RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B30 (2012), 209–221

量子 Painlevé 系について (On quantum Painlevé systems)

神戸大学・理学研究科 名古屋 創 (Hajime Nagoya)
Department of Mathematics,
Kobe University

Abstract

This is a proceedings paper of the RIMS workshop on "Developments of Mathematics for Integrable systems" held in Kyoto on 17–19, August 2011. The aim of the present note is to give a short account of recent studies on quantum Painlevé systems. As an example, we give integral formulas for solutions to the quantum $\mathrm{P_{II}}$, which is constructed from Bäcklund transformations. We announce that a result of our work [14], that is, construction of hypergeometric solutions to quantization of higher Painlevé systems obtained independently by Fuji-Suzuki [2], Suzuki [19], Tsuda [22].

1 Introduction

量子 Painlevé 系とは次の (複素領域上の) Schrödinger 系

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi(z,x) = \widehat{H}_i \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, \alpha \right) \Psi(z,x) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

のことである. ここで, κ, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ は複素パラメータであり, 未知関数 $\Psi(z,x)$ は変数 $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の関数である. Hamiltonian $\widehat{H}_i$ は Painlevé 系の多項式 Hamiltonian $H_i(q,p,z,\alpha)$ の正準座標 (q,p) に, 掛け算作用素 x と微分作用素 $\partial/\partial x$ を代入して得られるもの (の一つ) である. すなわち, Hamiltonian $\widehat{H}_i$ は Hamiltonian $H(q,p,z,\alpha)$ の正準量子化である.

例として, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ を挙げる. $\mathrm{P_{II}}$ は Hamiltonian

$$H_{\mathrm{II}}(q,p,z,\alpha) = \frac{p^2}{2} - \left(q^2 + \frac{z}{2} \right) p + \alpha q$$

を用いて, Hamiltonian 系として表せる. 従って, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ (の一つ) の Hamiltonian は

$$\widehat{H}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{z}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x$$

であり, ゆえに量子 $\mathrm{P_{II}}$ は

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z}\Psi(z,x) = \widehat{H}_{\mathrm{II}}\Psi(z,x)$$

である.

1.1 対称性

量子 $\mathrm{P_{II}}$ の Hamiltonian $\widehat{H}_{\mathrm{II}}$ は掛け算作用素と微分作用素の順序には依っていないが, 一般には量子高階 Painlevé 系の Hamiltonian は掛け算作用素と微分作用素の順序に Hamiltonan は依存している. そこで, 古典 Hamiltonian が持つアフィン Weyl 群対称性を量子 Hamiltonian も持つという条件を課す. この条件を満たすような量子 Hamiltonian は, 野海・山田系 [8], 野海・山田系を拡張した A 型の高階 Painlevé 系 [9], C 型の高階 Painlevé 系 [10], Garnier 系 [5], 藤・鈴木 [2], [19] 及び津田 [22] によって独立に得られたある多項式 Hamiltonian 系 [14] に対して構成されている.

量子 Hamiltonian がアフィン Weyl 群対称性を持つとはどういうことか説明しよう. まず, $\widehat{H}(\hat{q},\hat{p},z,\alpha)$ を正準座標 $\hat{q}$, $\hat{p}$ の多項式, z に関しては有理式とする. 正準座標 $\hat{q}$, $\hat{p}$ は交換関係 $[\hat{q},\hat{p}] = -1$ を満たし, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ はパラメータである. 交換関係 $[d,z] = 1$ を満たす d も考える. d は $\hat{q}$, $\hat{p}$ とは可換とする. アフィン Weyl 群を W と書く. 量子 Hamiltonian $\widehat{H}$ が W 対称性を持つとは, 次の条件が満たされることを言う.

(W. 1) $s \in W$ は $\hat{q},\hat{p},z,d,\alpha$ に双有理正準変換として作用する.

(W. 2) $s \in W$ は Schrödinger 作用素を不変に保つ. すなわち

$$s\left(\kappa d - \widehat{H}\right) = \kappa d - \widehat{H}$$

が成り立つ. 正準座標が多変数の場合にも上の条件は容易に拡張される.

