSTRACT: This paper proposes numerical verification methods of solutions for infinite dimensional functional equations based on residual form and sequential iteration. Some computer-assisted proofs for differential equations including nonlinear partial differential equations will be shown. Comparing with other verification procedures as typified by infinite dimensional Newton-type iteration, the proposed algorithm can be done at low computational cost although it needs that the formulated compact map is retractive in some neighborhood of the fixed-point to be verified.

## 1 問題設定と残差方程式

本章では、抽象的な形で関数方程式を設定し、方程式の近似解を用いた 2 種類の残差形式を導く。

### 1.1 非線形方程式

$\hat{X}, X, Y$  を Hilbert 空間とし、埋め込みを含めた包含関係:  $\hat{X} \hookrightarrow X \hookrightarrow Y$  が成り立つとする。さらに、埋め込み  $\hat{X} \hookrightarrow X$  のコンパクト性を仮定する。 $\mathcal{A}$  を  $\hat{X}$  から  $Y$  への線形作用素、 $f$  を  $X$  から  $Y$  への (一般に非線形) 作用素として、

$$\mathcal{A}u = f(u) \tag{1}$$

を満たす  $u$  を求める問題を考える。非線形微分方程式の場合、方程式 (1) の  $\mathcal{A}$  は最高階数の微分を含む線形作用素、 $f$  はそれ以外の非線形項に対応する。Hilbert 空間  $X, Y$  の内積を  $(u, v)_X, (u, v)_Y$ 、内積から導かれるノルムを  $\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}, \|u\|_Y = \sqrt{(u, u)_Y}$  で表記する。なお、1.2.1 節の直接的引き戻しを行う場合には、内積を用いないため、各空間を Banach 空間とした定式化も可能である。

$\mathcal{A}$  および  $f$  に以下を仮定する。

A1. 任意の  $\phi \in Y$  に対し  $\mathcal{A}\psi = \phi$  は一意の解  $\psi \in \hat{X}$  を持つ。またこの対応関係は連続である。さらに  $\hat{X}$

から  $X$  への埋め込みまで含めた対応を  $\mathcal{A}^{-1}: Y \rightarrow X$  と表記する.

A2. 上で定めた  $\mathcal{A}^{-1}$  に対し, 以下の評価を満たす定数  $C_p > 0$  が具体的に算定可能である.

$$\|\mathcal{A}^{-1}u\|_X \leq C_p \|u\|_Y, \quad \forall u \in Y, \quad (2)$$

A3.  $f: X \rightarrow Y$  は連続であり, かつ  $X$  の有界集合を  $Y$  の有界集合に移す.

$\mathcal{A}^{-1}$  は  $Y$  から  $\hat{X}$  への連続写像 (通常  $\mathcal{A}$  の逆作用素)  $\mathcal{A}^{-1}$  と  $\hat{X}$  から  $X$  への埋め込み作用素  $I_{\hat{X} \hookrightarrow X}$  との合成写像と見ることができる.

$$\mathcal{A}^{-1}: \begin{cases} Y & \xrightarrow[\text{連続}]{\mathcal{A}^{-1}} & \hat{X} & \xrightarrow[\text{コンパクト}]{I_{\hat{X} \hookrightarrow X}} & X \\ \phi & \mapsto & \psi & \mapsto & \psi \end{cases}$$

このとき, 線形連続作用素すなわち有界作用素とコンパクト作用素の合成作用素はコンパクトとなることから,  $\mathcal{A}^{-1}$  は  $Y$  から  $X$  へのコンパクト作用素となる.

## 1.2 引き戻し

問題 (1) の近似解  $u_h$  を用いた残差方程式への変換を行う. 以降, この手法を“引き戻し”と呼ぶ. 近似解に応じて 2 種類の引き戻しを考える.

### 1.2.1 直接的引き戻し

近似解  $u_h \in X$  が  $\mathcal{A}u_h \in Y$  を満たすならば, 方程式 (1) は

$$\mathcal{A}w = f(w + u_h) - \mathcal{A}u_h \quad (3)$$

を満たす残差

$$w = u - u_h$$

を求める問題に書き直すことができる. この式 (3) の右辺を  $g(w)$  と置くことで, 残差方程式  $\mathcal{A}w = g(w)$  を得る. もし  $u_h$  が  $u$  に近ければ, 式 (3) の右辺項は小さいことが期待される.

