RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B36 (2012), 113–129

直交群の Weingarten 関数と帯多項式

(Weingarten functions for orthogonal groups and zonal polynomials)

By

松本 詔 (Sho Matsumoto)*

Contents

Abstract

This note is an overview of the paper [2]. We evaluate integrals of polynomial functions over orthogonal groups. Our main result is to obtain an explicit expression of the Weingarten matrix, which plays a starring role in the evaluations.

§1. 序章

直交群上の多項式関数の積分について考える．d を正の整数，$O(d) = \{g \in GL(d, \mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_d\}$ を直交群，dg を $O(d)$ の正規化されたハール測度とする．g_{ij} を行列 g の (i, j) 成分を

Received September 7, 2009. Accepted, February 1, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 15A52, 43A90
Key Words: Weingarten calculus, orthogonal groups, zonal spherical functions
Partly supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) No. 22740060.
*名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (Graduate School of Mathematics, Nagoya University), 〒 464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町
e-mail: sho-matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp

与える座標関数とする．与えられた添字 $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して，次の積分を考えよう．

$$I_d(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k) := \int_{O(d)} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_k j_k} dg.$$

まず，k が奇数のときはこの積分は 0 になる．実際，ハール測度の両側不変性から $d(-g) = dg$ となるので，

$$I_d(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k) = (-1)^k I_d(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$$

が成り立つ．そこで，以下 $k = 2n$ とする．

Weingarten [13] はこのような積分の，$d \to \infty$ のときの漸近挙動を考えた．$2n$ 個の添字 $i_1, \ldots, i_{2n}, j_1, \ldots, j_{2n}$ を固定したときに，

$$I_d(i_1, \ldots, i_{2n}; j_1, \ldots, j_{2n}) = C(i_1, \ldots, i_{2n}; j_1, \ldots, j_{2n}) d^{-n} + \mathrm{O}(d^{-n-1}) \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで，定数 $C(i_1, \ldots, i_{2n}; j_1, \ldots, j_{2n})$ は，後述するように具体的に与えられる．ただし，$i_1, \ldots, i_{2n}, j_1, \ldots, j_{2n}$ の取り方によってはこの $C(i_1, \ldots, i_{2n}; j_1, \ldots, j_{2n})$ は 0 になるので，(1.1) は積分の漸近挙動の（非自明な）第 1 項を必ずしも与えているわけではないことに注意する．

B. Collins と P. Śniady [3] は，有限の d において，積分 $I_d(i_1, \ldots, i_{2n}; j_1, \ldots, j_{2n})$ の値を求める手法を与えた．その手法は，ワインガルテン計算法 (Weingarten calculus) と呼ばれる．それによると，積分 I_d はワインガルテン行列の行列成分の和として与えられる．ワインガルテン行列は，あるグラム行列の（擬似）逆行列として定義される．

このノートでの目的は，その Collins-Śniady の公式を紹介することと，ワインガルテン行列の帯球関数を用いた新しい表示式を得た[1]のでそれを紹介することである．また最後の章で，ユニタリ群や斜交群の同様の問題についても触れる．

§2. 直交群のワインガルテン計算法

この章では Collins-Śniady の公式を紹介する．後で詳しく扱うワインガルテン行列が重要な役割を果たす．

§2.1. 完全マッチングとグラム行列

$\mathcal{M}(2n)$ を，点 $1, 2, \ldots, 2n$ についての完全マッチング全体の集合とする．言い換えれば，$\mathcal{M}(2n)$ の元 $\mathfrak{m}$ は集合 $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ の 2 点集合への分割である．例えば，$\mathcal{M}(4)$ は次の 3 つの元からなる．

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \quad \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \quad \{\{1,4\},\{2,3\}\}. \tag{2.1}$$

[1] この研究は Benoît Collins との共同研究 [2] によるものである．

一般に，$|\mathcal{M}(2n)| = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ である．