古典 Painlevé 系に対するアフィン Weyl 群作用の非可換化は, 長谷川 [3] によって初めてなされ, 黒木 [7] はアフィン Weyl 群作用の非可換化を Chevalley 生成元の複素冪で実現した.

アフィン Weyl 群対称性を Schrödinger 系 (1) に実現すれば, 既知の解から新たな解が構成できる.

Section 2 で量子 $\mathrm{P_{II}}$ を例にしてその対称性と実現を紹介する.

1.2 多項式解

量子 $\mathrm{P_{II}}$ の Hamiltonian $\widehat{H}_{\mathrm{II}}$ は x^m $(m \in \mathbb{Z})$ に,

$$\widehat{H}_{\mathrm{II}} x^m = (\alpha - m)x^{m+1} - \frac{mz}{2}x^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)x^{m-2}$$

と作用するので, $\alpha = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ は x に関する多項式解

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_i(z) x^i$$

を持つ. このとき, $\varphi_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ は1階の連立線形微分方程式を満たす. 他の量子 Painlevé 方程式も多項式解を持つ. 量子高階 Painlevé 系も多項式解を持つことが観察される.

$\mathrm{P_{II}}$ は $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき, Airy 関数を用いて表される特殊解 (行列式表示解) を持つので, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ の特殊解である多項式解も Airy 関数を用いて表されることが期待される. 実際, $\alpha = 1$ のとき, 一次多項式解は Airy 関数を用いて表されることが簡単な計算でわかる. 一般の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合は, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ は積分表示

$$\Phi_m(z, x) = \int_{\Delta} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^{\frac{2}{\kappa}} \prod_{i=1}^{m} \exp\left(-\frac{1}{\kappa}\left(t_i z + \frac{2}{3}t_i^3\right)\right)(x - t_i)dt_i$$

を解に持つ. 量子 $\mathrm{P_{VI}}$, 量子 $\mathrm{P_{V}}$, 量子 $\mathrm{P_{IV}}$, 量子 $\mathrm{P_{III}}$ も超幾何型の積分表示で表される多項式解を持つ [12]. この量子 Painlevé 方程式の超幾何型多項式解は, 共形場理論の Knizhnik-Zamolodchihkov (KZ) 方程式の積分表示解と同じものである. 実際, KZ 方程式は適当な変換のもとで, 量子 Painlevé 方程式に置き換わり, KZ 方程式の積分表示解 [4] から量子 Painlevé 方程式の超幾何型多項式解が得られる [12].

藤・鈴木 [2], [19] 及び津田 [22] によって独立に得られた多項式 Hamiltonian 系の量子化は, 超幾何型多項式解を持つ. Section 3 で簡潔に結果を述べ, 詳細は [14] で発表する.

1.3 直交多項式

量子 $\mathrm{P_{II}}$ の超幾何型多項式解 $\Phi_m(z, x)$ は $\kappa = 1$ のとき, サイクルをうまくとれば, 重み関数が $\exp\left(-\left(t_i z + \frac{2}{3}t_i^3\right)\right)$ である直交多項式 (の積分表示) とな

る. 直交多項式の行列式表示を用いれば, $\kappa=1$ のとき, その直交多項式は

$$P_m(z,x) := \det\begin{pmatrix} \left(\tau^{(i+j-2)}\right)_{1\le j\le m+1}^{1\le i\le m} \\ \left(x^{j-1}\right)_{1\le j\le m+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \tau & \tau^{(1)} & \cdots & \tau^{(m)} \\ \tau^{(1)} & \tau^{(2)} & \cdots & \tau^{(m+1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tau^{(m-1)} & \cdots & \cdots & \tau^{(2m-1)} \\ 1 & x & \cdots & x^m \end{vmatrix}$$

と表される. ただし, $\tau=\tau(z)=\int_\Delta \exp\left(-\left(t_i z+\frac{2}{3}t_i^3\right)\right)dt$, $\tau^{(i)}=\tau^{(i)}(z)=\int_\Delta t^i \exp\left(-\left(t_i z+\frac{2}{3}t_i^3\right)\right)dt$ とする. もちろん, 量子 $\mathrm{P_{VI}}$, 量子 $\mathrm{P_{VI}}$, 量子 $\mathrm{P_{IV}}$, 量子 $\mathrm{P_{III}}$ も $\kappa=1$ のとき, 直交多項式を解に持つ. 重み関数はそれぞれ, Gauss の超幾何関数, Kummer の合流型超幾何関数, Hermite-Weber 関数, Bessel 関数の積分表示の被積分関数である.