### 1.2.2 $X^*$ 型引き戻し

近似解が  $u_h$  が  $\mathcal{A}u_h \notin Y$  となる場合には, 次の“ $X^*$ 型”引き戻し [5] を適用する.  $X$  の有限次元部分空間を  $X_h$  で表記する.  $X_h$  の下添字“ $h$ ”は  $X_h$  の  $X$  に対する近似度を表す正のパラメータである. 次に直交射影  $P_h: X \rightarrow X_h$  を

$$(v - P_h v, v_h)_X = 0, \quad \forall v_h \in X_h \quad (4)$$

で定義し,  $h$  に依存する具体的な値を算定可能な  $C(h) > 0$  が存在し (“ $C(h)$ ”は, オーダーが  $h$  という意味ではないことに注意),

$$\|(I - P_h)v\|_X \leq C(h)\|Av\|_Y, \quad \forall v \in \hat{X} \quad (5)$$

を満たすこと, および,  $\mathcal{A}: \hat{X} \rightarrow Y$  は

$$(u, v)_X = (\mathcal{A}u, v)_Y, \quad \forall u \in \hat{X}, \quad \forall v \in X \quad (6)$$

を満たすことを仮定する. 式 (6) より, 問題 (1) は弱形式 (変分形式)

$$(u, v)_X = (f(u), v)_Y, \quad \forall v \in X \quad (7)$$

を満たす  $u \in X$  を求める問題に書き直される. また, 式 (5), **A1** より Aubin-Nitsche の技巧 [7, 8] を用いて

$$\|(I - P_h)v\|_Y \leq C(h)\|(I - P_h)v\|_X, \quad \forall v \in X \quad (8)$$

も成立する.

次に, 近似解  $u_h \in X_h$  が

$$(u_h, v_h)_X = (f(u_h), v_h)_Y, \quad \forall v_h \in X_h \quad (9)$$

を厳密に満たすことを仮定する.  $u_h$  は有限次元問題の精度保証付き数値計算により得ることができる [10, 14]. ここで,  $f(u_h) \in Y$  に対し **A1** より

$$\mathcal{A}\bar{u} = f(u_h) \quad (10)$$

を満たす  $\bar{u} \in X$  が存在する. よって, 式 (6) より

$$(\bar{u}, v)_X = (f(u_h), v)_Y, \quad \forall v \in X \quad (11)$$

であり, 式 (11) の  $v \in X$  を特に  $X_h$  の要素に制限し, 式 (9) を引くことにより

$$(\bar{u} - u_h, v_h)_X = 0, \quad \forall v_h \in X_h \quad (12)$$

を得る. 式 (12) は  $P_h\bar{u}$  が  $u_h$  に一致することを示す. ここで  $\bar{u}$  と  $u_h$  の差を

$$v_0 := \bar{u} - u_h \quad (13)$$

とおけば, 式 (5), (8) を用いたノルム評価

$$\|v_0\|_X \leq C(h)\|f(u_h)\|_Y, \quad \|v_0\|_Y \leq C(h)^2\|f(u_h)\|_Y \quad (14)$$

を得る. 最後に,  $w = u - \bar{u}$  とおき, 式 (1) の引き戻し形式

$$\mathcal{A}w = f(w + u_h + v_0) - f(u_h) \quad (15)$$

を導くことができる. 式 (15) の右辺を  $g(w)$  と置くことで, 残差方程式  $\mathcal{A}w = g(w)$  を得る. 式 (15) の解  $w \in X$  が求まれば, 式 (1) の解  $u$  を

$$u = u_h + v_0 + w$$

で構成することができる.

この引き戻しは,  $\mathcal{A}u_h \in Y$  である必要がないことが特長であり. 具体的な  $\mathcal{A}$  については,  $X_h$  の高次要素を用いた  $v_0$  の a posteriori 評価による高精度化も可能である [18, 6, 17].

