RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B30 (2012), 223–241

Elementary Cellular Automaton の初期値問題の max-plus 解析
(Max-plus analysis on initial value problem of elementary cellular automaton)

By

池上 貴俊 (Takatoshi Ikegami)*

Abstract

Elementary cellular automata (ECA) are simple binary evolutional systems. We discuss the initial value problem of ECA using the max-plus expression. About half of independent rules of ECA, we give the general solution for arbitrary initial data. The proof about solutions are done by max-plus formulas.

§1. はじめに

Elementary Cellular Automaton (ECA) とは，空間，時間ともに 1 次元で，状態変数が 0, 1 のいずれかであり，ある時刻に隣り合う 3 つの状態変数の値から次の時刻における状態変数の値が決まる時間発展系である．ECA についての研究は，たとえば S.Wolfram による研究が有名で ECA の解の挙動についてクラス分けが行われている．Wolfram は ECA の挙動によって，各ルールを 4 つのクラスに分類し，2 進デジタル系でも解のクラスによるルールの分類が可能であることを示した [1].

可積分系分野では，西成らが超離散化によって ECA のルール 184 が Burgers 方程式と関連することを示し，max-plus 表現をもちいた相転移現象の解析を行った [2, 3]．また逆超離散化と呼ばれる操作により完全離散系である ECA を連続系と関連づける研究もいくつかある [4, 5].

本記事ではすべての ECA のルールに対してその初期値問題を max-plus 表現をもちいることによって計算し，max-plus 表現で表された一般解によって漸近挙動が解析できるものを調査した．§2 では，ECA の定義を与え，等価なルールをまとめることによって解析の対象とするルールを列挙する．§3 では，§2 で挙げたすべてのルールに対して，適

Received November 31, 2011. Revised February 16, 2012.
*早稲田大学基幹理工学研究科.
e-mail: mimshoioe(AT)fuji.waseda.jp

当な初期条件より時間発展の数値計算を行い，得られた解の挙動によって解の性質によるルールの分類を行う．そして各分類における代表的なルールを取り上げ，時間発展パターンの例および max-plus 形式によるルールの表現を示す．§4 では，§3 で取り上げたルールについて max-plus 表現による一般解を示し，解であることの証明も行う．§5 では，初期値を実数に拡張して数値計算を行い，求めた一般解が従属変数を実数に拡張してもやはり一般解となっていることを確認する．最後に §6 で結論を述べる．

§ 2. ECA とは

§ 2.1. 一般形の定義

ECA とは，次の時間発展方程式

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{2.1}$$

で表されるものである．ここで j は 1 次元空間の整数座標（サイト）を表し，n は整数時刻を表す．一般性を失わずに初期時刻を 0 とする．関数 $f(a,b,c)$ は a, b, $c \in \{0,1\}$ のときに 0, 1 の値をとるものとする．この定義によって ECA は 256 種類のものが考えられる．それらを区別するために，ルール番号を次の値で定める．

$$\begin{aligned} &f(1,1,1)\times 2^7 + f(1,1,0)\times 2^6 + f(1,0,1)\times 2^5 + f(1,0,0)\times 2^4 \\ &\quad + f(0,1,1)\times 2^3 + f(0,1,0)\times 2^2 + f(0,0,1)\times 2^1 + f(0,0,0)\times 2^0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

なお，それぞれのルールを区別するため (2.1) の f にルール番号の添え字をつけて f_{184} のように表すことにする．

§ 2.2. 等価なルール

ECA のルールは 256 種類あるが，あるルールの解から別のルールの解を得る単純な変換が存在し，この変換によりいくつかのルールをセットとして同一視することができる [1]．たとえばルール番号 k と l を定義する関数が

$$f_k(a,b,c) = f_l(c,b,a) \qquad (a,b,c) \in \{0,1\} \tag{2.3}$$

を満たすとき，2 つのルールは reflection（反射）の関係であるといい，解はお互いに変換することができるので等価なルールとみなす．次に

$$f_k(a,b,c) = 1 - f_l(1-a, 1-b, 1-c) \qquad (a,b,c) \in \{0,1\} \tag{2.4}$$

を満たすとき，2 つのルールは conjugation（共役）の関係であるといい，やはり等価とみなす．また，2 つの時間発展方程式が

$$f_k(a,b,c) = f_l(b,c,d) \qquad (a,b,c,d) \in \{0,1\} \tag{2.5}$$

を満たすとき，2 つのルールは j をずらすガリレイ変換によって同一視できる．他にもルール 10 にもちいられる関数 $f_{10}(a,b,c)$ とルール 12 にもちいられる関数 $f_{12}(a,b,c)$ は

$$f_{10}(a,b,c) = f_{12}(a,c,d) \qquad (a,b,c,d) \in \{0,1\} \tag{2.6}$$

を満たす．これらは，ガリレイ変換を行い，ルール 10 の時間発展方程式を偶数，奇数サイトに分離することでルール 12 の時間発展方程式と同一視することができる．以上をもちいると，256 種類であったルールは以下に示す独立な 81 種類のルールに帰着させることができる．

0	1	2	3	4	6	7	8	9
11	12	13	14	15	18	19	22	23
24	25	26	27	28	29	30	32	33
35	36	37	38	40	41	42	43	44
45	46	50	54	56	57	58	60	62
72	73	74	76	77	78	94	104	105
106	108	110	122	126	128	130	132	134
136	138	140	142	146	150	152	154	156
162	164	168	170	172	178	184	200	232

