RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B36 (2012), 83–96

A characterization for Hermitian symmetric spaces to be of non-tube type by visible actions

By

Atsumu SASAKI*

Abstract

The aim of this paper is to explain that we characterize the non-compact irreducible Hermitian symmetric space of non-tube type by considering the visible action on a certain non-symmetric complex homogeneous space. Further, we see the concrete description of our slice for the visible action of $Spin(4n+2)$ on $Spin(4n+2, \mathbb{C})/SL(2n+1, \mathbb{C})$.

§1. 導入と主定理

複素多様体における (強) 可視的作用という概念は小林俊行氏によって導入された．そして，可視的作用をもつ複素多様体上の正則ベクトル束において，各ファイバー上の表現の無重複性が切断の空間上の表現に伝播する，という定理が証明された ([5, 8])．

具体的な対象への (強) 可視的作用の研究は，旗多様体やエルミート対称空間における研究 [6, 7] に始まり，線型空間の場合 [12, 14] など，様々な設定で研究されている．今回は，複素多様体としてある非対称なシュタイン多様体を扱う．

連結な複素半単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ とその複素閉部分群 $H_{\mathbb{C}}$ に対し，複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体であるとは，$G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に開軌道をもつときをいう．G_u, H_u をそれぞれ $G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型とするとき，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体であることはコンパクト等質空間 G_u/H_u 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(G_u/H_u)$ が G_u の無重複表現であることと同値である ([15])．今回の主結果 (定理 1.1) はこの研究過程で得られたものである[1]．

Received September 18, 2009. Revised September 16, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 32M15, 20G05
Key Words: Hermitian symmetric space; Visible actions; Slice; Tube type domain
*Department of Mathematics, Faculty of Science, Tokai University, 4-1-1, Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292 Japan.
e-mail: atsumu@tokai-u.jp
RIMS 研究集会「群の表現と非可換調和解析の新展開」(研究代表者：伊師英之氏，副代表者：橋本隆司氏，京都大学：2009 年 6 月 1 日–4 日) における講究録

[1] 2008 年度表現論シンポジウムの講演は，$SL(m+n, \mathbb{C})/(SL(m, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C}))$ における $SU(m+n)$ の作用が，$m \neq n$ のときは強可視的，$m = n$ のときはそうでないことについて講演させていただいた (アブストラクト [11] 参照)．本講演の主結果はこの内容を含んでいる．

まず，強可視的作用の定義を述べる．リー群 H が連結な複素多様体 D に正則に作用しているとする．この作用が**強可視的**であるとは，D の実部分多様体 S と D 上の反正則微分同相 σ が存在して以下を満たすときをいう[2]：

(V.1) $$D = H \cdot S,$$

(S.1) $$\sigma|_S = \mathrm{id}_S,$$

(S.2) σ は D 内の各 H-軌道を保存する

このとき，上を満たす実部分多様体 S を**スライス**とよぶ．また，強可視的ならば [4, Definition 2.3] の意味で可視的である ([5, Theorem 4] 参照).

次に，主結果を述べる．$G_{\mathbb{C}}$ を連結かつ単連結な複素単純リー群とする．θ を $G_{\mathbb{C}}$ の正則な対合的自己同型とし，$K_{\mathbb{C}}$ を θ の固定点集合 $G_{\mathbb{C}}^{\theta}$ とする．$G_{\mathbb{C}}$ は単連結なので $K_{\mathbb{C}}$ は自動的に連結になる．$L_{\mathbb{C}}$ を $K_{\mathbb{C}}$ の交換子群 $[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ とおく．

以下，$K_{\mathbb{C}}$ は半単純ではないと仮定しよう．これは，$L_{\mathbb{C}} \neq K_{\mathbb{C}}$ と同値な条件である．このとき，等質空間 $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ は非対称な複素多様体である．G_u を $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型とする．

定理 1.1. *次の 2 条件は同値である.*

1. *G_u の $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ における作用は強可視的である.*

2. *$(G_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}})$ は次のいずれかに限る：*

$$(SL(m+n,\mathbb{C}), SL(m,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C}))\ (m \neq n),$$
$$(Spin(4n+2,\mathbb{C}), SL(2n+1,\mathbb{C})),$$
$$(E_{6,\mathbb{C}}, Spin(10,\mathbb{C})).$$

なお，$E_{6,\mathbb{C}}$ は例外型複素単純リー環 $\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$ をリー環にもつ，連結かつ単連結な複素単純リー群を表す.

定理 1.1 の条件 (2) は，対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ が非管状型エルミート対称空間の複素化であることとも同値である[3]．つまり，定理 1.1 はエルミート対称空間が非管状型であることを特徴付ける定理であることを表す.

定理 1.1 の (1) $\Rightarrow$ (2) は非対称球多様体の分類 [10] に帰着される．また，(2) $\Rightarrow$ (1) は各 $(G_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}})$ に対して具体的に (S,σ) を構成することで示されるが，その構成法は統一的に与えられる.

$(G_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}) = (SL(m+n,\mathbb{C}), SL(m,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C}))\ (m \neq n)$ については [11] で具体的に (S,σ) を与え，G_u が $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ に強可視的に作用することを示した．本講究録では,

[2]強可視的作用の定義における条件 (V.1) は，オリジナルの定義 ($H \cdot S$ が D の開集合である) よりも強い形を採用している ([5, Definition 3.3.1] 参照).