### 1.2.3 $X^*$ 型引き戻しの条件を用いた $\mathcal{A}^{-1}$ の評価

条件 (6) を仮定すれば, 式 (2) を満たす  $C_p$  は埋め込み  $X \hookrightarrow Y$  の定数:

$$\|u\|_Y \leq C_p\|u\|_X, \quad \forall u \in X \quad (16)$$

に取ることができる. 証明は Schwarz の不等式を用いた

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^{-1}u\|_X^2 &= (\mathcal{A}^{-1}u, \mathcal{A}^{-1}u)_X = (u, \mathcal{A}^{-1}u)_Y \\ &\leq \|u\|_Y \|\mathcal{A}^{-1}u\|_Y \\ &\leq C_p \|u\|_Y \|\mathcal{A}^{-1}u\|_X \end{aligned}$$

から導かれる.

## 2 無限次元逐次反復に基づく検証: IS-Res

この章では、無限次元逐次反復に基づく検証アルゴリズム IS-Res<sup>\*1</sup>を提案する。

### 2.1 不動点定式化

前章の引き戻しを用いて得られる方程式

$$Aw = g(w) \quad (17)$$

を考え、0の周りで解  $w \in X$  の存在を検証する。作用素  $g: X \rightarrow Y$  は、 $f$  と同じ性質 **A3** を満たすことから、 $\mathcal{A}^{-1}$  と  $g$  の合成作用素  $F$  を

$$F := \mathcal{A}^{-1} \circ g: X \rightarrow X \quad (18)$$

と定めると、**A1** より、問題 (1) は不動点方程式

$$u = F(u) \quad (19)$$

を満たす  $u \in X$  を求める問題に書き直すことができる。**A3** ( $g$  の連続・有界性) と  $\mathcal{A}^{-1}: Y \rightarrow X$  のコンパクト性より、 $F$  は  $X$  から  $X$  へのコンパクト作用素となる。 $F$  の対応関係は次の通りである。

$$F: \begin{cases} X & \xrightarrow[\text{連続・有界}]{g} & Y & \xrightarrow[\text{コンパクト}]{\mathcal{A}^{-1}} & X \\ u & \mapsto & g(u) & \mapsto & \mathcal{A}^{-1}g(u) \end{cases}$$

### 2.2 解の検証条件

$F$  の引き込み性を前提に、以下の検証条件を設定することができる。

**定理 2.1** 解を包含することが期待される“候補者集合”  $W \subset X$  を、半径  $\alpha > 0$  に対し

$$W := \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \alpha\} \quad (20)$$

と取る。このとき

$$C_p \sup_{w \in W} \|g(w)\|_Y \leq \alpha \quad (21)$$

が成立すれば、 $F$  は  $W$  内に不動点を持つ。

**証明:**  $W \subset X$  は中心 0 の有界凸閉集合。よって、式 (20), (21) より

$$\sup_{w \in W} \|F(w)\|_X \leq C_p \sup_{w \in W} \|g(w)\|_Y \leq \alpha$$

であり、 $F(W) \subset W$  が成り立つ。よって Schauder の不動点定理 [19] より結論を得る。□

### 2.3 解の局所一意性

候補者集合  $W$  内の解の局所一意性は、以下の条件で確認することができる。

\*1 “Infinite”, “Sequential”, “Residual” より命名。

**定理 2.2** 式 (20) で定義した  $W \subset X$  に対し,  $C_g > 0$  が存在して

$$\|g(w_1) - g(w_2)\|_Y \leq C_g \|w_1 - w_2\|_X, \quad \forall w_1, w_2 \in W \quad (22)$$

を満たすとする. このとき, 定理 2.1 の条件 (21) に加え

$$C_p C_g < 1 \quad (23)$$

が成立すれば,  $F$  の不動点は  $W$  内で唯一である.

**証明:**  $W$  は空でない閉集合であり, 任意の  $w_1, w_2 \in W$  に対し, 式 (2), (22) より,

$$\begin{aligned} \|F(w_1) - F(w_2)\|_X &= \|\mathcal{A}^{-1}(g(w_1) - g(w_2))\|_X \\ &\leq C_p C_g \|w_1 - w_2\|_X. \end{aligned}$$

よって, 条件 (23) が Banach の不動点定理 [19] の成立条件である  $F$  の縮小写像性を導く.  $\square$

特に  $g$  が  $W$  で微分可能ならば, 以下の評価が成り立つ.