$\mathcal{M}(2n)$ の各元 $\mathfrak{m}$ は，

$$\begin{gathered}\mathfrak{m} = \big\{\{\mathfrak{m}(1),\mathfrak{m}(2)\},\{\mathfrak{m}(3),\mathfrak{m}(4)\},\dots,\{\mathfrak{m}(2n-1),\mathfrak{m}(2n)\}\big\},\\ \mathfrak{m}(2i-1) < \mathfrak{m}(2i)\ (1\le i\le n), \qquad 1=\mathfrak{m}(1)<\mathfrak{m}(3)<\cdots<\mathfrak{m}(2n-1),\end{gathered} \tag{2.2}$$

の形に一意的に書ける．このとき単射

$$\mathcal{M}(2n)\ni\mathfrak{m}\mapsto\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & 2n-1 & 2n\\ \mathfrak{m}(1) & \mathfrak{m}(2) & \mathfrak{m}(3) & \mathfrak{m}(4) & \cdots & \cdots & \mathfrak{m}(2n-1) & \mathfrak{m}(2n)\end{pmatrix}\in S_{2n} \tag{2.3}$$

によって，$\mathcal{M}(2n)$ を対称群 S_{2n} の部分集合とみなす．上の $\mathcal{M}(4)$ の例ではそれぞれ，S_4 の単位元 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{smallmatrix}\right)$，互換 $(2\ 3)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{smallmatrix}\right)$，3-サイクル $(2\ 4\ 3)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{smallmatrix}\right)$ が対応する．

二つの完全マッチング $\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)$ に対して，グラフ $\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ を次のように定義する．すなわち，$\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の頂点は $1,2,\dots,2n$ であり，辺は $\{\mathfrak{m}(2i-1),\mathfrak{m}(2i)\}$, $\{\mathfrak{n}(2i-1),\mathfrak{n}(2i)\}$ $(i=1,2,\dots,n)$ で構成されている．このとき $\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は，各頂点から辺が丁度 2 本ずつ出ている．$\mathrm{loop}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})\in\{1,2,\dots,n\}$ を，$\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の連結成分の個数とする．特に，$\mathrm{loop}(\mathfrak{m},\mathfrak{m})=n$ である．

例 2.1. $\mathcal{M}(6)$ の 2 元 $\mathfrak{m}=\{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}$, $\mathfrak{n}=\{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$ に対して，$\mathrm{loop}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=2$ である．実際，$\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は二つの連結成分

$$1\overset{\mathfrak{m}}{—}3\overset{\mathfrak{n}}{—}4\overset{\mathfrak{m}}{—}6\overset{\mathfrak{n}}{—}1\quad;\quad 2\overset{\mathfrak{m}}{—}5\overset{\mathfrak{n}}{—}2$$

から成る．ここで記号 $i\overset{\mathfrak{m}}{—}j$ は，頂点 i,j が辺 $\{i,j\}\in\mathfrak{m}$ で結ばれていることを表している．

定義 2.2. 正の整数 d,n に対し，行列 $G_n^{O(d)}=(G^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)}$ を

$$G^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=d^{\mathrm{loop}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})}$$

で定める．これを（直交群の）**グラム行列**と呼ぶ．

補足 1. $G_n^{O(d)}$ の各成分は内積で与えられる（下の (2.4) 参照）．グラム行列という名前はそのことに由来する．

例 2.3.

$$G_2^{O(d)}=\begin{pmatrix}d^2 & d & d\\ d & d^2 & d\\ d & d & d^2\end{pmatrix}.$$

ただし，行と列の添字は，(2.1) の順である．

§2.2. ワインガルテン行列

グラム行列は逆行列をもつとは限らない．実際，後で示すように，$G_n^{O(d)}$ が可逆となる必要十分条件は $d\ge n$ である．そこで，ワインガルテン行列をグラム行列の「擬似逆行列」として定義しよう．

定義 2.4. A を $m\times n$ 複素行列とする．このとき

$$(AB)^* = AB, \quad (BA)^* = BA, \quad ABA = A, \quad BAB = B$$

をすべて満たす $n\times m$ 行列 B が一意的に存在する（例えば [11] を参照）．この B を，A の**擬似逆行列**という．A が正方行列で可逆ならば，$B = A^{-1}$ である．

定義 2.5. 正の整数 d, n に対し，グラム行列 $G_n^{O(d)}$ の擬似逆行列を

$$\mathrm{Wg}_n^{O(d)} = (\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)}$$