Table 1. 独立な 81 種類のルール番号

§3. ECA の解のふるまいによる分類

この節では，時間発展の数値計算および次節で示す一般解をもちいて，前節の 81 個のルールをその解のふるまいによって分類する．以下ではそれぞれの分類で代表的なルールをひとつ取り上げ，時間発展ルールの max-plus 表現，適当な初期値からの数値計算による解のパターンを示している．なお，解のパターンの図では，黒いセルが 1，白いセルが 0 を表し，空間軸 j を右向きを正の方向に，時間軸 n を下向きを正の方向としている．また，空間方向の境界条件として周期境界条件をもちいている．図の一番上の段にあるセルが $n=0$ の初期値である．なお，一般解を max-plus 表現できてないものについても，数値計算から仮の分類を予想してふりわけている．

§3.1. $n=1$ で定数になるもの

$n=1$，すなわち図においては上から 2 番目の行から初期値によらずすべてのセルが定数，つまり 0, 1 の一方だけになるものである．独立したルールの中では，ルール 0 のみがここに該当し，その時間発展方程式は次式で与えられる．

$$u_j^{n+1} = 0. \tag{3.1}$$

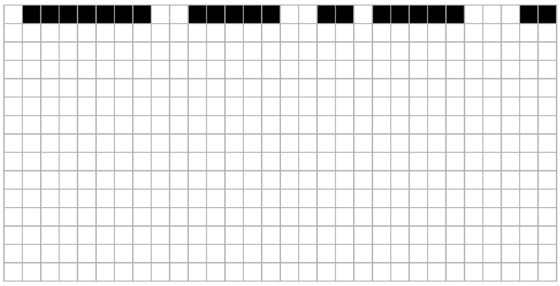

Figure 1. ルール 0 の時間発展の様子

§ 3.2. $n=1$ で定常になるもの

$n=1$ から初期値によらず $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$, u_j^n, u_{j+1}^n のいずれかが成り立つものである．たとえばルール 12

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_j^n). \tag{3.2}$$

がこれに該当する．

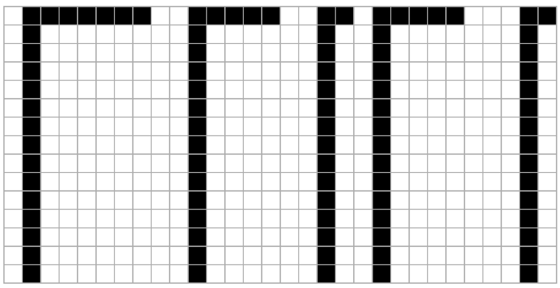

Figure 2. ルール 12 の時間発展の様子

独立したルールの中では，ルール 2, 4, 12, 42, 76, 170, 200 がここに分類される．これらルールはすべて一般解の max-plus 表現がえられている．

§3.3. $n=1$ で 2 周期解になるもの

$n=1$ から $u_j^{n+2}=u_{j-2}^n$, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n のいずれかが成り立つものである．たとえばルール 1

$$u_j^{n+1}=\min(1-u_{j-1}^n,1-u_j^n,1-u_{j+1}^n). \tag{3.3}$$

がこれに該当する．

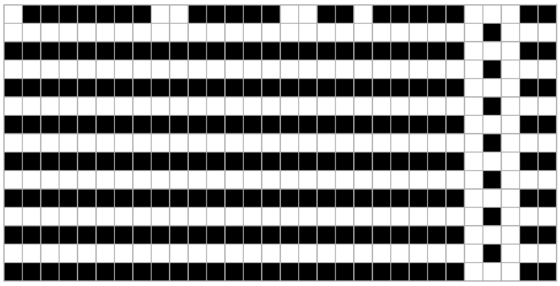

Figure 3. ルール 1 の時間発展の様子

独立したルールの中では，ルール 1, 3, 15, 29 が一般解を max-plus 表現にすることができて，ここに分類されることがわかっている．また，ルール 27, 35, 38 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

§3.4. $n=2$ で定数になるもの

$n=2$ から初期値によらずすべてのセルが定数，つまり 0, 1 の一方だけになるものである．独立したルールの中では，ルール 8

$$u_j^{n+1}=\min(1-u_{j-1}^n,u_j^n,u_{j+1}^n). \tag{3.4}$$

のみがこれに該当する．

§3.5. $n=2$ で定常になるもの

$n=2$ から初期値によらず $u_j^{n+1}=u_{j-1}^n$, u_j^n, u_{j+1}^n のいずれかが成り立つものが分類される．たとえばルール 36

$$u_j^{n+1}=\min(\max(u_j^n,\min(u_{j-1}^n,u_{j+1}^n)),\max(1-u_j^n,\min(1-u_{j-1}^n,1-u_{j+1}^n))). \tag{3.5}$$