[3]例えば，$SL(m+n,\mathbb{C})/S(GL(m,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}))$ は非コンパクトなエルミート対称空間 $SU(m,n)/S(U(m) \times U(n))$ の複素化である．$m \neq n$ のとき非管状型である.

定理 1.1 の解説を行うとともに，$(G_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}) = (Spin(4n+2,\mathbb{C}), SL(2n+1,\mathbb{C}))$ の場合に (S,σ) の具体的記述を与える (例 2.4, 3.4, 4.3).

なお，本講究録の内容は論文 [13] に基づく.

謝辞. 本講究録の査読を引き受けて下さった方から丁寧なコメントと有益な助言をいただきました．この場を借りて深くお礼を申し上げます.

§ 2. σ の構成

§2 および §3 では，定理 1.1 の (2) ⇒ (1) の証明の準備を行う.

§ 2.1.

まず，本講究録で用いる記号を準備する．§1 で定義した記号 $G_{\mathbb{C}}$, θ, $K_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{C}}$, G_u は以下継続して用いる.

μ を $G_{\mathbb{C}}$ の反正則な対合的自己同型で $G_u = G_{\mathbb{C}}^{\mu}$ を満たすように選ぶ．この μ は θ と可換であると仮定してよい．このとき，$\tau := \theta\mu$ は θ, μ とは別の反正則対合となる. $G := G_{\mathbb{C}}^{\tau}$ とすると，G は非コンパクトな実単純リー群である．$K := G \cap K_{\mathbb{C}}$ とする．仮定 $L_{\mathbb{C}} \neq K_{\mathbb{C}}$ より，G/K は非コンパクトな既約エルミート対称空間となる.

次に，$\mathfrak{g}$ を $G_{\mathbb{C}}$ のリー環とする．任意の $G_{\mathbb{C}}$ の対合的自己同型 ν に対して，その微分も同じ記号を用いる．$\mathfrak{g}^{\nu}, \mathfrak{g}^{-\nu}$ はそれぞれ ν の $+1, -1$ 固有空間を表すものとする．このとき，$K_{\mathbb{C}}, G_u, G, K$ のリー環 $\mathfrak{k}, \mathfrak{g}_u, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$ はそれぞれ $\mathfrak{g}^{\theta}, \mathfrak{g}^{\mu}, \mathfrak{g}^{\tau}, \mathfrak{g}_0^{\theta}$ で与えられる．μ は $\mathfrak{g}$ のカルタン対合であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mu} + \mathfrak{g}^{-\mu}$ は対応する $\mathfrak{g}$ のカルタン分解である.

$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 θ を $\mathfrak{g}_0$ に制限したもの $\theta|_{\mathfrak{g}_0}$ は $\mathfrak{g}_0$ のカルタン対合となる．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を $\theta|_{\mathfrak{g}_0}$ に対する $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解とするとき，$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_0$ となる．また，G/K が既約なエルミート対称空間より，$\mathfrak{k}_0$ の中心 $Z(\mathfrak{k}_0)$ は 1 次元であることが知られている (cf. [3]).

§ 2.2.

非コンパクトなエルミート対称空間 G/K に対する次の事実を紹介する．この事実は，G/K における K の作用の強可視性を証明する際の鍵となる ([7] 参照).

事実 2.1 ([7, Lemma 2.4]). 次を満たす $\mathfrak{g}_0$ 上の対合的自己同型 σ が存在する：

$$\theta \text{ と } \sigma \text{ は可換である,} \tag{2.1}$$

$$\mathbb{R}\text{-rank}\,\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}\text{-rank}\,\mathfrak{g}_0^{\sigma}, \tag{2.2}$$

$$\sigma|_{Z(\mathfrak{k}_0)} = -\mathrm{id}_{Z(\mathfrak{k}_0)} \tag{2.3}$$

G/K が非管状型のとき，単純リー環 $\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{su}(m,n)$ $(m>n)$, $\mathfrak{so}^*(4n+2)$, $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ のいずれかと同型であることが知られている (cf. [3]).

いま，σ を Table 1 の第 3 列を満たすようにとる．このとき，σ は事実 2.1 を満たす.

$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{k}_0$	$\mathfrak{g}_0^\sigma$	$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{g}^\sigma$
$\mathfrak{su}(m,n)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(m)+\mathfrak{u}(n))$	$\mathfrak{so}(m,n)$	$\mathfrak{sl}(m+n,\mathbb{R})$
$\mathfrak{so}^*(4n+2)$	$\mathfrak{u}(2n+1)$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1,2n+1)$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$	$\mathfrak{sp}(2,2)$	$\mathfrak{e}_{6(6)}$

Table 1. 非管状型 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ に対する $\mathfrak{g}_0^\sigma$ と $\mathfrak{g}_\mathbb{R} := \mathfrak{g}^\sigma$

注意 2.2. 事実 *2.1* は G/K が管状型でも成り立つ *([7, Table 2.4.1])*.

§ 2.3.

以下，G/K は非管状型であると仮定する．複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0$ の複素化とみなし，Table 1 にある $\mathfrak{g}_0$ 上の対合的自己同型 σ を $\mathfrak{g}$ 上に反線型に拡張する: $\sigma(X+\sqrt{-1}Y) := \sigma(X)-\sqrt{-1}\sigma(Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g}_0)$．このとき，自動的に

$$\mathfrak{g} \text{ 上の対合 } \theta, \tau, \sigma \text{ は互いに可換である.} \tag{2.4}$$

σ は反線型対合より，$\mathfrak{g}_\mathbb{R} := \mathfrak{g}^\sigma$ は $\mathfrak{g}$ の実型となる．Table 1 にある各 $\mathfrak{g}_0$ に対して，$\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ は第 4 列で与えられる[4]．これより，σ は次の特徴をもつ：

命題 2.3. $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ は $\mathfrak{g}$ の正規実型である.