と書く．これを（直交群の）**ワインガルテン行列**という．

例 2.6. 例 2.3 のグラム行列 $G_2^{O(d)}$ は $d\geq 2$ のときは可逆で，$d=1$ のときはそうではない．(擬似）逆行列は以下のようになる．

$$\mathrm{Wg}_2^{O(d)} = \begin{cases} \frac{1}{d(d+2)(d-1)}\begin{pmatrix} d+1 & -1 & -1 \\ -1 & d+1 & -1 \\ -1 & -1 & d+1 \end{pmatrix} & \text{if } d\geq 2, \\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{if } d = 1. \end{cases}$$

§ 2.3. Collins-Śniady の定理

序章で述べた積分 $I_d(i_1,\dots,i_{2n}; j_1,\dots,j_{2n})$ を計算する公式を与えよう．完全マッチング $\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(2n)$ と，正の整数の列 $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$ に対して，

$$\binom{\mathfrak{m}}{i_1, i_2, \dots, i_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \delta_{i_{\mathfrak{m}(2k-1)}, i_{\mathfrak{m}(2k)}}$$

と置く．$\binom{\mathfrak{m}}{i_1,\dots,i_{2n}}$ は 0 または 1 であり，条件「$\{p,q\}\in\mathfrak{m} \ \Rightarrow i_p = i_q$」を満たすときに限り 1 となる．

定理 2.7 (Collins-Śniady [3]. Collins-Stolz [4]，Collins-M [2] も参照)**.** $i_1,\dots,i_{2n}, j_1,\dots,j_{2n}$ を $\{1,\dots,d\}$ の元の列とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_{O(d)} g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}\cdots g_{i_{2n}j_{2n}}dg$$
$$= \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)} \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})\binom{\mathfrak{m}}{i_1, i_2,\dots, i_{2n}}\binom{\mathfrak{n}}{j_1, j_2, \dots, j_{2n}}.$$

証明の概略．$V = \mathbb{C}^d$ とし，$e_1,\dots,e_d$ をその標準基底とする．行列 $g = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ に対して $\langle e_i, ge_j\rangle = g_{ij}$ である．テンソル積 $V^{\otimes 2n}$ を考える．各 $\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(2n)$ に対し，$V^{\otimes 2n}$ の元 $\rho(\mathfrak{m})$ を

$$\rho(\mathfrak{m}) = \sum_{j_1,\dots,j_{2n}=1}^{d} \binom{\mathfrak{m}}{j_1,\dots,j_{2n}} e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{2n}}$$

で定める．例えば，$\mathfrak{m} = \{\{1,3\},\{2,4\}\} \in \mathcal{M}(4)$ ならば，$\rho(\mathfrak{m}) = \sum_{j_1,j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \in V^{\otimes 4}$ となる．グラム行列の成分は，V の内積から自然に拡張された $V^{\otimes 2n}$ の内積を用いて，

$$G^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \langle \rho(\mathfrak{m}), \rho(\mathfrak{n}) \rangle, \qquad \mathfrak{m},\mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n), \tag{2.4}$$

となることは容易に確かめられる．(補足 1 を参照.)

$O(d)$ の $V^{\otimes 2n}$ への作用を

$$g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2n}) = (gv_1) \otimes \cdots \otimes (gv_{2n}), \qquad g \in O(d),\ v_1,\dots,v_{2n} \in V$$

で定める．ブラウアー・ワイルの双対性によれば，不変部分空間

$$[V^{\otimes 2n}]^{O(d)} = \{v \in V^{\otimes 2n} \mid g.v = v\ (\forall g \in O(d))\}$$

は，$\{\rho(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{M}(2n)\}$ で張られている．

線型写像 $P : V^{\otimes 2n} \to V^{\otimes 2n}$ を

$$P(v) = \int_{O(d)} g.v dg, \qquad v \in V^{\otimes 2n},$$

で定めると，P は $[V^{\otimes 2n}]^{O(d)}$ への射影となっている．また P の定義から，

$$\int_{O(d)} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_{2n} j_{2n}} dg = \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{2n}}, P(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2n}}) \rangle$$