$\Phi_m(z,x)$ の行列式表示 $P_m(z,x)$ をみれば, x^m の係数が $\mathrm{P_{II}}$ のタウ関数になっていることがわかる. 実は $\kappa=1$ のときは Painlevé 方程式と量子 Panlevé 方程式には直接的な関係がある. それを次で説明する.

1.4 モノドロミー保存変形

Painlevé 方程式が 2 階の線形微分方程式のモノドロミー保存変形から得られることはよく知られている. Suleimanov [17] は, Painlevé 方程式を与える線形微分方程式から量子 Painlevé 方程式が導かれることを指摘した. ここでは, $\mathrm{P_{II}}$ を与える線形微分方程式から量子 $\mathrm{P_{II}}$ を導出する.

岡本の「パンルヴェ方程式」[16] によれば, $\mathrm{P_{II}}$ を与える線形微分方程式系は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\left(2x^2+z+\frac{1}{x-\lambda}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(2\alpha x-2H_{\mathrm{II}}+\frac{\mu}{x-\lambda}\right)y=0, \\ &\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{1}{2(x-\lambda)}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\mu}{2(x-\lambda)}y=0 \end{aligned}$$

であった. ここで, $y=y(z,x)$, $\lambda=\lambda(z)$, $\mu=\mu(z)$, $H_{\mathrm{II}}=H_{\mathrm{II}}(\lambda,\mu,z,\alpha)$ としている. 上の 2 つの式から, $1/(x-\lambda)$, $\mu/(x-\lambda)$ を消去することができ,

$$\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(x^2+\frac{z}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}-(\alpha x-H_{\mathrm{II}})y=0$$

を得る. 従って, $d\log\tau(z)/dz=H_{\mathrm{II}}$ を満たすタウ関数 $\tau(z)$ を用いて, $\Psi(z,x)=y(z,x)\tau(z)$ とすれば, $\Psi(z,x)$ は $\kappa=1$ である量子 $\mathrm{P_{II}}$ の解となる.

上記において, 単独線形微分方程式系から量子 $\mathrm{P_{II}}$ を導出したが, もちろん 2 行 2 列の連立 1 階の線形微分方程式から量子 Painlevé 方程式を導出することもできる [15], [24].

2　量子 $\mathrm{P_{II}}$ の対称性

例として, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ の $A_1^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を紹介しよう.

2.1　対称性

$\mathcal{K}$ を生成元 $\hat{q}$, $\hat{p}$, α_0, α_1, z, d と交換関係式

$$\begin{aligned}&[\hat{p},\hat{q}]=1,\quad [d,z]=1,\\ &[\hat{p},\alpha_i]=[\hat{q},\alpha_i]=[z,\alpha_i]=[d,\alpha_i]=0\quad (i=0,1),\\ &[\hat{p},z]=[\hat{q},z]=[\hat{p},d]=[\hat{q},d]=0,\quad [\alpha_0,\alpha_1]=0\end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の斜体とする. (斜体については, 例えば [1] を見よ)

量子 $\mathrm{P_{II}}$ の (対称) Hamiltonian を

$$\widehat{H}_{\mathrm{II}}=\frac{\hat{p}^2}{2}-\hat{q}\hat{p}\hat{q}-\frac{z}{2}\hat{p}-\alpha_1\hat{q}$$

で定める. $\mathrm{P_{II}}$ には $A_1^{(1)}$ 型拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ が Bäcklund 変換として働く. ここで, $\widetilde{W}(A_1^{(1)})=W(A_1^{(1)})\rtimes G$ は $W(A_1^{(1)})=\langle s_0,s_1\rangle$, $G=\langle\pi\rangle$ であり, 基本関係式が

$$s_i^2=1,\quad \pi s_0=s_1\pi,\quad \pi^2=1$$

の無限群である. 量子 $\mathrm{P_{II}}$ には次のように作用する.