なお，複素リー環 $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}'$ が正規実型であるとは，$\mathbb{R}\text{-rank}\,\mathfrak{g}' = \text{rank}\,\mathfrak{g}$ を満たすときをいう．複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の正規実型は，同型を除いて一意である．

$G_\mathbb{C}$ は単連結なので，この σ は $G_\mathbb{C}$ 上の反正則対合に持ち上がる．これを，同じ記号 σ で表すことにする．

例 2.4. $(G_\mathbb{C}, L_\mathbb{C}) = (Spin(4n+2,\mathbb{C}), SL(2n+1,\mathbb{C}))$ に対して，対合的自己同型 θ, μ, σ やリー環 $\mathfrak{g}_0^\sigma, \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ を具体的に記述しよう.

複素スピノル群 $G_\mathbb{C} = Spin(4n+2,\mathbb{C})$ は複素特殊直交群 $SO(4n+2,\mathbb{C})$ の *2* 重被覆群である．$G_\mathbb{C}$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4n+2,\mathbb{C})$ を

$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n+1} \\ I_{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて，次のように実現する：

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(4n+2,\mathbb{C}) : {}^tXI_0 + I_0X = 0\}.$$

[4] $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ が Table 1 の第 4 列で与えられることは，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(m,n)$ のときは [11] の結果から分かる；$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}^*(4n+2)$ のときは例 2.4 で示す；$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_{6(-14)}$ のときは [13, Lemma 2.2] 参照.

ここで，I_{2n+1} は $(2n+1)$ 次単位行列，${}^tX$ は X の転置行列を表す.

$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 θ を $\theta(X)=I_{2n+1,2n+1}^{-1}XI_{2n+1,2n+1}$ $(X\in\mathfrak{g})$ とすると，$\mathfrak{k}=\mathfrak{g}^{\theta}$ は,

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} : A\in M(2n+1,\mathbb{C})\right\}\simeq\mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{C})$$

となる．ただし，$I_{2n+1,2n+1}$ は以下で定義される $(4n+2)$ 次正方行列を表す：

$$I_{2n+1,2n+1}=\begin{pmatrix} I_{2n+1} & 0 \\ 0 & -I_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 μ として $\mu(X)=-{}^t\overline{X}$ $(X\in\mathfrak{g})$ を選ぶ．このとき，$\mathfrak{g}^{\mu}$ は $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 G_u のリー環で $\mu\theta=\theta\mu$ を満たす．よって，$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}^{\mu\theta}$ は

$$\mathfrak{g}_0=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} : \begin{matrix} A\in \mathrm{Skew}(2n+1,\mathbb{C}), \\ B\in\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{C}) \end{matrix}\right\}\simeq\mathfrak{so}^*(4n+2)$$

となる．また，対応する $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ は次で与えられる：

$$\mathfrak{k}_0=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} : A\in\mathrm{Skew}(2n+1,\mathbb{C})\right\}\simeq\mathfrak{u}(2n+1), \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{p}_0=\left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ -\overline{B} & 0 \end{pmatrix} : B\in\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{C})\right\}. \tag{2.6}$$

ここで，$\mathrm{Skew}(2n+1,\mathbb{C})$ は歪エルミート行列のなす線型空間，$\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{C})$ は複素交代行列のなす線型空間を表す.

次に，$\mathfrak{g}_0$ 上の対合的自己同型 σ を

$$\sigma(X):=I_{2n+1,2n+1}\overline{X}I_{2n+1,2n+1}\ (X\in\mathfrak{g}_0). \tag{2.7}$$

で定めると，$\sigma\theta=\theta\sigma$ が成り立ち，$\mathfrak{g}_0^{\sigma}$ と $\mathfrak{p}_0^{\sigma}$ はそれぞれ

$$\mathfrak{g}_0^{\sigma}=\left\{\begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}B \\ \sqrt{-1}B & A \end{pmatrix} : A,B\in\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{R})\right\}, \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{p}_0^{\sigma}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}B \\ \sqrt{-1}B & 0 \end{pmatrix} : B\in\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{R})\right\} \tag{2.9}$$

となる．このとき，$\mathbb{R}$-rank $\mathfrak{g}_0^{\sigma}$ と $\mathbb{R}$-rank $\mathfrak{g}_0$ はともに n で一致する．さらに，$\sigma|_{Z(\mathfrak{k}_0)}=-\mathrm{id}_{Z(\mathfrak{k}_0)}$ も分かる．したがって，*(2.7)* で定義した σ は事実 *2.1* を満たす.