がこれに該当する．

独立したルールの中では，ルール 36 だけが一般解を max-plus 表現できた．ルール 24, 46,

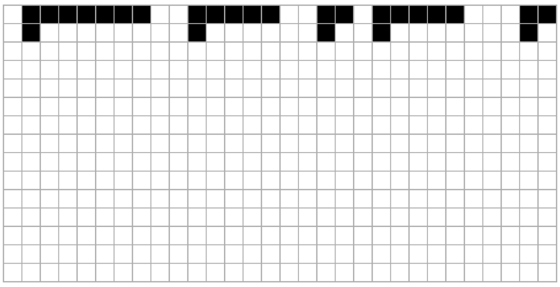

Figure 4. ルール 8 の時間発展の様子

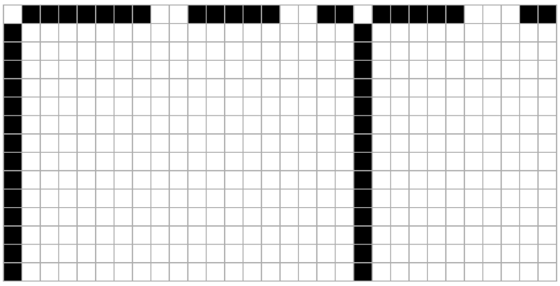

Figure 5. ルール 36 の時間発展の様子

72 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

§ 3.6. $n = 2$ で 2 周期解になるもの

$n = 2$ から初期値によらず $u_j^{n+2} = u_{j-2}^n$, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n のいずれかが成り立つものである．たとえばルール 19

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_j^n, \max(1 - u_{j-1}^n, 1 - u_{j+1}^n)). \tag{3.6}$$

がこれに該当する．
独立したルールの中では，ルール 19 だけが一般解を max-plus 表現にすることができた．また，ルール 108 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

§ 3.7. 初期値に依存する有限ステップで定数になるもの

ある時刻 n からすべてのセルが定数，つまり 0, 1 の一方だけになるが，初期値によってその時刻が変わるものである．たとえばルール 128

$$u_j^{n+1} = \min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \tag{3.7}$$

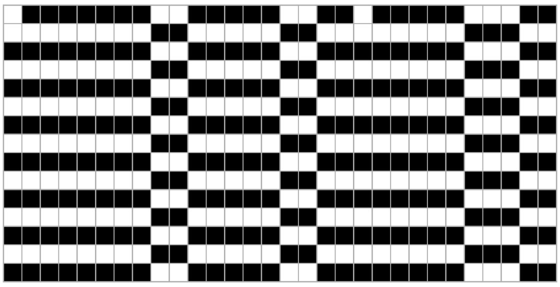

Figure 6. ルール 19 の時間発展の様子

がこれに該当する．

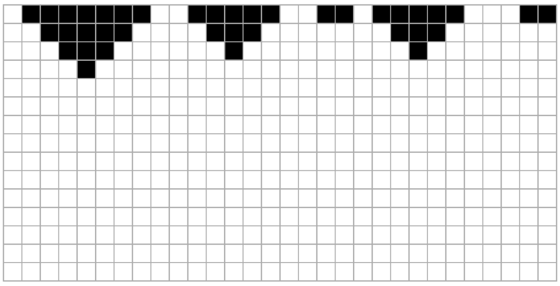

Figure 7. ルール 128 の時間発展の様子

独立したルールの中では，ルール 32, 128, 136, 168 が一般解を max-plus 表現にすることができて，ここに分類される．また，ルール 40 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

なおルール 32, 40, 168 は初期値が $\cdots 010101 \cdots$ という特別な場合のみ，チェッカーボードパターンを生み出すことを注意しておく．

§ 3.8. 初期値に依存する有限ステップで定常になるもの

ある時刻 n からすべてのセルにおいて $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n,\ u_j^n,\ u_{j+1}^n$ のいずれかが成り立ち，その時刻が初期値によって変わるものである．たとえばルール 140

$$u_j^{n+1} = \min(u_j^n, \max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)). \tag{3.8}$$

がこれに該当する．

独立したルールの中では，ルール 13, 77, 138, 140, 162, 184, 232 が一般解を max-plus 表現にすることができ，ここに分類される．また，ルール 14, 44, 56, 57, 78, 104, 130, 132, 152, 164, 172 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

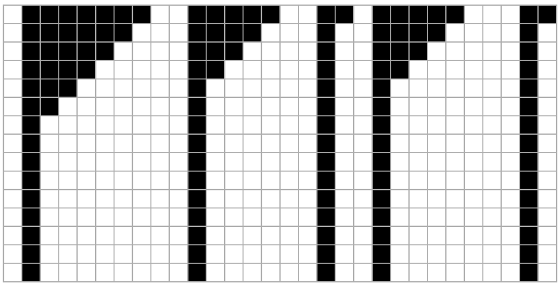

Figure 8. ルール 140 の時間発展の様子

§3.9. 初期値に依存する有限ステップで 2 周期解になるもの

ある時刻 n からすべてのセルにおいて $u_j^{n+2} = u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n$ のいずれかが成り立ち，その時刻が初期値によって変わるものである．たとえばルール 7

$$u_j^{n+1} = \min(u_j^n, \max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)). \tag{3.9}$$

がこれに該当する．

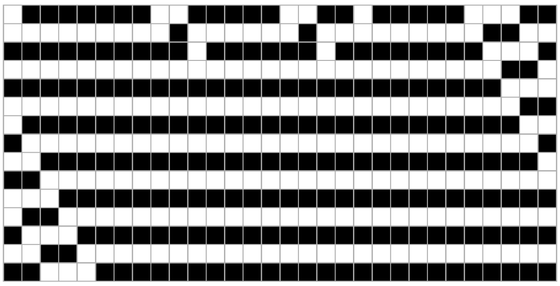

Figure 9. ルール 7 の時間発展の様子

独立したルールの中では，ルール 7, 23, 50, 178 が一般解を max-plus 表現にすることができて，ここに分類される．また，ルール 6, 9, 11, 25, 26, 28, 33, 37, 43, 58, 74, 94, 134, 142, 156 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．