命題 2.1 (cf. [8], [13])**.** *$A_1^{(1)}$ 型拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ は $\mathcal{K}$ に次のように作用する.*

x	α_0	α_1	$\hat{q}$	$\hat{p}$	z	d
$s_0(x)$	$-\alpha_0$	$\alpha_1+2\alpha_0$	$\hat{q}+\frac{\alpha_0}{f}$	$\hat{p}+2\hat{q}\frac{\alpha_0}{f}+2\frac{\alpha_0}{f}\hat{q}+2\frac{\alpha_0^2}{f^2}$	z	$d+\frac{\alpha_0}{f}$
$s_1(x)$	$\alpha_0+2\alpha_1$	$-\alpha_1$	$\hat{q}+\frac{\alpha_1}{\hat{p}}$	$\hat{p}$	z	d
$\pi(x)$	α_1	α_0	$-\hat{q}$	$-f$	z	$d-\hat{q}$

ただし, $f=\hat{p}-2\hat{q}^2-z$.

Proof. s_0, s_1, π の $\mathcal{K}$ の生成元への作用が交換関係式を保存することと, 生成元に対して基本関係式を満たすことを示せば良い. どちらも定義から直接計算すれば得られる. □

定理 2.2 (cf. [8], [13]). 双有理変換 s_0, s_1, π は *Hamiltonian* $\widehat{H}_{\mathrm{II}}$ に次のように作用する.

$$s_i(H_{II}) = H_{II} - \delta_{i,0}\frac{\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1)}{f} \quad (i=0,1),$$
$$\pi(H_{II}) = H_{II} + (\alpha_0+\alpha_1)\hat{q}.$$

Proof. 直接計算すれば良い. □

系 2.3. $\alpha_0 + \alpha_1 = -\kappa$ とおく. このとき, 双有理変換 $y \in \{s_0, s_1, \pi\}$ は *Schrödinger* 作用素 $\kappa d - \widehat{H}_{\mathrm{II}}$ を不変に保つ. すなわち

$$y(\kappa d - \widehat{H}_{\mathrm{II}}) = \kappa d - \widehat{H}_{\mathrm{II}}$$

が成り立つ.

Proof. y の d への作用の定義と定理 2.2 から明らか. □

2.2 実現

Hamiltonian $\widehat{H}_{\mathrm{II}}$ の $\hat{q}$, $\hat{p}$ に x, $\partial/\partial x$ を代入したものを $\widehat{H}_{\mathrm{II}}(x, \partial/\partial x, z, \alpha_0, \alpha_1)$ と書く.

定義 2.4. *Schrödinger* 作用素 $\partial/\partial z - \widehat{H}_{\mathrm{II}}(x, \partial/\partial x, z, \alpha_0, \alpha_1)$ に対する変換 R_{s_1}, R_π, R_{s_0} を次で定める.

$$R_{s_1} = \mathcal{L}^{-1}\circ \mathrm{Ad}(x^{-\alpha_1}) \circ \mathcal{L}, \quad R_\pi = (x \mapsto -x) \circ \mathrm{Ad}\left(\exp\left(-\frac{2}{3}x^3 - xz\right)\right),$$
$$R_{s_0} = R_\pi \circ R_{s_1} \circ R_\pi.$$

ここで, $\mathcal{L}$ は x に関する *Laplace* 変換である.

系 2.5 ([13]). $\alpha_0 + \alpha_1 = -\kappa$ であれば, $y \in \{s_0, s_1, \pi\}$ に対して

$$R_y\left(\kappa\frac{\partial}{\partial z} - H_{II}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, \alpha_0, \alpha_1\right)\right) = \kappa\frac{\partial}{\partial z} - H_{II}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, y(\alpha_0), y(\alpha_1)\right) \tag{2}$$

が成り立つ.