(2.7) で定めた $\mathfrak{g}_0$ 上の対合 σ を $\mathfrak{g}$ 上に反線型に拡張する．このとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{g}^{\sigma}$ は

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\left\{\begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}B \\ \sqrt{-1}C & -{}^tA \end{pmatrix} : \begin{matrix} A\in M(2n+1,\mathbb{R}) \\ B,C\in\mathrm{Alt}(2n+1,\mathbb{R}) \end{matrix}\right\}. \tag{2.10}$$

となり，また $\mathbb{R}$-rank $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = 2n+1$ で rank $\mathfrak{g}$ に一致する．よって，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の正規実型であり，$\mathfrak{so}(2n+1, 2n+1)$ と同型である．

なお，写像

$$\mathfrak{g}_0^{\sigma} \to \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}B \\ \sqrt{-1}B & A \end{pmatrix} \mapsto A + \sqrt{-1}B.$$

によって，$\mathfrak{g}_0^{\sigma}$ は実リー環として $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ と同型になる．また，*(2.8)* と *(2.10)* によって，$\mathfrak{g}_0^{\sigma} \simeq \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{so}(2n+1, 2n+1)$ に自然に埋め込まれる．

注意 2.5. 例 *2.4* で定義した $\mathfrak{g}$ 上の反線型対合 σ は $G_{\mathbb{C}} = Spin(4n+2, \mathbb{C})$ 上の反正則対合に持ち上がるが，$SO(4n+2, \mathbb{C})$ 上にも次のように持ち上がる：

$$\sigma(g) = I_{2n+1,2n+1}\overline{g}I_{2n+1,2n+1} \ (g \in SO(4n+2, \mathbb{C})).$$

$G_{\mathbb{C}} = Spin(4n+2, \mathbb{C})$ 上の反正則対合 σ は，$SO(4n+2, \mathbb{C})$ 上のこの反正則対合 σ の被覆写像 $\varphi : Spin(4n+2, \mathbb{C}) \to SO(4n+2, \mathbb{C})$ による持ち上げである．

注意 2.6. *Table 1* において，リー環の対 $(\mathfrak{su}(3,1), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(1)))$ *(*第 *1* 行の $(m,n) = (3,1)$ の場合*)* と $(\mathfrak{so}^*(6), \mathfrak{u}(3))$ *(*第 *2* 行の $n = 1$ の場合*)* は同型である．また，$\mathfrak{so}(3,1)$ と $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$，$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ と $\mathfrak{so}(3,3)$ はそれぞれ同型であり，複素単純リー環の正規実型は同型を除いて一意であるから，この場合 σ は本質的に同じものである．

§ 3. 対合的自己同型付きリー環 $(\mathfrak{g}, \theta, \mu, \sigma)$ について

§3 では，§2 で述べた $\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型 θ, μ, σ についてさらに考察する．

§ 3.1.

$\mathfrak{g}^{-\mu,-\theta} := \{X \in \mathfrak{g} : (-\mu)X = (-\theta)X = X\}$ とする．このとき，μ と θ が可換であることから ((2.4) 参照)，$\mathfrak{g}^{-\mu,-\theta} = \mathfrak{g}^{\tau,-\theta} = \mathfrak{g}_0^{-\theta} = \mathfrak{p}_0$ が成り立つ．

σ を Table 1 にある $\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型とする．$\mathfrak{p}_0^{\sigma}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ をとり，$A := \exp \mathfrak{a}_0$ とする．実ランク条件 (2.2) によって，$\mathfrak{a}_0$ は $\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間となる．$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}^{-\mu,-\theta} = \mathfrak{g}^{-\mu} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$ であったので，[2, Theorem 2] を適用することで，次のリー群 $G_{\mathbb{C}}$ の分解定理を得る．

補題 3.1 (一般化されたカルタン分解)**.** $G_{\mathbb{C}} = G_u A K_{\mathbb{C}}$.

次に，$\mathfrak{m}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ における $\mathfrak{a}_0$ の中心化環とし，$\mathfrak{l}_0 := [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0]$ を $\mathfrak{k}_0$ の導来イデアルとする．非コンパクトな既約エルミート対称空間 G/K が管状型であることをリー環レベルで特徴付ける次の事実が知られている．

事実 3.2 ([1, Lemma 3.2], cf. [9]). G/K が管状型であるための必要十分条件は，$\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{l}_0$ を満たすことである．

§ 3.2.

G/K は非管状型であると仮定する．$\mathfrak{a}_0$ の選び方から，明らかに $\sigma|_{\mathfrak{a}_0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}_0}$ を満たす．よって，$\mathfrak{m}_0$ は σ-安定である．特に，σ の $\mathfrak{m}_0$ への制限 $\sigma|_{\mathfrak{m}_0}$ は $\mathfrak{m}_0$ 上の対合的自己同型である．$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\sigma + \mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ を $\sigma|_{\mathfrak{m}_0}$ の $+1, -1$ 固有空間分解とする．M を K における $\mathfrak{a}_0$ の中心化群とし，$M^\sigma := M \cap G^\sigma$ とする．このとき，次が成り立つ．

命題 3.3.

1. $\mathfrak{m}_0^\sigma$ は *Table 2* の第 *3* 列で与えられる．
2. $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} M/M^\sigma$.
3. $\mathfrak{m}_0 = \mathrm{Ad}(M)\mathfrak{m}_0^{-\sigma}$.