§3.10. その他

今までの分類に属さないもの，すなわち特別な初期状態を除いて，解が十分大きい n においても 2 周期以下の周期解とならないものである．たとえばルール 60

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_j^n), \max(1 - u_{j-1}^n, 1 - u_j^n)). \tag{3.10}$$

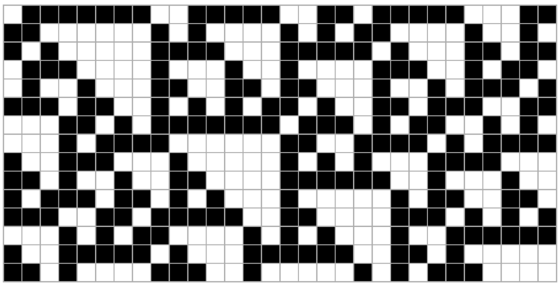

Figure 10. ルール 60 の時間発展の様子

がこれに該当する．
独立したルールの中では，ルール 60, 105, 150 が一般解を max-plus 表現にすることができて，ここに分類される．また，ルール 18, 22, 30, 41, 45, 54, 62, 73, 106, 110, 122, 126, 146, 154 は一般解の表現はできていないが，多くの初期状態を数値計算することにより，ここに分類されると予想している．ただし，ルール番号によって解の一般的ふるまいが大きく変わり，この分類は現時点では解の挙動を解析できないものも多く含まれていることを注意しておく．

なお，ルール 60 の時間発展方程式 (3.10) は u の値を 0, 1 に限定すると排他的論理和 ($\oplus$)

$$0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0. \tag{3.11}$$

に帰着することが容易にわかる．また以下の性質を満たしている．

$$A \oplus B = B \oplus A \tag{3.12}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \tag{3.13}$$

$$A \oplus A \oplus A = A \tag{3.14}$$

$$1 - (A \oplus B) = (1 - A) \oplus B = A \oplus (1 - B) \tag{3.15}$$

(3.12), (3.13) によって $\oplus$ が線形演算子となり，解の重ね合わせが可能となる．

§4. ECA の max-plus 表現による一般解

ここでは，先に行った分類からいくつかを取り上げ，その代表例について一般解を示し，解の証明を行う．以下では煩雑さを避けるため，初期値 u_j^0 の時刻を省略して u_j と書くことにする．

§ 4.1. $n=1$ で定数になるもの

ルール 0 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1}=0, \tag{4.1}$$

であり,

$$u_j^n=0, \tag{4.2}$$

が一般解となることは自明である.

§ 4.2. $n=1$ で定常になるもの

ルール 12 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1}=\min(1-u_{j-1}^n, u_j^n), \tag{4.3}$$

である．一般解が

$$u_j^n=\min(1-u_{j-1}, u_j), \tag{4.4}$$

となることを証明する．(4.3) をもちいて u_j^{n+2} を計算すると

$$\begin{aligned} u_j^{n+2} &= \min(1-u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}) \\ &= \min(1-\min(1-u_{j-2}^n, u_{j-1}^n), \min(1-u_{j-1}^n, u_j^n)) \end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．ここで $\min(A,B)=-\max(-A,-B)$ より

$$u_j^{n+2}=\min(1+\max(u_{j-2}^n-1, -u_{j-1}^n), 1-u_{j-1}^n, u_j^n), \tag{4.6}$$

が得られる．さらに，$\max(A,B)+C=\max(A+C,B+C)$ より

$$u_j^{n+2}=\min(\max(u_{j-2}^n, 1-u_{j-1}^n), 1-u_{j-1}^n, u_j^n), \tag{4.7}$$

となる．ここで，$\max(u_{j-2}^n, 1-u_{j-1}^n)$ と $1-u_{j-1}^n$ を比較すると，$\max(u_{j-2}^n, 1-u_{j-1}^n)\geq 1-u_{j-1}^n$ が成り立つ．この 2 つが min に含まれているので，$\max(u_{j-2}^n, 1-u_{j-1}^n)$ が消去できる．よって

$$u_j^{n+2}=\min(1-u_{j-1}^n, u_j^n)=u_j^{n+1}. \tag{4.8}$$

これより $n\geq 1$ で $u_j^{n+1}=u_j^n$ が成り立つから，一般解は

$$u_j^n=u_j^1=\min(1-u_{j-1}, u_j). \tag{4.9}$$

§4.3. $n=1$ で 2 周期解になるもの

ルール 1 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(1-u_{j-1}^n, 1-u_j^n, 1-u_{j+1}^n), \tag{4.10}$$

である．この一般解が

(4.11)
$$\begin{aligned}
&u_j^{2m-1} = \min(1-u_{j-1}, 1-u_j, 1-u_{j+1}),\\
&u_j^{2m} = \min(\max(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j), \max(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \max(u_j, u_{j+1}, u_{j+2})) \quad (m \geq 1),
\end{aligned}$$