**系 2.1** 式 (20) で定義した  $W \subset X$  に対し,  $g$  が  $W$  で Fréchet 微分可能ならば, 式 (22) の  $C_g > 0$  は

$$\sup_{\hat{w} \in W} \|g'[\hat{w}]w\|_Y \leq C_g \|w\|_X, \quad \forall w \in X \quad (24)$$

を満たすように取ればよい.

**証明:**  $W$  が凸集合であることから, 平均値の定理 [7, 補題 4.14] より

$$\|g(w_1) - g(w_2)\|_Y \leq \sup_{\hat{w} \in W} \|g'[\hat{w}](w_1 - w_2)\|_Y, \quad \forall w_1, w_2 \in W. \quad (25)$$

よって,  $w = w_1 - w_2 \in X$  とおけば, 式 (24) より式 (22) が導かれる.  $\square$

線形作用素  $g'[\hat{w}]: X \rightarrow Y$  の  $\hat{w} \in W$  での有界性 (24) は, 少し緩い条件:

$$\sup_{\hat{w} \in W} \|g'[\hat{w}](w_1 - w_2)\|_Y \leq C_g \|w_1 - w_2\|_X, \quad \forall w_1, w_2 \in W \quad (26)$$

に置き直すこともできる.

## 2.4 引き戻しの意義

問題 (1) に  $\mathcal{A}^{-1}$  を作用させて得られる不動点問題  $u = \mathcal{A}^{-1}f(u)$  に直接不動点定理を適用することを考える. すると, 近似解  $u_h$  と式 (20) で定義される  $W$  に対し, 候補者集合を  $U = u_h + W$  で設定し

$$\mathcal{A}^{-1}f(U) - u_h \subset W$$

で Schauder に不動点定理の条件を確認することになる. しかし, 式 (2) を適用するためには, 任意の  $u \in U$  に対し,

$$\mathcal{A}^{-1}f(u) - u_h = \mathcal{A}^{-1}(f(u) - \mathcal{A}u_h)$$

となる必要があり, よって,  $\mathcal{A}u_h \in Y$  であることが要請される. したがって,  $\mathcal{A}u_h \notin Y$  の場合には, 引き戻しが必須となる.

## 2.5 検証アルゴリズム IS-Res

定理 2.1, 2.2 に基づく検証アルゴリズム IS-Res を示す. 精度保証付き数値計算でよく使われる epsilon-inflation [12] を用いている.

### 検証アルゴリズム IS-Res

- $k = 0$

初期値  $\alpha^{(0)} > 0$  を設定.

- $k \geq 1$

1. ある定数  $\varepsilon > 0$  に対し,

$$\hat{\alpha}^{(k)} := (1 + \varepsilon)\alpha^{(k-1)}.$$

2.  $k$  番目の候補者集合  $W^{(k)}$  を以下で定める.

$$W^{(k)} := \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \hat{\alpha}^{(k)}\}.$$

3.  $k$  番目の反復として以下を計算.

$$\alpha^{(k)} := C_p \sup_{w \in W^{(k)}} \|g(w)\|_Y.$$

4.  $\alpha^{(k)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}$  ならば反復終了. このとき求める解が  $W^{(k)} \subset X$  の中に存在. さらに  $W^{(k)}$  に対し  $C_g$  を算定し  $C_p C_g < 1$  ならば解は  $W^{(k)}$  内で唯一. (更にオプションとして系 2.2 の  $\hat{W}$  を作成)

5.  $k := k + 1$  として 1. に戻る.  $k$  があらかじめ定めた最大反復回数に到達した場合や,  $\alpha^{(k)}$  の値が設定した閾値を超えた場合は反復終了, 検証失敗.