$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{m}_0$	$\mathfrak{m}_0^\sigma$
$\mathfrak{su}(m,n)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1)^n + \mathfrak{u}(m-n))$	$\mathfrak{so}(m-n)$ $(m>n)$
$\mathfrak{so}^*(4n+2)$	$\mathfrak{su}(2)^n + \mathfrak{u}(1)$	$\mathfrak{so}(2)^n$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{su}(4) + \sqrt{-1}\mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(4)$

Table 2. $\mathfrak{m}_0$ と $\mathfrak{m}_0^\sigma$

命題 3.3 の (2) は Table 2 より導かれる．M はコンパクトより，(3) は (2) より得られる．

(1) は，$\mathfrak{g}_0$ が古典型のときは直接計算することで示される．実際に，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(m,n)$ のときは，[11] を参照．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}^*(4n+2)$ のときは，後述の例 3.4 で具体的記述を与えた．

一方で，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_{6(-14)}$ のとき，具体的に σ を記述して $\mathfrak{m}_0^\sigma$ を計算することは容易ではない．そこで，$\mathfrak{m}_0^\sigma \simeq \mathfrak{so}(4)$ となることを σ の具体的記述を用いずに以下で示そう．

(2.4) より σ と θ は可換であったから，θ は $\mathfrak{g}_0^\sigma$ のカルタン対合である．このとき，対応する $\mathfrak{g}_0^\sigma$ のカルタン分解は $\mathfrak{g}_0^\sigma = \mathfrak{k}_0^\sigma + \mathfrak{p}_0^\sigma$ となる．σ は Table 1 で $\mathfrak{g}_0^\sigma \simeq \mathfrak{sp}(2,2)$ を満たすものを選んだので，$\mathfrak{k}_0^\sigma \simeq \mathfrak{sp}(2) + \mathfrak{sp}(2)$ となる．

一方で，$\mathfrak{a}_0$ は $\mathfrak{p}_0^\sigma$ の極大可換部分空間であった (§3.1 参照)．よって，$\mathfrak{m}_0^\sigma$ は $\mathfrak{k}_0^\sigma \simeq \mathfrak{sp}(2)+\mathfrak{sp}(2)$ における $\mathfrak{a}_0$ の中心化環である．ゆえに，$\mathfrak{m}_0^\sigma \simeq \mathfrak{sp}(1)+\mathfrak{sp}(1)$ (cf. [3, Appendix

C]) である．$\mathfrak{sp}(1)+\mathfrak{sp}(1)\simeq\mathfrak{so}(4)$ より[5]，$\mathfrak{m}_0^\sigma\simeq\mathfrak{so}(4)$ が示された．

例 3.4 (例 2.4 の続き)**.** $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}^*(4n+2)$ の場合に $\mathfrak{m}_0$ と $\mathfrak{m}_0^\sigma$ を具体的に求めよう．

$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(4n+2,\mathbb{C})$ 上の対合 σ は，*(2.7)* を $\mathfrak{g}$ 上に反線型に拡張したものだった．*(2.9)* で求めた $\mathfrak{p}_0^\sigma$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ として，

$$\mathfrak{a}_0:=\left\{\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}J(r_1,\dots,r_n)\\ \sqrt{-1}J(r_1,\dots,r_n) & 0\end{pmatrix}:r_1,\dots,r_n\in\mathbb{R}\right\}\tag{3.1}$$

を選ぶことができる．これより，$\dim\mathfrak{a}_0=n$ である．ただし，$J(r_1,\dots,r_n)$ は次で定義される $(2n+1)$ 次正方行列である：

$$J(r_1,\dots,r_n):=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & -r_1\\ r_1 & 0\end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & -r_n\\ r_n & 0\end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0}\end{pmatrix}.$$

この $\mathfrak{a}_0$ は確かに $\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間にもなっている．

次に，$\mathfrak{k}_0\simeq\mathfrak{u}(2n{+}1)$ *((2.5)* 参照*)* における $\mathfrak{a}_0$ の中心化環 $\mathfrak{m}_0$ を計算すると，$X_1,\dots,X_n\in M(2,\mathbb{C})$ と $c\in\mathbb{C}$ に対して $D(X_1,\dots,X_n;c)\in M(4n+2,\mathbb{C})$ を

$$D(X_1,\dots,X_n;c):=\left(\begin{array}{cccc|cccc}X_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & \\ & & X_n & & & & & \\ & & & c & & & & \\ \hline & & & & \overline{X}_1 & & & \\ & O & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \overline{X}_n & \\ & & & & & & & \overline{c}\end{array}\right).\tag{3.2}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_0=\{D(X_1,\dots,X_n;\sqrt{-1}t):X_1,\dots,X_n\in\mathrm{Skew}(2,\mathbb{C}),\\ \operatorname{tr}X_1=\cdots=\operatorname{tr}X_n=0,t\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

[5] $\mathfrak{su}(4)$ の部分リー環で，$\mathfrak{so}(4)$ と同型ではあるが共役ではないものに $\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(2)$ がある．$\mathfrak{m}_0^\sigma$ を $\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(2)$ ではなく $\mathfrak{so}(4)$ と表す理由を以下に説明する．
$\sigma|_{\mathfrak{m}_0}$ は $\mathfrak{m}_0$ 上の対合的自己同型で，特に $\mathfrak{m}_0$ の半単純部分 $[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]\simeq\mathfrak{su}(4)$ および中心 $Z(\mathfrak{m}_0)\simeq\sqrt{-1}\mathbb{R}$ は σ-安定である．よって，$\mathfrak{m}_0^\sigma=[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]^\sigma+Z(\mathfrak{m}_0)^\sigma$ となる．さらに，$\mathfrak{m}_0^\sigma\simeq\mathfrak{sp}(1)+\mathfrak{sp}(1)$ は半単純であるから $\mathfrak{m}_0^\sigma\subset[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]$ が成り立つ．ゆえに，$\mathfrak{m}_0^\sigma=[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]^\sigma$ である．σ の $[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]$ への制限は $[\mathfrak{m}_0,\mathfrak{m}_0]$ 上の対合的自己同型であるから，$\mathfrak{m}_0^\sigma\simeq\mathfrak{sp}(1)+\mathfrak{sp}(1)$ は $\mathfrak{su}(4)$ 上のある対合的自己同型の $+1$ 固有空間でなければならない．