が成り立つ．上で述べた事実により，$[V^{\otimes 2n}]^{O(d)}$ の元 $P(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2n}})$ は $\rho(\mathfrak{m})$ たちの線型結合で書けるわけだが，簡単な線型代数の計算をすることで，

$$P(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2n}}) = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)} \langle \rho(\mathfrak{n}), e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2n}} \rangle \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rho(\mathfrak{m})$$

となることが分かる．この式を一つ前の式に代入し，

$$\langle \rho(\mathfrak{n}), e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2n}} \rangle = \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ j_1, \dots, j_{2n} \end{pmatrix}$$

に注意すれば，結果が得られる． □

§ 2.4. ワインガルテン計算法の具体例

定理 2.7 を適用して多項式関数の直交群上の積分を計算する手法を，ワインガルテン計算法と呼ぶ．これは，ガウス型ランダム行列における類似の計算が，ウィック (Wick) の公式を使っておこなわれることと対応している．

$\mathcal{M}(4)$ の 3 元を

$$\mathfrak{m}_0 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}, \quad \mathfrak{m}_1 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \quad \mathfrak{m}_2 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

とおく．例 2.6 より，$d \geq 2$ ならば，

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j) = \begin{cases} \frac{d+1}{d(d+2)(d-1)} & \text{if } i = j \\ \frac{-1}{d(d+2)(d-1)} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である．これを用いて，定理 2.7 の応用例を挙げよう．

例 2.8. 積分 $\int_{O(d)} g_{11}^2 g_{22}^2 dg$ を考える．$\binom{\mathfrak{m}}{1,1,2,2} = 1$ ならば，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$ である．よって，

$$\int_{O(d)} g_{11}^2 g_{22}^2 dg = \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0) = \frac{d+1}{d(d+2)(d-1)}.$$

例 2.9. 積分 $\int_{O(d)} g_{11}g_{12}g_{21}g_{22} dg$ を考える．$\binom{\mathfrak{m}}{1,1,2,2}\binom{\mathfrak{n}}{1,2,1,2} = 1$ ならば，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0, \mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ である．よって，

$$\int_{O(d)} g_{11}g_{12}g_{21}g_{22} dg = \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1) = \frac{-1}{d(d+2)(d-1)}.$$

例 2.10. 積分 $\int_{O(d)} g_{22}^4 dg$ を考える．任意の $\mathfrak{m}_i$ に対して $\binom{\mathfrak{m}_i}{2,2,2,2} = 1$ だから，

$$\int_{O(d)} g_{22}^4 dg = \sum_{i,j=0}^{2} \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j) = \frac{3}{d(d+2)}.$$

例 2.11. 積分 $\int_{O(d)} g_{11}^3 g_{12} dg$ を考える．任意の $\mathfrak{m}_i$ に対して $\binom{\mathfrak{m}_i}{1,1,1,2} = 0$ となってしまうから，

$$\int_{O(d)} g_{11}^3 g_{12} dg = 0.$$

今挙げた 4 つの例では，被積分関数がいずれも 4 次の多項式であった．もっと次数を上げてみよう．積分 $\int_{O(d)} g_{11}^2 g_{22}^2 g_{33}^2 g_{44}^2 g_{55}^2 dg$ を考える．定理 2.7 から

$$\int_{O(d)} g_{11}^2 g_{22}^2 g_{33}^2 g_{44}^2 g_{55}^2 dg = \mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$$

となる．ここで，$\mathfrak{l} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \in \mathcal{M}(10)$．$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ は $9!! = 945$ 次の行列 $\mathrm{Wg}_5^{O(d)}$ の行列成分であり，$\mathrm{Wg}_5^{O(d)}$ は $G_5^{O(d)}$ の（擬似）逆行列であった．行列のサイズが大きいので，定義からこの $\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ を具体的に求めることは難しそうである．しかし後で与える $\mathrm{Wg}^{O(d)}$ の新しい表示を使えば，

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = \frac{d^5 + 11d^4 + 5d^3 - 175d^2 - 122d + 408}{d(d+1)(d+2)(d+4)(d+6)(d+8)(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)}$$