Proof. 変換 $\tilde{y}$ を

$$\tilde{y}(\alpha_i) = y(\alpha_i), \quad (i = 0, 1), \quad \tilde{y}(f) = f, \quad f \in \left\{ x, \frac{\partial}{\partial x}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

で定める．このとき, $y = \tilde{y} \circ R_y$ なので, 定理 2.2 と $\tilde{y}^2 = 1$ から (2) を得る． □

変換 R_{s_1} の解に対する変換 $\widetilde{R}_{s_1}$ は, 解 $\Psi(z, x)$ に対して,

$$\widetilde{R}_{s_1} \Psi(z, x) = \int_{\Delta} (x - t)^{\alpha_1 - 1} \Psi(z, t) dt$$

で与えられる．この積分変換は Euler 変換と呼ばれる．(例えば, 河野の本 [6] を見よ．) 積分路 Δ は適切に選ぶ．$\widetilde{R}_\pi$ は

$$\widetilde{R}_\pi = (x \mapsto -x) \circ \exp\left(-\frac{2}{3} x^3 - xz \right)$$

で与えられる．$\widetilde{R}_{s_0}$ は $R_{s_0} = \widetilde{R}_\pi \circ \widetilde{R}_{s_1} \circ \widetilde{R}_\pi$ で与える．このとき, $y \in \{s_0, s_1, \pi\}$ に対して $\widetilde{R}_y$ は解の Bäcklund 変換を与える．すなわち,

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z} - H_{II} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, \alpha_0, \alpha_1 \right) \right) \Psi(z, x) = 0$$

であれば,

$$R_y \left(\kappa \frac{\partial}{\partial z} - H_{II} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, \alpha_0, \alpha_1 \right) \right) \widetilde{R}_y \left(\Psi(z, x) \right) = 0 \tag{3}$$

が成り立つから, 系 2.5 より上の式 (3) は

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z} - H_{II} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, z, y(\alpha_0), y(\alpha_1) \right) \right) \widetilde{R}_y \left(\Psi(z, x) \right) = 0$$

となる．

2.3 積分表示

$\alpha_0+\alpha_1=-\kappa$ とおく. $\alpha_1=-1$ のとき, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ は定数解 1 を持つ. この定数解 1 に $\widetilde{T}=\widetilde{R}_{s_1}\circ\widetilde{R}_\pi$ を n 回作用させて積分表示解を構成する.

定義から

$$\widetilde{T}(1)=\int_\Delta (x-t)^{-\kappa}\exp\left(\frac{2}{3}t^3+tz\right)dt$$

を得る. $\kappa=-1$ であれば, $\widetilde{T}(1)$ は x の一次式となり, Section 1.2 で述べた多項式解と一致する.

もう一度, $\widetilde{T}$ を作用させれば

$$\widetilde{T}\widetilde{T}(1)=\int_\Delta (x-t_2)^{-2\kappa}(-t_2-t_1)^{-\kappa}\exp\left(\frac{2}{3}t_1^3+t_1z\right)\exp\left(\frac{2}{3}t_2^3+t_2z\right)dt_1\wedge dt_2,$$

を得る.

従って, $\widetilde{T}$ を 1 に繰り返し作用させることによって, 次の積分表示解を得る.

命題 2.6 ([13])**.** n を正整数とする. このとき, 積分表示

$$\int_\Delta (x-t_n)^{-n\kappa}\prod_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}+t_i)^{-i\kappa}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{2}{3}t_i^3+t_iz\right)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n$$

は $\alpha_1=-1+(n-1)\kappa$ である量子 $\mathrm{P_{II}}$ の解である. ただし, Δ はツイストサイクルである.

3 量子高階 Painlevé 系の積分表示解

整数 $L\geq 2$, $N\geq 1$ を固定する. 次の Hamiltonian

$$\begin{aligned}\widehat{H}_i =&\frac{1}{z_i}\left(\sum_{n=0}^{L-1}e_nq_n^{(i)}p_n^{(i)}+\sum_{j=0}^{N}\sum_{0\leq m<n\leq L-1}q_m^{(i)}p_m^{(j)}q_n^{(j)}p_n^{(i)}\right.\\&\left.+\frac{1}{z_i-1}\sum_{m,n=0}^{L-1}q_m^{(i)}p_m^{(0)}q_n^{(0)}p_n^{(i)}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{z_j}{z_i-z_j}\sum_{m,n=0}^{L-1}q_m^{(i)}p_n^{(i)}q_n^{(j)}p_m^{(j)}\right)\quad(i=1,\ldots,N)\end{aligned}$$