となる． よって，$\mathfrak{m}_0 \simeq \mathfrak{su}(2)^n + \mathfrak{u}(1)$．ゆえに，$\mathfrak{m}_0^\sigma$ は

$$\mathfrak{m}_0^\sigma = \{D(X_1, \ldots, X_n; 0) : X_1, \ldots, X_n \in \mathrm{Alt}(2, \mathbb{R})\} \tag{3.4}$$

となり，$\mathfrak{m}_0^\sigma \simeq \mathfrak{so}(2)^n$ となる．特に，$\mathfrak{m}_0^\sigma$ は $\mathfrak{k}_0$ の半単純部分 $\mathfrak{l}_0 \simeq \mathfrak{su}(2n+1)$ に含まれる．

§ 4. 定理 1.1 (2) ⇒ (1) の証明について

§2 および §3 の準備の下，§4 では定理 1.1 (2) ⇒ (1) の証明について解説する．以下，エルミート対称空間 G/K は非管状型であると仮定し，D を非対称な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ とする．

§ 4.1.

この節では，具体的に $D = G_u \cdot S$ を満たす D の実部分多様体 S を構成しよう．

まず，次の補題から始める．

補題 4.1. $\mathfrak{m}_0^{-\sigma} \not\subset \mathfrak{l}_0$.

Proof. G/K は非管状型なので，事実 3.2 より $\mathfrak{m}_0 \not\subset \mathfrak{l}_0$ である．よって，$Y \in \mathfrak{m}_0$ として $Y \notin \mathfrak{l}_0$ を満たすものを選ぶことができる．命題 3.3 の (3) にしたがって，ある $g \in M$ と $X \in \mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ を用いて $Y = \mathrm{Ad}(g)X$ と表す． このとき，$X \notin \mathfrak{l}_0$ となる．

もし $X \in \mathfrak{l}_0$ と仮定する．このとき，ある $X_{1,1}, \ldots, X_{1,r}, X_{2,1}, \ldots, X_{2,r} \in \mathfrak{k}_0$ を用いて $X = \sum_{j=1}^r [X_{1,j}, X_{2,j}]$ と表される．$\mathfrak{k}_0$ は K-不変であるから，

$$\begin{aligned} Y = \mathrm{Ad}(g)X &= \mathrm{Ad}(g)\sum_{j=1}^r [X_{1,j}, X_{2,j}] \\ &= \sum_{j=1}^r [\mathrm{Ad}(g)X_{1,j}, \mathrm{Ad}(g)X_{2,j}] \in \mathfrak{l}_0 \end{aligned}$$

となって，$Y \notin \mathfrak{l}_0$ に矛盾する． □

$\mathfrak{l}_0$ は $\mathfrak{k}_0$ の中で余次元 1 であるから，事実 3.2 より $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{m}_0$ が成り立つ．さらに，補題 4.1 によって $X \in \mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ で $X \notin \mathfrak{l}_0$ を満たすものを 1 つ選んで固定すれば，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{l}_0 + \mathbb{R}X$ と分解される．よって，複素化 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ はベクトル空間として次のように分解される：

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{l} + \mathbb{R}X + \sqrt{-1}\mathbb{R}X. \tag{4.1}$$

（脚注５続き）コンパクト単純リー環の対合的自己同型およびその $+1$ 固有空間には，それぞれコンパクト単純リー環の複素化の非コンパクトな実型およびその極大コンパクト部分リー環が対応する．$\mathfrak{so}(4)$ は，$\mathfrak{su}(4)$ の複素化 $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ の非コンパクトな実型 $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分リー環と考えられる．一方で，$\mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2)$ に対応する $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ の非コンパクトな実型は存在しない．したがって，$\mathfrak{m}_0^\sigma$ は $\mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2)$ ではなく $\mathfrak{so}(4)$ と表すのが自然である．

ただし，$\mathfrak{l} := [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ はリー群 $L_{\mathbb{C}}$ のリー環である．

次に，$Z_{\mathbb{T}} := \exp \mathbb{R}X$，$Z_{\mathbb{R}} := \exp \sqrt{-1}\mathbb{R}X$ とすると，リー環 $\mathfrak{k}$ の分解 (4.1) に対応するリー群 $K_{\mathbb{C}}$ の分解が得られる：

$$K_{\mathbb{C}} = Z_{\mathbb{T}} Z_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}. \tag{4.2}$$

$X \in \mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ より 3 つのリー群 $Z_{\mathbb{T}}, Z_{\mathbb{R}}, A$ は互いに可換である．さらに，$Z_{\mathbb{T}} \subset G_u$ であるから，補題 3.1 と (4.2) を組み合わせることで，

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A K_{\mathbb{C}} = G_u A (Z_{\mathbb{T}} Z_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}) = G_u Z_{\mathbb{T}} (Z_{\mathbb{R}} A) L_{\mathbb{C}} = G_u (Z_{\mathbb{R}} A) L_{\mathbb{C}}.$$

以上より，次の命題が示された．

命題 4.2. $D = G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ の実部分多様体 S を次で定義する：

$$S := (Z_{\mathbb{R}} A) L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}. \tag{4.3}$$