となることを証明する．まず次の等式

$$\max(u_{j-1}^{n+2}, u_j^{n+2}, u_{j+1}^{n+2}) = \max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{4.12}$$

が成り立つことを示す．(4.10) をもちいて (4.12) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\max(u_{j-1}^{n+2}, u_j^{n+2}, u_{j+1}^{n+2}) = \max(&\min(1-u_{j-2}^{n+1}, 1-u_{j-1}^{n+1}, 1-u_j^{n+1}),\\
&\min(1-u_{j-1}^{n+1}, 1-u_j^{n+1}, 1-u_{j+1}^{n+1}),\\
&\min(1-u_j^{n+1}, 1-u_{j+1}^{n+1}, 1-u_{j+2}^{n+1}))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

が得られる．ここで $\max(\min(A,B),\min(A,C)) = \min(A,\max(B,C))$ より次式の変形が可能となる．

(4.14)
$$\begin{aligned}
\max(u_{j-1}^{n+2}, u_j^{n+2}, u_{j+1}^{n+2}) &= \min(1-u_j^{n+1}, \max(\min(1-u_{j-2}^{n+1}, 1-u_{j-1}^{n+1}),\\
&\qquad\qquad \min(1-u_{j-1}^{n+1}, 1-u_{j+1}^{n+1}),\\
&\qquad\qquad \min(1-u_{j+1}^{n+1}, 1-u_{j+2}^{n+1})))\\
&= \min(\max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \max(\min(\max(u_{j-3}^n, u_{j-2}^n, u_{j-1}^n),\\
&\qquad\qquad \max(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)),\\
&\qquad\qquad \min(\max(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n),\\
&\qquad\qquad \max(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n)),\\
&\qquad\qquad \min(\max(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n),\\
&\qquad\qquad \max(u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, u_{j+3}^n))))\\
&= \min(\max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \max(\underline{u_{j-1}^n}, \min(\max(u_{j-3}^n, u_{j-2}^n), \max(u_{j-2}^n, u_j^n)),\\
&\qquad\qquad \underline{u_j^n}, \min(\max(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n), \max(u_{j+1}^n, u_{j+2}^n)),\\
&\qquad\qquad \underline{u_{j+1}^n}, \min(\max(u_j^n, u_{j+2}^n), \max(u_{j+2}^n, u_{j+3}^n)))).
\end{aligned}$$

この式の最右辺の min 中の第 2 項の max は下線部のようにその中に u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n をすべて含むので，第 1 項の $\max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$ 以上である．よって (4.12) が成り立つ．次に u_j^1 を計算すると

$$\begin{aligned} u_j^1 =& \min(1-u_{j-1}, 1-u_j, 1-u_{j+1}) \\ =& 1-\max(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる．ここで (4.12) をもちいれば

$$\begin{aligned} u_j^1 =& 1-\max(u_{j-1}^2, u_j^2, u_{j+1}^2) \\ =& \min(1-u_{j-1}^2, 1-u_j^2, 1-u_{j+1}^2) = u_j^3 \end{aligned} \tag{4.16}$$

が得られる．よって，$m \geq 1$ のとき $u_j^{2m+1} = u_j^{2m-1}$ である．また，u_j^2 を計算すると次式のように評価できる．

$$\begin{aligned} u_j^2 =& \min(1-u_{j-1}^1, 1-u_j^1, 1-u_{j+1}^1) \\ =& \min(\max(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j), \max(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \max(u_j, u_{j+1}, u_{j+2})). \end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで (4.12) をもちいれば

$$u_j^2 = \min(\max(u_{j-2}^2, u_{j-1}^2, u_j^2), \max(u_{j-1}^2, u_j^2, u_{j+1}^2), \max(u_j^2, u_{j+1}^2, u_{j+2}^2)) = u_j^4. \tag{4.18}$$

よって，$m \geq 1$ のとき $u_j^{2m+2} = u_j^{2m}$．以上より，一般解は (4.15)，(4.17) の形で表される．

§ 4.4. $n = 2$ で定数になるもの

ルール 8 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(1-u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \tag{4.19}$$

で与えられる．その一般解が

$$u_j^n = \min(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+n-2}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_{j+n}) \tag{4.20}$$

となることを証明する．$n = 1$ のときは (4.19) より

$$u_j^1 = \min(1-u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \tag{4.21}$$

であるから成り立つ．$n = k$ のとき (4.20) が成立するとして，u_j^{k+1} を計算すると

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} &= \min(1-u_{j-1}^k, u_j^k, u_{j+1}^k) \\ &= \min(1-\min(1-u_{j-2}, 1-u_{j-1}, \cdots, 1-u_{j+k-3}, u_{j-1}, u_j, \cdots, u_{j+k-1}), \\ &\qquad 1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+k-2}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_{j+k}, \\ &\qquad 1-u_j, 1-u_{j+1}, \cdots, 1-u_{j+k-1}, u_{j+1}, u_{j+2}, \cdots, u_{j+k+1}) \\ &= \min(\max(u_{j-2}, u_{j-1}, \cdots, u_{j+k-3}, 1-u_{j-1}, \underline{1-u_j}, \cdots, 1-u_{j+k-1}), \\ &\qquad 1-u_{j-1}, \underline{\underline{1-u_j}}, \cdots, 1-u_{j+k-2}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_{j+k}, \\ &\qquad \underline{\underline{1-u_j}}, 1-u_{j+1}, \cdots, 1-u_{j+k-1}, u_{j+1}, u_{j+2}, \cdots, u_{j+k+1}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