## 2.6 計算コストについて

前節の検証アルゴリズム IS-Res において, 定数  $C_p$  は既知のため, 主たる計算部分は候補者集合  $W^{(k)}$  の任意の元  $w$  に対するノルム  $\|g(w)\|_Y$  および局所一意性のための  $C_g$  の評価である. 無限次元 Newton 型反復に代表される他の検証手法では, これらの評価に加えて, 線形化作用素のノルム評価 ( $C_p$  に対応) のための行列ノルムの上界の算定 [9] や区間係数連立 1 次方程式の精度保証付き数値計算 [4] などの線形計算が必要となる. それらの検証手法に比べ, IS-Res は追加の線形計算が必要ないため, 軽コストであるという特長を持つ. 具体的な問題におけるプログラミングおよび計算コストの比較は文献 [8, 7.11, 7.12 節] を参照されたい.

## 2.7 局所一意性範囲の拡大

“存在範囲は狭く, 一意性の範囲は広く” という原則から見れば, 条件 (23) を満たす  $C_g$  は, 可能な限り大きく取る方が有利である. 次に, 局所一意性を持つ候補者集合の拡大方法の例を示す.

**系 2.2** 式 (20) で定義した  $W \subset X$  内に  $F$  の不動点  $w$  が存在するとする. このとき  $\hat{\alpha} \geq \alpha > 0$  で構成される集合

$$\hat{W} := \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \hat{\alpha}\} \quad (27)$$

に対し,  $\hat{C}_g > 0$  が存在して

$$\|g(w_1) - g(w_2)\|_Y \leq \hat{C}_g \|w_1 - w_2\|_X, \quad \forall w_1, w_2 \in \hat{W} \quad (28)$$

であり, かつ  $C_p \hat{C}_g < 1$  ならば,  $F$  の不動点は  $\hat{W}$  内で唯一である.

**証明:**  $\hat{w} \neq w$  である  $F$  の不動点  $\hat{w} \in \hat{W}$  が存在するとする. このとき, 式 (2), (28) より

$$\begin{aligned} \|w - \hat{w}\|_X &= \|F(w) - F(\hat{w})\|_X = \|\mathcal{A}^{-1}(g(w) - g(\hat{w}))\|_X \\ &\leq C_p \hat{C}_g \|w - \hat{w}\|_X \end{aligned}$$

であり,  $\|w - \hat{w}\|_X \neq 0$  で両辺を除して  $C_p \hat{C}_g \geq 1$  を得る. しかしこれは  $C_p \hat{C}_g < 1$  に矛盾する. よって不動点は  $w$  のみである.  $\square$

系 2.2 により, 解が  $W$  に存在して,  $W$  以外の  $\hat{W}$  には存在しないという, 解の非存在証明を得ることができる.

### 3 検証例

この章では, 3 種類の微分方程式に対する検証結果を示し, IS-Res の有効性 (およびその限界) について議論する. 計算は MATLAB R2011a および区間演算ツールボックス INTLAB [13] version 6 で行った. したがって, 得られる結果は浮動小数点演算における丸め誤差を考慮した数学的に厳密なものである.

以下, 有界領域  $\Omega$  に対し,  $m$  階以下の超関数の意味での導関数がすべて  $L^2(\Omega)$  に属する関数全体を  $H^m(\Omega)$ , また,  $\Omega$  の境界を  $\partial\Omega$  をとする時,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \quad (29)$$

で定義する. ただし  $\partial\Omega$  上での値はトレースの意味とする. このとき,

$$\nabla u = \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right]^T$$

に対し,  $(\nabla u, \nabla v)_{L^2}$  は  $H_0^1(\Omega)$  の内積になる. ただし  $(u, v)_{L^2}$  は通常の  $L^2$  内積とする.

#### 3.1 2 点境界値問題

$K > 0$  に対し, 次の問題を考える.

$$\begin{cases} -u'' - Ku = \left(\pi - \frac{K}{\pi}\right) \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

方程式 (30) は, 厳密解

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$$

を持つ.  $Au = -u''$  と置き,  $\Omega = (0, 1)$  に対する関数空間

$$\hat{X} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad X = H_0^1(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega)$$

と内積

$$(u, v)_X = (u', v')_{L^2}, \quad (u, v)_Y = (u, v)_{L^2}$$

を導入し, 検証アルゴリズム IS-Res を適用する. 区間  $(0, 1)$  を  $N$  等分し, 分割幅を  $h = 1/N$  とする. 端点を除く各分割点で 1 を取りそれ以外では 0 となる区分的 1 次関数を基底関数として  $X_h$  を定める. この時, 式 (5) は  $C(h) = h/\pi$  [7, 定理 4.4], 式 (2) (式 (16)) は  $C_p = 1/\pi$  [15, Theorem 1.2] で成立する. 近似解  $u_h \in X_h$  は  $Au_h \notin Y$  であるため,  $X^*$  型引き戻しを適用する. 式 (9) を満たす  $u_h \in X_h$  は, 対応する区間係数連立 1 次方程式を精度保証付きで解くことにより得られる.