このとき，$D = G_u \cdot S$ が成り立つ．

例 4.3 (cf. 例 2.4, 3.4)**.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}^*(4n+2)$ のとき，$\mathfrak{m}_0$ は *(3.3)* で与えられたことを思い出そう．*(3.2)* で定義された行列 $D(X_1, \ldots, X_n; c)$ を用いると，$\mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ は

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_0^{-\sigma} = \{D(\sqrt{-1}X_1, \ldots, \sqrt{-1}X_n; \sqrt{-1}t) :& \\ X_1, \ldots, X_n \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}), \operatorname{tr} X_1 = \cdots = \operatorname{tr} X_n = 0, t \in \mathbb{R}\}&\end{aligned}$$

と表される．ここで，$\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ は実対称行列のなす線型空間を表す．$t \in \mathbb{R}$ が 0 でなければ，$\operatorname{tr} X_1 = \cdots = \operatorname{tr} X_n = 0$ なるどんな $X_1 \ldots, X_n \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ を選んでも，$D(\sqrt{-1}X_1, \ldots, \sqrt{-1}X_n; \sqrt{-1}t)$ は $\mathfrak{l}_0 \simeq \mathfrak{su}(2n+1)$ の元とはならない．ゆえに，$\mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ は $\mathfrak{l}_0$ に含まれない．いま，$\mathfrak{l}_0$ に属さない $X \in \mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ として，

$$X := D(0, \ldots, 0, \sqrt{-1})$$

を選ぶ．

以上より，$G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}} = Spin(4n+2, \mathbb{C})/SL(2n+1, \mathbb{C})$ に対して $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S$ を満たす S は，命題 *4.2* より $\mathfrak{p}_0^{\sigma}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ *((3.1)* 参照*)* と X を用いて

$$S := (\exp \mathfrak{a}_0)(\exp \sqrt{-1}\mathbb{R}X) L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$$

と表される．特に，S の次元は $\dim \mathfrak{a}_0 + \dim \sqrt{-1}\mathbb{R}X = n+1$ である．

注意 4.4. 被覆群準同型 $\varphi : Spin(4n+2, \mathbb{C}) \to SO(4n+2, \mathbb{C})$ は被覆写像 $\Phi : Spin(4n+2, \mathbb{C})/SL(2n+1, \mathbb{C}) \to SO(4n+2, \mathbb{C})/SL(2n+1, \mathbb{C})$ を誘導する．上で述べ

た S の Φ による像 $\Phi(S)$ は次を満たす：

$$\begin{aligned} SO(4n+2,\mathbb{C})/SL(2n+1,\mathbb{C}) &= \Phi(Spin(4n+2,\mathbb{C})/SL(2n+1,\mathbb{C})) \\ &= \Phi(Spin(4n+2)\cdot S) \\ &= \varphi(Spin(4n+2))\cdot\Phi(S) \\ &= SO(4n+2)\cdot\Phi(S) \end{aligned}$$

像 $\Phi(S)$ は φ を用いて

$$\Phi(S) = \varphi((\exp\mathfrak{a}_0)(\exp\sqrt{-1}\mathbb{R}X))L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$$

と表される．ここで，群 $\varphi((\exp\mathfrak{a}_0)(\exp\sqrt{-1}\mathbb{R}X))$ は次のように記述される．$r\in\mathbb{R}$ に対し，2 次正方行列 $b(r), c(r)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} b(r) &:= \begin{pmatrix} \cosh r & 0 \\ 0 & \cosh r \end{pmatrix}, \\ c(r) &:= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}\sinh r \\ \sqrt{-1}\sinh r & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする．$r_1,\dots,r_n,t\in\mathbb{R}$ に対して $d(r_1,\dots,r_n;t)\in SO(4n+2,\mathbb{C})$ を

$$d(r_1,\dots,r_n;t) := \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c} b(r_1) & & & 0 & c(r_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & b(r_n) & 0 & & & c(r_n) & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline c(r_1) & & & 0 & b(r_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & c(r_n) & 0 & & & b(r_n) & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-t} \end{array}\right)$$

で定義すると，

$$\varphi((\exp\mathfrak{a}_0)(\exp\sqrt{-1}\mathbb{R}X)) = \{d(r_1,\dots,r_n;t) : r_1,\dots,r_n,t\in\mathbb{R}\}$$

と表される．

§ 4.2.

§2.3 の最後で述べたように，$\mathfrak{g}$ 上の反線型対合 σ は $G_{\mathbb{C}}$ の反正則対合に持ち上がる (同じ記号 σ で表す).

σ と θ は可換より ((2.4) 参照)，$\mathfrak{k}=\mathfrak{g}^{\theta}$ は σ-安定である．よって，$\mathfrak{l}$ も σ-安定である．ゆえに，$L_{\mathbb{C}}$ は σ-安定であり，このことにより，$G_{\mathbb{C}}$ の反正則対合 σ が D 上の反正則微分同相を誘導する．つまり，

$$\sigma(gL_{\mathbb{C}})=\sigma(g)L_{\mathbb{C}}\ (g\in G_{\mathbb{C}}). \tag{4.4}$$

同様に，コンパクト群 G_u も σ-安定である．

§ 4.3.