と求まり，これが積分 $\int_{O(d)} g_{11}^2 g_{22}^2 g_{33}^2 g_{44}^2 g_{55}^2 dg$ の値である．

§ 3.　ゲルファント対と帯球関数

次章で述べる我々の主結果は，対称群と超八面体群のゲルファント対の理論を用いて述べられる．ここでは Macdonald の本 [5, VII-1,2] や Stembridge の論文 [12] に従い，その基本事項を復習する．

§ 3.1.　超八面体群 H_n

S_{2n} を $2n$ 次対称群とし，$H_n \subset S_{2n}$ を超八面体群とする．すなわち，H_n は S_{2n} における，互換の積 $(1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1\ 2n)$ についての中心化群である:

$$H_n = \{\zeta \in S_{2n} \mid \zeta(1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1\ 2n) = (1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1\ 2n)\zeta\}.$$

また，H_n は互換 $(2i-1\ 2i)$ と二重互換 $(2i-1\ 2j-1)(2i\ 2j)$ たちで生成される S_{2n} の部分群でもある．H_n は環積 $S_2 \wr S_n = (S_2)^n \rtimes S_n$ と同型であり，B_n 型ワイル群である．位数は $|H_n| = 2^n n!$ である．

(S_{2n}, H_n) はゲルファント対になる．すなわち，H_n の自明表現から誘導される S_{2n} の表現は，その既約分解における各既約表現の重複度が高々1 となる．S_{2n} の H_n による右剰余類への分解は，

$$S_{2n} = \bigsqcup_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}(2n)} \mathfrak{m} H_n \tag{3.1}$$

となる．ここで，(2.3) によって $\mathcal{M}(2n) \subset S_{2n}$ と見なしていたことに注意する．

群環 $\mathbb{C}[S_{2n}]$ を，畳み込み積に関する S_{2n} 上の複素数値関数全体のなす $\mathbb{C}$ 代数と自然に同一視する．$\mathbb{C}[S_{2n}]$ の元 e を

$$e = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\zeta \in H_n} \zeta \tag{3.2}$$

で定める．このとき，$\mathcal{H}_n := e\mathbb{C}[S_{2n}]e$ は，e を単位元とする環となり，さらに (S_{2n}, H_n) がゲルファント対であることから可換代数となる．これをゲルファント対 (S_{2n}, H_n) に関するヘッケ環という．群環の元を関数と思えば，$\mathcal{H}_n$ は両側 H_n-不変な関数全体のなす代数となる:

$$\mathcal{H}_n = \{f : S_{2n} \to \mathbb{C} \mid f(\zeta\sigma\zeta') = f(\sigma)\ (\forall\sigma \in S_{2n},\ \forall\zeta, \forall\zeta' \in H_n)\}.$$

§ 3.2.　剰余類型

置換 $\sigma \in S_{2n}$ に対して，頂点が $1, 2, \ldots, 2n$ で，辺が $\{\sigma(2i-1), \sigma(2i)\}$, $\{2i-1, 2i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ からなるグラフ $\Gamma(\sigma)$ を考える．便宜上，辺 $\{\sigma(2i-1), \sigma(2i)\}$ は青に，辺 $\{2i-1, 2i\}$ は赤に色づけられているとする．例えば，ある i, j に対して，$\{\sigma(2j-1), \sigma(2j)\} = \{2i-1, 2i\}$ となるときは，頂点 $2i-1$ と $2i$ が，赤と青の 2 本の辺で結ばれることにな

る．$\Gamma_1,\dots,\Gamma_s$ を $\Gamma(\sigma)$ の連結成分全体とすれば，各 Γ_j は偶数個 $2\alpha_j$ 個の頂点を含む．$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ を非増加に並び替えると，n の分割 $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_s)$ が定まる．この ρ を σ の**剰余類型** (coset-type) と呼び，$\Xi(\sigma)=\rho$ と表す．

§2.1 で定義したグラフ $\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は $\Gamma(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})$ と（辺の色を除いて）同型になる．よって，$\mathrm{loop}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は分割 $\Xi(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})$ の長さに一致する．