となる．ここで，最右辺に含まれている max は下線部のように $1-u_j$ を含むため，$1-u_j$ 以上である．一方，最右辺の min の中に二重下線で示す $1-u_j$ がやはり含まれるので，max の部分を消去できる．よって次式が得られる．

$$u_j^{k+1} = \min(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+k-1}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_{j+k+1}) \tag{4.23}$$

よって $n=k+1$ でも (4.20) は成立するため，(4.20) は一般解である．特に初期値 u_j を任意の j で 0, 1 に限定するとき，$n \geq 2$ で u_j^n は u_j, $1-u_j$ を含むため，$u_j^n = 0$ となる．

§ 4.5. $n=2$ で定常になるもの

ルール 36 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_j^n, \min(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)), \max(1-u_j^n, \min(1-u_{j-1}^n, 1-u_{j+1}^n))). \tag{4.24}$$

であり，その一般解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
u_j^1 &= \min(\max(u_j, \min(u_{j-1}, u_{j+1})), \max(1-u_j, \min(1-u_{j-1}, 1-u_{j+1})))\\
u_j^m &= \min(\max(u_j, \min(u_{j-1}, u_{j+1})), \max(1-u_j, \min(1-u_{j-1}, 1-u_{j+1})),\\
&\qquad \max(1-u_{j-1}, u_j, 1-u_{j+1}, \min(u_{j-2}, u_{j+2})),\\
&\qquad \max(u_{j-1}, 1-u_j, u_{j+1}, \min(1-u_{j-2}, 1-u_{j+2})),\\
&\qquad \max(u_{j-1}, 1-u_{j-1}, u_{j+1}, 1-u_{j+1})) \quad (m \geq 2).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

一般解の証明は，これまでと同様に max-plus 表現の公式をもちいてできる．

§ 4.6. $n=2$ で 2 周期解になるもの

ルール 19 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(1-u_j^n, \max(1-u_{j-1}^n, 1-u_{j+1}^n)). \tag{4.26}$$

であり，その一般解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
u_j^1 &= \min(1-u_j, \max(1-u_{j-1}, 1-u_{j+1})),\\
u_j^{2m} &= \min(\max(u_{j-1}, u_j), \max(u_j, u_{j+1}),\\
&\qquad \max(u_{j-2}, u_{j-1}, u_{j+1}, u_{j+2})),\\
u_j^{2m+1} &= \max(\min(1-u_{j-1}, 1-u_j), \min(1-u_j, 1-u_{j+1}),\\
&\qquad \min(1-u_{j-2}, 1-u_{j-1}, 1-u_{j+1}, 1-u_{j+2})) \quad (m \geq 1).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

一般解の証明は，これまでと同様に max-plus 表現の公式をもちいてできる．

§4.7. 初期値に依存する有限ステップで定数になるもの

ルール 128 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \tag{4.28}$$

であり，その一般解は次式で与えられる．

$$u_j^n = \min(u_{j-n}, u_{j-n+1}, \cdots, u_{j+n}). \tag{4.29}$$

一般解の証明は，これまでと同様に max-plus 表現の公式をもちいてできる．空間方向に周期境界条件を課するなら，一般解は十分大きい n で一定の値となる．

§4.8. 初期値に依存する有限ステップで定常になるもの

ルール 140 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(u_j^n, \max(1-u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)). \tag{4.30}$$

であり，一般解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} u_j^n = \min(&\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+n-3}, 1-u_{j+n-2}, u_{j+n}),\\ &\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+n-3}, u_{j+n-1}),\\ &\cdots,\\ &\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, u_{j+2}), \max(1-u_{j-1}, u_{j+1}), u_j). \end{aligned} \tag{4.31}$$

これが一般解であることを証明する．$n=1$ のときは (4.30) より

$$u_j^1 = \min(u_j, \max(1-u_{j-1}, u_{j+1})) \tag{4.32}$$

であるから成り立つ．$n=k$ のとき (4.31) が成立するとして，u_j^{k+1} を計算すると

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} &= \min(u_j^k, \max(1-u_{j-1}^k, u_{j+1}^k))\\ &= \min\Big(u_j^k, \max\Big(\min(u_{j-2}, u_{j-1}, \cdots, u_{j+k-4}, u_{j+k-3}, 1-u_{j+k-1}),\\ &\qquad \min(u_{j-2}, u_{j-1}, \cdots, u_{j+k-4}, 1-u_{j+k-2}),\\ &\qquad \cdots,\\ &\qquad \min(u_{j-2}, u_{j-1}, 1-u_{j+1}), \min(u_{j-2}, 1-u_j), 1-u_{j-1}),\\ &\qquad \min\big(\max(1-u_j, 1-u_{j+1}, \cdots, 1-u_{j+k-2}, 1-u_{j+k-1}, u_{j+k+1}),\\ &\qquad\quad \max(1-u_j, 1-u_{j+1}, \cdots, 1-u_{j+k-2}, u_{j+k}),\\ &\qquad\quad \cdots,\\ &\qquad\quad \max(1-u_j, 1-u_{j+1}, u_{j+3}), \max(1-u_j, u_{j+2}), u_{j+1})\big)\Big)\Big). \end{aligned} \tag{4.33}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
&\min\Big(\max\big(a,\min(s_1,t_1),\min(s_2,t_2),\cdots,\min(s_n,t_n),\\
&\qquad\qquad\min(\max(b,t_1,t_2,\cdots,t_n),r_1,r_2,\cdots,r_m)\big),\\
&\qquad\max(a,r_1),\max(a,r_2),\cdots,\max(a,r_m)\Big)\\
&=\min\big(\max(a,b,t_1,t_2,\cdots,t_n),\max(a,r_1),\max(a,r_2),\cdots,\max(a,r_m)\big)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