この時, 条件 (20) は,  $K < \pi^2$  ならば

$$\|v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\pi}{K} \left(1 - \frac{K}{\pi^2}\right) \alpha$$

を満たす  $\alpha > 0$  で成立する. この事実は,  $K \geq \pi^2$  では IS-Res による検証は困難であること, および, 線形な方程式であっても, Newton 法に代表される解の検証手法 [4] が必要なことを示唆している. 表 1 は  $N$  と  $K$  に対して得られる存在検証条件 (21) を満たす  $W$  のノルム値を示す. 表示最終桁を切り上げている.

表 1 IS-Res による検証結果 (2 点境界値問題)

$N$	$K = \pi$	$K = \pi^2/2$	$K = 99/100\pi^2$
10	$3.28921 \times 10^{-3}$	$7.01365 \times 10^{-3}$	$3.88862 \times 10^{-1}$
20	$8.24655 \times 10^{-4}$	$1.76415 \times 10^{-3}$	$1.46659 \times 10^{-1}$
40	$2.06312 \times 10^{-4}$	$4.41715 \times 10^{-4}$	$4.20342 \times 10^{-2}$

### 3.2 2 階楕円型境界値問題

2 次元正方領域  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  に対し, 次の問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(1 + u + u^2 - au^3) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (31)$$

$\lambda, a > 0$  は与えられたパラメータとする. 問題 (31) は, 微小な  $a$  に対し  $\lambda$  を変数として図 1 のような解の分岐曲線を描くことが知られている [3]. 領域  $\Omega$  を三角形一様分割し, 三角形要素上での区分 1 次関数

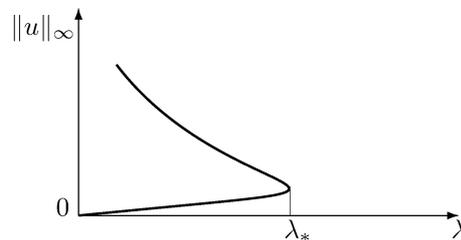


図 1  $\lambda$  をパラメータとした  $u$  の概形

により  $X_h$  の基底関数を構成する.  $x$  または  $y$  方向の分割数を  $N$  とすれば,  $h = 1/N$  に対し式 (5) は  $C(h) = 0.493h$  に取ることができる [2]. また, 式 (2) (式 (16)) は  $C_p = 1/(\pi\sqrt{2})$  で成立する. 式 (9) を満たす  $u_h \in X_h$  は, 有限次元非線形方程式に Krawczyk 法を適用することで精度保証付きで求める. 図 2 に分

岐曲線 (図 1) の “下の解” に対応する近似解の形状を, 表 2 に検証結果を示す. 検証に成功したのは, すべて下の解である.  $\|W\|_{H_0^1(\Omega)}$  は解を包み込む集合 (表示桁以降切り上げ),  $\|\hat{W}\|_{H_0^1(\Omega)}$  は局所一意性が得られた集合 (表示桁以降切り捨て) のノルム値である. なお,  $\lambda$  が 6 を超える下の解および上の解の検証には失敗

表 2 IS-Res による検証結果 ( $N = 30, a = 0.001$ )