例 3.1. $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&1&6&5&2&7&4&8\end{smallmatrix}\right)\in S_8$ とする．$\Gamma(\sigma)$ は，2 つの連結成分

$$1\overset{\text{blue}}{—}3\overset{\text{red}}{—}4\overset{\text{blue}}{—}8\overset{\text{red}}{—}7\overset{\text{blue}}{—}2\overset{\text{red}}{—}1\quad;\quad 5\overset{\text{blue}}{—}6\overset{\text{red}}{—}5$$

から成る．(記号 $i\overset{\text{blue}}{—}j$ は頂点 i,j が青い辺で結ばれていることを表している．$i\overset{\text{red}}{—}j$ も同様．) 各連結成分内の頂点の個数は，$6,2$．よって，σ の剰余類型は $\Xi(\sigma)=(3,1)\vdash 4$ となる．

グラフ $\Gamma(\sigma)$ を観察することで，次の性質が容易に分かる（[5, VII (2.1)]）：任意の $\sigma\in S_{2n}$ に対して，$\Xi(\sigma^{-1})=\Xi(\sigma)$．さらに，$\sigma,\tau\in S_{2n}$ に対して，

$$\Xi(\sigma)=\Xi(\tau)\quad\Leftrightarrow\quad H_n\sigma H_n=H_n\tau H_n.$$

すなわち，剰余類型はまさに S_{2n} の H_n-両側剰余類を決定している．分割 $\rho\vdash n$ に対して $H_\rho=\{\sigma\in S_{2n}\mid\Xi(\sigma)=\rho\}$ とおくと，S_{2n} の H_n-両側剰余類への分解

$$S_{2n}=\bigsqcup_{\rho\vdash n}H_\rho$$

が得られる．特に，$H_{(1^n)}=H_n$ である．また，ヘッケ環 $\mathcal{H}_n$ は

$$\mathcal{H}_n=\{f:S_{2n}\to\mathbb{C}\mid \text{任意の }\rho\vdash n\text{ に対して，}f\text{ は }H_\rho\text{ で定数}\}$$

と言い換えられる．

§ 3.3. 帯球関数と帯多項式

次にゲルファント対 (S_{2n},H_n) の帯球関数を復習しよう．$2n$ の分割 μ に対して，χ^μ を S_{2n} の既約指標とする．また，$f^\mu=\chi^\mu(\mathrm{id})$ を既約表現の次元とする．f^μ は，型 μ の標準ヤング盤の個数に一致する．

各 $\lambda\vdash n$ に対し，$2\lambda=(2\lambda_1,2\lambda_2,\dots)$ と定める．ゲルファント対 (S_{2n},H_n) の**帯球関数** (zonal spherical function) ω^λ を $\omega^\lambda=\chi^\lambda e=e\chi^\lambda\in\mathbb{C}[S_{2n}]$ で定義する．ここで，e は (3.2) で定まる元である．関数としてみると，

$$\omega^\lambda(\sigma)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\zeta\in H_n}\chi^{2\lambda}(\sigma\zeta),\qquad \sigma\in S_{2n}$$

である．$\{\omega^\lambda\mid\lambda\vdash n\}$ は $\mathcal{H}_n$ の基底をなす．ω^λ の H_ρ での値を ω^λ_ρ と書く．

最後に，帯多項式を定義しよう．長さ $l = \ell(\rho)$ の分割 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l)$ に対し，$p_\rho = \prod_{i=1}^{l} p_{\rho_i}$ とおく．ここで，$p_k(x_1, x_2, \dots) = x_1^k + x_2^k + \cdots$ は冪和対称関数である．分割 $\lambda \vdash n$ に対し，**帯多項式** (zonal polynomial) Z_λ は

$$Z_\lambda = 2^n n! \sum_{\rho \vdash n} z_{2\rho}^{-1} \omega_\rho^\lambda p_\rho \tag{3.3}$$

で定義される対称関数である．ここで，分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ に対して，重複度 $m_i(\mu) = |\{j \geq 1 \mid \mu_j = i\}|$ を使って，$z_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$ と定めている．帯多項式 Z_λ はジャック多項式 $J_\lambda^{(\alpha)}$ の $\alpha = 2$ のときに一致する（[5, VII (2.23)]）．ここでは，Z_λ の特殊値

$$Z_\lambda(1^d) = Z_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_{d}) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (d + 2j - i - 1)$$