が成り立つことを示す．そのために，まず

$$\min(\max(a,\min(b,c),d),\max(a,b))=\min(\max(a,c,d),\max(a,b)) \tag{4.35}$$

が成り立つことを確認する．$\max(\min(A,B),C)=\min(\max(A,C),\max(B,C))$ をもちいて (4.35) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\min\Big(\max\big(a,\min(b,c),d\big),\max(a,b)\Big)&=\min\big(\max(a,b,d),\max(a,c,d),\max(a,b)\big)\\
&=\min(\max(a,c,d),\max(a,b))
\end{aligned} \tag{4.36}$$

より (4.35) は成り立つ．これを繰り返しもちいて (4.34) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&\min\Big(\max\big(a,\min(s_1,t_1),\min(s_2,t_2),\cdots,\min(s_n,t_n),\\
&\qquad\qquad\min(\max(b,t_1,t_2,\cdots,t_n),r_1,r_2,\cdots,r_m)\big),\\
&\qquad\max(a,r_1),\max(a,r_2),\cdots,\max(a,r_m)\Big)\\
&=\min\Big(\max\big(a,\min(s_1,t_1),\min(s_2,t_2),\cdots,\min(s_n,t_n),b,t_1,t_2,\cdots,t_n\big),\\
&\qquad\max(a,r_1),\max(a,r_2),\cdots,\max(a,r_m)\Big)\\
&=\min\big(\max(a,b,t_1,t_2,\cdots,t_n),\max(a,r_1),\max(a,r_2),\cdots,\max(a,r_m)\big)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

となり，よって (4.34) は成り立つ．これを (4.33) にうまくあてはめれば

$$u_j^{k+1}=\min(u_j^k,\max(1-u_{j-1},1-u_j,1-u_{j+1},\cdots,1-u_{j+k-2},1-u_{j+k-1},u_{j+k+1})) \tag{4.38}$$

より $n=k+1$ でも (4.31) は成立するため，(4.31) は (4.30) の一般解である．

§4.9. 初期値に依存する有限ステップで 2 周期解になるもの

ルール 7 の時間発展方程式は

$$u_j^{n+1}=\min(u_j^n,\max(1-u_{j-1}^n,u_{j+1}^n)). \tag{4.39}$$

であり，一般解は次式で与えられる．

(4.40)

$$
\begin{aligned}
u_j^{2m-1} = 1 - \max(\, & \min(u_{j-1}, u_{j-3}, \cdots, u_{j-2m+1}),\\
& \min(u_{j+1}, u_j, u_{j-3}, u_{j-5}, u_{j-7}, \cdots, u_{j-2m+5}, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+1}),\\
& \min(u_j, u_{j-1}, u_{j-4}, u_{j-6}, u_{j-8}, \cdots, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+4}, u_{j-m+3}, u_{j-m}, u_{j-m-2}), \min(u_{j-m+3}, u_{j-m+2}, u_{j-m-1}),\\
& \min(u_{j-2}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m+6}, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}, u_{j-2m+1}),\\
& \min(u_{j-3}, u_{j-5}, u_{j-7}, \cdots, u_{j-2m+5}, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+2}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+1}, u_{j-m-1}, u_{j-m-2}), \min(u_{j-m}, u_{j-m-1}),\\
& \min(u_{j+1}, u_j, u_{j-2}, u_{j-4}, \cdots, u_{j-2m+6}, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}),\\
& \min(u_j, u_{j-1}, u_{j-3}, u_{j-5}, \cdots, u_{j-2m+5}, u_{j-2m+3}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+3}, u_{j-m+2}, u_{j-m}), \min(u_{j-m+2}, u_{j-m+1}), \min(u_{j-m+1}, u_{j-m})),\\
u_j^{2m} = \max(\, & \min(u_j, u_{j-2}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m}),\\
& \min(u_{j+2}, u_{j+1}, u_{j-2}, u_{j-4}, \cdots, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}, u_{j-2m}),\\
& \min(u_{j+1}, u_j, u_{j-3}, u_{j-5}, \cdots, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+1}, u_{j-2m}),\\
& \min(u_j, u_{j-1}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m+2}, u_{j-2m+1}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+3}, u_{j-m+2}, u_{j-m-1}, u_{j-m-2}),\\
& \min(u_j, u_{j-1}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}, u_{j-2m}),\\
& \min(u_{j-1}, u_{j-2}, u_{j-5}, u_{j-7}, \cdots, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+1}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+3}, u_{j-m+2}, u_{j-m-1}, u_{j-m-3}), \min(u_{j-m+2}, u_{j-m+1}, u_{j-m-2}),\\
& \min(u_{j-1}, u_{j-3}, u_{j-5}, \cdots, u_{j-2m+7}, u_{j-2m+5}, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+1}, u_{j-2m}),\\
& \min(u_{j-2}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m+6}, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}, u_{j-2m+1}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+1}, u_{j-m-1}, u_{j-m-2}), \min(u_{j-m}, u_{j-m-1}),\\
& \min(u_j, u_{j-1}, u_{j-3}, u_{j-5}, \cdots, u_{j-2m+7}, u_{j-2m+5}, u_{j-2m+3}, u_{j-2m+1}),\\
& \min(u_{j-1}, u_{j-2}, u_{j-4}, u_{j-6}, \cdots, u_{j-2m+6}, u_{j-2m+4}, u_{j-2m+2}),\\
& \cdots,\\
& \min(u_{j-m+2}, u_{j-m+1}, u_{j-m-1}), \min(u_{j-m+1}, u_{j-m})) \quad (m \geq 1).
\end{aligned}
$$