$\lambda$	$\ u_h\ _\infty$	$\ v_0\ _{H_0^1(\Omega)}$	反復数	$\ W\ _{H_0^1(\Omega)}$	$\ \hat{W}\ _{H_0^1(\Omega)}$
1.0	0.07816	$1.70758 \times 10^{-2}$	3	$8.16807 \times 10^{-5}$	6.25829
2.0	0.16802	$3.57832 \times 10^{-2}$	4	$4.48135 \times 10^{-4}$	2.88094
3.0	0.27554	$5.69294 \times 10^{-2}$	5	$1.45700 \times 10^{-3}$	1.68467
4.0	0.41234	$8.21144 \times 10^{-2}$	6	$4.15696 \times 10^{-3}$	1.04604
5.0	0.60729	$1.15381 \times 10^{-1}$	9	$1.37587 \times 10^{-2}$	0.51463
5.5	0.75339	$1.38860 \times 10^{-1}$	14	$3.43893 \times 10^{-2}$	0.30793
6.0	0.99555	$1.76076 \times 10^{-1}$	—	検証失敗	—

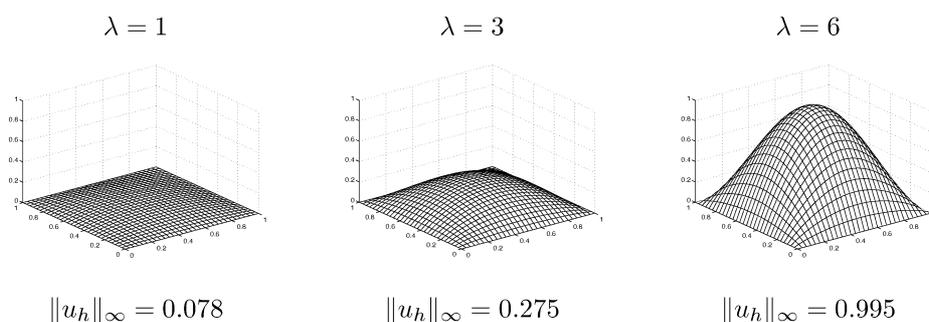


図 2 近似解の概形 (最大値 1 で規格化)

した. この場合には, Newton 型反復に基づく検証手法 [9] などの適用が必要となる.

### 3.3 4 階楕円型方程式

領域  $\Omega = (0, \pi/a) \times (0, \pi)$  において次の問題を考える.

$$\begin{cases} P\Delta^2 u = \sqrt{PR}\xi - u_z \Delta u_x + u_x \Delta u_z, & \text{in } \Omega \\ u = \Delta u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (32)$$

$P, R, a > 0$  は既知の変数.  $\xi$  は  $u$  と同じ境界条件を満たす外力項とする. 問題 (32) は 2 次元 Navier-Stokes 方程式に対し流速についての流れ関数表示を行い変数変換と正規化を施すことで得られる 4 階楕円型方程式である [1]. 境界条件を満たす関数空間を 2 重 Fourier 級数で

$$X^k := \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} a_{mn} \sin(amx) \sin(ny) \mid a_{mn} \in \mathbb{R}, \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} ((am)^{2k} + n^{2k}) a_{mn}^2 < \infty \right\}$$

で定義することで,

$$A = P\Delta^2, \quad \hat{X} = X^4, \quad X = X^3, \quad Y = X^0$$

と定める. このとき,  $\|u\|_X := \|\nabla \Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|u\|_Y := \|u\|_{L^2(\Omega)}$  に対し, 式 (2) は  $C_p = 1/(P(\sqrt{a^2+1}))$  で成立し, IS-Res の適用が可能となる. ここでは,  $\xi$  を式 (32) と移流拡散方程式の連立系 [16] の近似解として定め, Fourier 級数展開を  $x, y$  とも  $N$  で打ち切った空間から  $u_h$  を定め直接的な引き戻し

$$\begin{cases} P\Delta^2 w = J(w + u_h, \Delta w) + J(w, \Delta u_h) - P\Delta^2 u_h + \sqrt{PR}\xi + J(u_h, \Delta u_h) & \text{in } \Omega \\ w = \Delta w = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (33)$$

$$w = u - u_h, \quad J(u, v) := u_x v_z - v_x u_z$$

を適用した. 解の検証では Plum による最大値ノルム評価 [11]

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} + K_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + K_3 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in X,$$

$$K_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2}}, \quad K_2 = 1.1548 \sqrt{\frac{4+a^2}{6a}}, \quad K_3 = 0.22361 \sqrt{\frac{144+40a^2+9a^4}{10a^3}} \frac{\pi}{3}$$