で定まる Schrödinger 系

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_i}\Psi(z,q)=\widehat{H}_i\left(q,\frac{\partial}{\partial q},z,\alpha\right)\Psi(z,q)\quad(\kappa\in\mathbb{C},\ i=1,\ldots,N)\tag{4}$$

を考える. ここで,

$$
\begin{aligned}
&q_0^{(i)} = \theta_i + \sum_{m=1}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(i)}, \quad p_0^{(i)} = -1 \quad (1 \le i \le N), \\
&q_m^{(0)} = -1, \quad p_m^{(0)} = \kappa_m + \sum_{i=1}^{N} q_m^{(i)} p_m^{(i)}, \quad (1 \le m \le L-1), \\
&q_0^{(0)} = \kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(i)}, \quad p_0^{(0)} = -1
\end{aligned}
$$

であり, $p_n^{(i)} = \partial/\partial q_n^{(i)}$ $(1 \le n \le L-1,\ 1 \le i \le N)$ である. e_n, κ_n, θ_i は複素定数であり関係式

$$
\sum_{n=0}^{L-1} e_n = \frac{L-1}{2}, \quad \sum_{n=0}^{L-1} \kappa_n = \sum_{i=0}^{N} \theta_i.
$$

を満たす.

Hamiltonian $\widehat{H}_i$ は, 木村・岡本 [5] ($L = 1$, $N \ge 1$), 藤・鈴木 [2] ($L = 3$, $N = 1$), 鈴木 [19] ($L \ge 2$, $N = 1$), 津田 (L, N: 一般) [22] により独立に与えられた Hamiltonian の正準量子化の一つである. Hamiltonian $\widehat{H}_i$ $(i = 1, \dots, N)$ はお互いに可換であり, $N = 1$ のとき, $A_{2L-1}^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を持ち, $N \ge 1$ のとき, $A_{L-1}^{(1)} \oplus A_{L-1}^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を持つ. $L = 2$, $N = 1$ のとき, Schrödinger 方程式 (4) は量子 $\mathrm{P_{VI}}$ であり, $D_4^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を持つ [11], [13].

Schrödinger 系 (4) は, $N = 1$ のとき, ゲージ理論のインスタントン分配関数の満たす微分方程式であるという予想が, 山田によって提出されている [23].

Hamiltonian $\widehat{H}_i$ が可換であることから, Schrödinger 系 (4) は両立条件

$$
\left[\kappa\frac{\partial}{\partial z_i} - \widehat{H}_i\left(q, \frac{\partial}{\partial q}\right), \kappa\frac{\partial}{\partial z_j} - \widehat{H}_j\left(q, \frac{\partial}{\partial q}\right)\right] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N)
$$

を満たす.

パラメータが $\kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i = M$ $(M \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ を満たすとき, Schrödinger 系 (4) は正準座標 q に関する次の多項式解

$$
\Psi(z, q) = \sum_{A \in \mathcal{A}_M} c_A(z) q^A,
$$

を持つ．ここで,

$$\mathcal{A}_M = \left\{ A = (A_{m,i}) \in \mathrm{Mat}(L-1, N, \mathbb{Z}_{\geq 0}) \Big| \sum_{m=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{N} A_{m,i} \leq M \right\}$$

であり, $c_A(z)$ は z の関数, q^A は次で定まる単項式

$$q^A = \prod_{m=1}^{L-1} \prod_{i=1}^{N} \left(q_m^{(i)}\right)^{A_{m,i}}$$

である．

古典系は, パラメータが $\kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 0$ を満たすとき, 特殊解として, 一般超幾何関数 ${}_L F_{L-1}$ ($L \geq 2$, $N = 1$) [20] とその一般化 ($L \geq 2$, $N \geq 1$) [21] を用いて表される解を持つ.

量子 $\mathrm{P_{VI}}$ と古典 $\mathrm{P_{VI}}$ はともに Gauss の超幾何関数で表される解を持っていたことを思い出すと, 量子系 (4) も一般超幾何関数を用いて表される解を持つことが期待される．実際, パラメータが $\kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$ を満たすとき, 量子系 (4) は, それらの積分表示を用いて表される解を持つ.