この節で，(4.4) で定義した σ が (4.3) で定義した D の実部分多様体 S に対して条件 (S.1) と (S.2) (§1 参照) を満たすことを示そう．

まず，(S.1) について見ていこう．σ は $\sigma|_{\mathfrak{a}_0}=\mathrm{id}_{\mathfrak{a}_0}$ を満たすため，$\sigma|_A=\mathrm{id}_A$ となる．一方で，$X\in\mathfrak{m}_0^{-\sigma}$ であることと，σ は $\mathfrak{g}$ 上の反線型対合であることより，

$$\sigma(\sqrt{-1}X)=-\sqrt{-1}\sigma(X)=\sqrt{-1}X.$$

よって，$\sigma|_{Z_{\mathbb{R}}}=\mathrm{id}_{Z_{\mathbb{R}}}$ となる．ゆえに，任意の元 $atL_{\mathbb{C}}\in S$ $(a\in A,\, t\in Z_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\sigma(atL_{\mathbb{C}})=\sigma(at)L_{\mathbb{C}}=\sigma(a)\sigma(t)L_{\mathbb{C}}=atL_{\mathbb{C}}.$$

したがって，$\sigma|_S=\mathrm{id}_S$ となり (S.1) が示された．

条件 (S.2) は (S.1) を用いて次のように示される．命題 4.2 によって，任意の $xL_{\mathbb{C}}\in D$ $(x\in G_{\mathbb{C}})$ をある $g\in G_u$ と $sL_{\mathbb{C}}\in S$ を用いて $xL_{\mathbb{C}}=g\cdot sL_{\mathbb{C}}$ と表す．このとき，

$$\sigma(xL_{\mathbb{C}})=\sigma(g)\cdot\sigma(sL_{\mathbb{C}})=\sigma(g)\cdot sL_{\mathbb{C}}=(\sigma(g)g^{-1})\cdot xL_{\mathbb{C}}. \tag{4.5}$$

§4.2 の最後で述べたように G_u は σ-安定なので，$\sigma(g)g^{-1}\in G_u$ である．よって，(4.5) は $\sigma(xL_{\mathbb{C}})\in G_u\cdot xL_{\mathbb{C}}$ を表す．ゆえに，(S.2) が示された．

§ 4.4.

上の S と σ が条件 (V.1)–(S.2) を満たすことを示せば，定理 1.1 (2) ⇒ (1) が証明されるが，(V.1) は命題 4.2 で，(S.1) と (S.2) は §4.3 で既に見た．よって，定理 1.1 (2) ⇒ (1) の証明が完了した．

この S は G_u の D における強可視的作用のスライスとなる．よって，次の系を得る．

系 4.5. G/K が非管状型のとき，D における G_u の強可視的作用に対するスライス S として，$\dim S=\operatorname{rank} G/K+\dim Z(\mathfrak{k}_0)$ を満たすものが選べる．

§ 5. 定理 1.1 (1) ⇒ (2) の証明について

最後に，定理 1.1 (1) ⇒ (2) の証明について説明しよう．

引き続き，§1 の設定を用いる．$L := [K, K]$ とすると，L は $L_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群である．非対称なコンパクト等質空間 G_u/L 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間を $L^2(G_u/L)$ で表す．

定理 *1.1 (1)* $\Rightarrow$ *(2)* の証明． G_u の $G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ における作用が強可視的であると仮定する．このとき，小林の無重複性の伝播定理 ([5, 8] 参照) によって，$L^2(G_u/L)$ 上の G_u の左正則表現は無重複表現であることが分かる．Vinberg–Kimelfeld の結果 [15, Theorem 2] を適用すると，G_u/L は球多様体である[6]．

既約な球多様体の分類は Krämer によって完成された [10]．彼の分類によると，G/K が管状型のとき G_u/L は球多様体ではないことが分かる．

以上より，G/K は非管状型である． □

注意 5.1. 上の議論より，定理 *1.1 (2)* $\Rightarrow$ *(1)* は複素等質空間

$$SL(m+n, \mathbb{C})/(SL(m, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C})),$$
$$Spin(4n+2, \mathbb{C})/SL(2n+1, \mathbb{C}),$$
$$E_{6,\mathbb{C}}/Spin(10, \mathbb{C})$$

が球多様体であることの別証明を与えている．

References

[1] M. Flensted–Jensen, Spherical functions on a simply connected semisimple Lie group, *Amer. J. Math.* **99** (1977), 341–361.

[2] M. Flensted–Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.

[3] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction, second edition*, Progress in Mathematics **140** (2002), Birkhäuser, Boston.

[4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.

[5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

[7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform, Groups* **12** (2007), 671–694.

[8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, math.RT/0607004.

[9] A. Korányi and J. A. Wolf, Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes. *Ann. of Math.* **81** (1965), 265–288.

[6] コンパクト等質空間が球多様体であるとは，その複素化が球多様体のときをいう．

[10] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Compositio Math.* **38** (1979), 129–153.

[11] A. Sasaki, Visible actions on $SL(m+n,\mathbb{C})/(SL(m,\mathbb{C})\times SL(n,\mathbb{C}))$, 2008 年度表現論シンポジウム予稿集 (eds. 谷口健二氏，吉野太郎氏) (2008), 1–5.

[12] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2009), 3445–3466, doi: 10.1093/imrn/rnp060.

[13] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions *Geom. Dedicata* (2009), doi: 10.1007/s10711-009-9412-z.

[14] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2010), doi: 10.1093/imrn/rnq100.

[15] É. B. Vinberg, B. N. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.,* **12** (1978), 168–174.