を用いた. 図 3 は近似解の形状を示す. その結果,  $R = 5, P = 10, a = 1/\sqrt{2}, N = 5$  において  $\|W\|_X$  の意

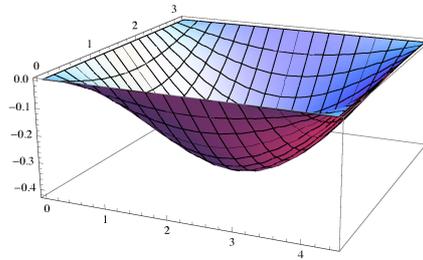


図 3 近似解の概形

味で  $3.67713 \times 10^{-9}$  の範囲に解を包み込むことに成功した. なお, より大きな  $R$  や移流拡散方程式との系となる Oberbeck-Boussinesq 方程式に適用するには IS-Res では限界があり, Newton 法に基づく検証手法 [16] などが必要となる.

## 謝辞

本研究は科学研究費補助金基盤研究 (S) (課題番号 20224001) および基盤研究 (C) (課題番号 21540134) の補助を受けている.

## 参考文献

- [1] P. Grisvard: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [2] F. Kikuchi, and L. Xuefeng: “Determination of the Babuska-Aziz constant for the linear triangular finite element,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, vol. 23, no. 1, pp. 75–82, February, 2006.
- [3] P.L. Lions: “On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations,” *SIAM Review*, vol. 24, no. 4, pp. 441–467, October, 1982.
- [4] M.T. Nakao: “A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems II,” *Japan Journal of Applied Mathematics*, vol. 7, no. 3, pp. 477–488, October, 1990.

- [5] M.T. Nakao: “Solving nonlinear elliptic problems with result verification using an  $H^{-1}$  type residual iteration,” in *Validation Numerics: theory and applications*, eds. R. Albrecht, G. Alefeld, and H. J. Stetter, pp. 161–173, Computing Supplementum, vol. 9, Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [6] M.T. Nakao, and N. Yamamoto: “Numerical verification of solutions for nonlinear elliptic problems using  $L^\infty$  residual method,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 217, no. 1, pp. 246–262, January, 1998.
- [7] 中尾 充宏, 山本 野人: 精度保証付き数値計算—コンピュータによる無限への挑戦—, 日本評論社, 1998.
- [8] 中尾 充宏, 渡部 善隆: 実例で学ぶ精度保証付き計算—理論と実装—, 臨時別冊・数理科学 2011 年 10 月, SCG ライブラリ-85, サイエンス社, 2011.
- [9] M.T. Nakao, and Y. Watanabe: “Numerical verification methods for solutions of semilinear elliptic boundary value problems,” *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, vol. 2, no. 1, pp. 2–31, January, 2011.
- [10] 大石 進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.
- [11] M. Plum: “Explicit  $H_2$ -estimates and pointwise bounds for solutions of second-order elliptic boundary value problems,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 165, no. 1, pp. 36–61, March, 1992.
- [12] S.M. Rump: “A note on epsilon-inflation,” *Reliable Computing*, vol. 4, no. 4, pp. 371–375, November, 1998.
- [13] S.M. Rump: “INTLAB – INTerval LABoratory,” in *Developments in Reliable Computing*, ed. T. Csendes, pp. 77–104, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.  
<http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/>
- [14] S.M. Rump: “Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic,” *Acta Numerica*, vol. 19, pp. 287–449, May, 2010.
- [15] M.H. Schultz: *Spline Analysis*, Prentice-Hall, London, 1973.
- [16] Y. Watanabe, N. Yamamoto, M.T. Nakao, and T. Nishida: “A numerical verification of nontrivial solutions for the heat convection problem,” *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, vol. 6, no. 1, pp. 1–20, March, 2004.
- [17] N. Yamamoto, and M.T. Nakao: “Numerical verifications of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains,” *Numerische Mathematik*, vol. 65, no. 1, pp. 503–521, December, 1993.
- [18] N. Yamamoto, and M.T. Nakao: “Numerical verifications for solutions to elliptic equations using residual iterations with a higher order finite element,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 60, no. 1-2, pp. 271–279, June, 1995.
- [19] E. Zeidler(Translated by P.R. Wadsack): *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, 1986.