以下で, $\kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$ のときの積分表示解を紹介する．多価関数 $U_1(t)$ を

$$U_1(t) = t_{L-1}^{\alpha_{L-1}} \prod_{n=1}^{L-2} t_n^{\alpha_n - \gamma_{n+1}} \prod_{n=1}^{L-1} (t_{n-1} - t_n)^{\gamma_n - \alpha_n} \prod_{i=1}^{N} (1 - z_i t_{L-1})^{-\beta_i}$$

で定め, 積分表示を

$$\Psi_1(z, q) = \int_\Delta U(t) \left(\varphi_0(t) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{L-1} \varphi_n^{(i)}(t) q_n^{(i)} \right)$$

で定める．ここで, Δ は $U_1(t)$ に対して決まるツイストサイクルであり,

$$\varphi_0(t) = \prod_{n=1}^{L-1} \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{L-1}}{t_{L-1}(t_{n-1} - t_n)}, \quad \varphi_n^{(i)}(t) = \frac{1}{1 - z_i t_{L-1}} \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^{L-1} \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{L-1}}{t_{L-1}(t_{m-1} - t_m)}$$

は [21] によれば, $U_1(t)$ から決まるコホモロジー群の基底である.

定理 3.1 ([14])**.** *適切なパラメータの対応のもとで, 積分表示 $\Psi_1(z, q)$ はパラメータが $\kappa_0 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$ である Schrödinger 系 (4) の解である.*

さらに, $\Psi_1(z,q)$ を一般化することによって, パラメータが $\kappa_0-\sum_{i=1}^{N}\theta_i=M$ $(M\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を満たすとき, Schrödinger 系 (4) の解を構成する. 古典系は $L-1$ 次正方行列からなる 1 階の線形微分方程式のモノドロミー保存変形から得られるので [22], その量子系 (4) は $\mathfrak{sl}_{L-1}$ に対して定まる KZ 方程式と関連するという予想と, 量子 $\mathrm{P_{VI}}$ の超幾何型多項式解を参考にして, 次の積分表示を定める.

多価関数 $U_M(t)$ を

$$U_M(t)=\prod_{\substack{1\leq a<b\leq M,\\ 1\leq n\leq L-1}}\left(t_n^{(a)}-t_n^{(b)}\right)^{2/\kappa}\prod_{\substack{1\leq a,b\leq M,\\ 1\leq n\leq L-2}}\left(t_n^{(a)}-t_{n+1}^{(b)}\right)^{-1/\kappa}$$
$$\times\prod_{a=1}^{M}\left\{\prod_{n=1}^{L-1}\left(t_n^{(a)}\right)^{\alpha_n}\prod_{i=1}^{N}\left(1-z_i t_{L-1}^{(a)}\right)^{-\beta_i}\left(1-t_1^{(a)}\right)^{-\gamma_1}\right\}$$

で定め, 積分表示を

$$\Psi_M(z,q)=\int_{\Delta}U_M(t)\ \mathcal{A}\left[\prod_{a=1}^{M}\left(\varphi_0(t^{(a)})-\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{L-1}\varphi_n^{(i)}(t^{(a)})q_n^{(i)}\right)\right]$$

で定める. ここで, $\mathcal{A}[f(t)]$ は有理関数 $f(t)$ の反対称化であり,

$$\mathcal{A}[f(t)]=\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{L-1}\in\mathfrak{S}_M}\mathrm{sgn}(\sigma_1)\cdots\mathrm{sgn}(\sigma_{L-1})$$
$$\times f\left(t_1^{(\sigma_1(1))},\ldots,t_{L-1}^{(\sigma_{L-1}(1))},\ldots,t_1^{(\sigma_1(M))},\ldots,t_{L-1}^{(\sigma_{L-1}(M))}\right)$$

で与えられる. ただし, $\mathfrak{S}_M$ は M 次の対称群である. また, Δ は $U_M(t)$ から決まるツイストサイクルである.