一般解の証明は，これまでと同様に max-plus 表現の公式をもちいて可能である．

§5. 実数の初期値問題

ここまで，max-plus 表現によって ECA の一般解を表し，解の証明を行ってきた．この解の証明を行うときに，u_j^n が 0, 1 のいずれかであるという条件はもちいていない．よってこれまでに求めた一般解は，初期値が実数値であってもよい．ここでは例として，いくつかの max-plus 表現で表した ECA を，初期値を 0, 1 に限定しない実数にして数値計算し，解の挙動を見る．

§5.1. $n = 1$ で定常になるもの

例としてルール 12 を取り上げる．

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_j^n). \tag{5.1}$$

一般解は

$$u_j^n = \min(1 - u_{j-1}, u_j) \tag{5.2}$$

である．有理数を初期値として時間発展を計算すると次のようになる．各数値は (5.2) の関係を満たしており，u_j^n が 0, 1 のときと同じく $n = 1$ 以降で定常解が表れている．

−6.5	−2.7	9.1	−3.5	6.4	1.1	8.8	−3.6	7.9	−4.2
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9
−6.5	−2.7	3.7	−8.1	4.5	−5.4	−0.1	−7.8	4.6	−6.9

Figure 11. 有理数を初期値としたルール 12 の時間発展の様子

§5.2. 初期値に依存する有限ステップで定常になるもの

例としてルール 140 を取り上げる．

$$u_j^{n+1} = \min(u_j^n, \max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)). \tag{5.3}$$

一般解は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
u_j^n = \min(&\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+n-3}, 1-u_{j+n-2}, u_{j+n}),\\
&\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, \cdots, 1-u_{j+n-3}, u_{j+n-1}),\\
&\cdots,\\
&\max(1-u_{j-1}, 1-u_j, u_{j+2}), \max(1-u_{j-1}, u_{j+1}), u_j).
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

有理数を初期値として時間発展を計算すると次のようになる．各数値は (5.4) の関係を満たしており，u_j^n が 0, 1 のときと同様に，$n=3$ 以降で定常解に落ち着いている．

−2.5	−1.7	7.2	4.5	1.4	0.2	−1.4	3.6	7.9	−4.2
−2.5	−1.7	4.5	1.4	0.2	−0.4	−1.4	3.6	−2.6	−4.2
−2.5	−1.7	2.7	0.2	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.6	−4.2
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.6	−4.2
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.6	−4.2
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.6	−4.2
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.6	−4.2

Figure 12. 有理数を初期値としたルール 140 の時間発展の様子

§6. おわりに

ECA の厳密解の表現方法は，従来は 0, 1 のビットパターン列程度のものしかなかった．本研究では 81 個の独立な ECA の半数弱に対して一般解を max-plus 表現によって与えることができた．また解の証明も max-plus 代数の公式をもちいることにより，いわゆる解析学的な証明を与えることができた．

同時に，本研究で得られた方程式と一般解は値域が 0, 1 に限定された解ではなく，実数を値域とする解に自然に拡張されている．このことは，対象とする時間発展方程式が 0, 1 のバイナリ型から max-plus による区分線形型に拡張されたことも意味し，ECA を含む広い対象が存在することを意味している．

さらに，今回行った計算や証明に含まれる max-plus 演算には，共通するパターンがしばしば観察できた．このことは，何らかの統一的な代数構造が今回の計算や証明に含まれているのではないかと予想する．この点を究明することは今後の重要な課題のひとつである．さらに，今回の研究対象である ECA は CA の中でもとりわけ簡単な時間発展系であり，高階，多近傍，多値のより一般的な CA に対して max-plus 表現をもちいて同様の研究を行うことは，CA の観点からも max-plus 代数の観点からも意義深いと思われる [6].

References

[1] Wolfram, S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc, 2002.

[2] Nishinari, K. and Takahashi, D., Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton, *J. Phys. A*, **31** (1998), 5439–5450.

[3] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 3247–3250.

[4] Nobe, A., Satsuma, J. and Tokihiro, T., Stable Difference Equations Associated with Elementary Cellular Automata, *JJIAM*, **18** (2001), 293–306.

[5] Kunishima, W., Nishiyama, A., Tanaka, H. and Tokihiro, T., Differential Equations for Creating Complex Cellular Automaton Patterns, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **73** (2004), 2033–2036.

[6] Takahashi, D., Matsukidaira, J., Hara, H. and Feng, B., Max-plus analysis on some binary particle systems, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011), 135102 (21pp).