積分変数 $t_n^{(a)}$ が $\mathfrak{sl}_{L-1}$ の単純ルート α_n に対応していて, $U_M(t)$ の定義式の一行目の積のべき乗の値は α_n 達の内積に対応している. $U_M(t)$ は対称群 $\mathfrak{S}_M$ の $L-1$ 個の直積 $\mathfrak{S}_M^{L-1}$ の作用でスカラーを除いて不変である. すなわち, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{L-1})\in\mathfrak{S}_M^{L-1}$ に対して, ある $\alpha\in\mathbb{C}$ があって,

$$U_M(t)=\alpha U_M\left(t_1^{(\sigma_1(1))},\ldots,t_{L-1}^{(\sigma_{L-1}(1))},\ldots,t_1^{(\sigma_1(M))},\ldots,t_{L-1}^{(\sigma_{L-1}(M))}\right)$$

が成り立つ. $U_M(t)$ は $U_1(t)$ の M 個の直積から, $\mathfrak{S}_M^{L-1}$ の作用で不変になるために, いくつかの項を除いて構成されている.

定理 3.2 ([14])**.** *適当なパラメータの対応のもとで, 積分表示 $\Psi_M(z,q)$ はパラメータが $\kappa_0-\sum_{i=1}^{N}\theta_i=M$ である Schrödinger 系 (4) の解である.*

References

[1] J. Björk, Rings of Differential Operators, North-Holland Publishing Company, 1979

[2] K. Fuji and T. Suzuki, Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevśystems, Funkcial. Ekvac. 53 (2010), 143–167

[3] K. Hasegawa, Quantizing the Bäcklund transformations of Painlev equations and the quantum discrete Painlev VI equation, *Adv. Stud. Pure Math.* **61** (2011) to appear

[4] M. Jimbo, H. Nagoya and J. Sun, Remarks on the confuent KZ equation for $\mathfrak{sl}_2$ and quantum Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008)

[5] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systema, *J. Math. Pures Appl.* 63, 129–146 (1984)

[6] M. Kohno, Global Analysis in Linear Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, (1999)

[7] G. Kuroki, Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems, *Adv. Stud. Pure Math.* **61** (2011) to appear

[8] H. Nagoya, Quantum Painlevé Systems of Type $A_l^{(1)}$, *Int. J. Math.* **15** (2004), 1007–1031

[9] H. Nagoya, Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators, *Int. J. Math.* **18** (2007), no. 7, 839–868

[10] H. Nagoya, Quantization of differential systems with the affine Weyl group symmetries of type $C_N^{(1)}$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 15, (2008), 493–519

[11] H. Nagoya, A quantization of the sixth Painlevé equation, Noncommutativity and singularities, 291–298, *Adv. Stud. Pure Math.* **55** *Math. Soc. Japan, Tokyo* (2009)

[12] H. Nagoya, Hypergeometric solutions to Schrödinger equations for the quantum Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **52** (2011)

[13] H. Nagoya, Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations and the Knizhnik-Zamolodchikov equations, in preparation

[14] H. Nagoya, Integral formulas and affine Weyl group symmetries for quantum isomonodromy deformations, in preparation

[15] D. P. Novikov, The 2×2 matrix schlesinger system and the Belavin—Polyakov—Zamolodchikov system, *Theor. Math. Phys.* **161** (2) 1485–1496 (2009)

[16] 岡本 和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009

[17] B. I. Suleimanov, The Hamiltonian structure of Painlevé equations and the method of isomonodromic deformations, *Differential Equations* **30** 726–732 (1994).

[18] G. Szegö, Orthogonal polynomials, *AMS Colloquium publications* **23** (1939)

[19] T. Suzuki, A class of higher order Painleve systems arising from integrable hierarchies of type A, arXiv:1002.2685

[20] T. Suzuki, A Particular Solution of a Painlevé System in Terms of the Hypergeometric Function ${}_{n+1}F_n$, *SIGMA* 6 (2010), 078, 11 pages

[21] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, *Q. J. Math.* (2010)

[22] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, arXiv:1007.3450

[23] Y. Yamada, A quantum isomonodromy equation and its application to $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ gauge theories *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011)

[24] A. Zabrodin and A. Zotov, Quantum Painlevé-Calogero Correspondence, arXiv:1107.5672