が重要である（[5, VII (2.25)]）．ここで，$\prod_{(i,j)\in\lambda} := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i}$ としている．$Z_\lambda(1^d)$ は $\ell(\lambda) > d$ ならば 0 になり，それ以外では正の整数である．

§ 4.　ワインガルテン行列の新しい表示

§ 4.1.　主定理

前章で復習した言葉を用いて，主定理を述べよう．§2 で登場したワインガルテン行列の成分を記述することが目的である．

定理 4.1 (Collins - M [2])**.**　$\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n) (\subset S_{2n})$ に対して，

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq d}} \frac{f^{2\lambda} \omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}{Z_\lambda(1^d)}. \tag{4.1}$$

定理が示すように，$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ は，$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}$ の剰余類型にのみ依存している．$d \geq n$ のとき，定理の式の和は，n の分割全体を走る．この事実は特に，$d \to \infty$ での挙動を見る際に重要である．

例 4.2 ($d = 1$)**.**　$\chi^{(2n)} \equiv 1$ なので，$\omega^{(n)} \equiv 1$ である．また，$Z_{(n)}(1^1) = \prod_{j=1}^{n} (2j - 1) = (2n-1)!!$ である．よって，定理 4.1 より，任意の $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)$ に対して，

$$\mathrm{Wg}^{O(1)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{1}{(2n-1)!!} \frac{f^{(2n)} \omega^{(n)}(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}{Z_{(n)}(1^1)} = \left(\frac{1}{(2n-1)!!} \right)^2$$

を得る．しかしながら，$O(1) = \{\pm 1\}$ なので，§2.4 のような積分計算において $\mathrm{Wg}^{O(1)}$ はわざわざ必要ではない．

例 4.3 ($n=2, d>1$). $f^{(4)}=1$, $f^{(2^2)}=2$, $Z_{(2)}(1^d)=d(d+2)$, $Z_{(1^2)}(1^d)=d(d-1)$ は直ちに分かる．また $\omega^{(2)}_{(1^2)}=\omega^{(2)}_{(2)}=1$, $\omega^{(1^2)}_{(1^2)}=1$, $\omega^{(1^2)}_{(2)}=-\frac{1}{2}$ も定義から容易に求められる．$\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(4)$ に対し，剰余類型 $\Xi(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ のとき (1^2) で，それ以外では (2) となる．よって，$d>1$，$\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)$ ならば

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=\frac{1}{3}\left(\frac{\omega^{(2)}_{\Xi(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}}{d(d+2)}+\frac{2\omega^{(1^2)}_{\Xi(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}}{d(d-2)}\right)=\begin{cases}\frac{d+1}{d(d+2)(d-1)} & \mathfrak{m}=\mathfrak{n}\text{ のとき}\\ \frac{-1}{d(d+2)(d-1)} & \text{それ以外.}\end{cases}$$

これは例 2.6 の結果に一致する．

定理 4.1 が与える表示式において，一般には ω^λ_μ の値を知ることが一番難しい．これについては，[10] で，n が 12 以下の分割に対しての表が与えられている．[2] ではその表を使って，$n\leq 6$ に対しての $\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n))$ の値を全て計算した．なお，それ以前に [3] で $n=4$ までは計算されていた．

§ 4.2. 主定理の証明

天下り的な証明ではあるが，(4.1) で定義されるワインガルテン行列

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}_n=\frac{1}{(2n-1)!!}\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\leq d}}\frac{f^{2\lambda}}{Z_\lambda(1^d)}\cdot(\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)}$$

がグラム行列 $G^{O(d)}_n$ の擬似逆行列となることを示そう．グラム行列は実対称行列であるから，定義 2.4 より 2 つの等式

$$G^{O(d)}_n\cdot\mathrm{Wg}^{O(d)}_n\cdot G^{O(d)}_n=G^{O(d)}_n,\qquad \mathrm{Wg}^{O(d)}_n\cdot G^{O(d)}_n\cdot\mathrm{Wg}^{O(d)}_n=\mathrm{Wg}^{O(d)}_n \tag{4.2}$$

を示せば良い．次の補題を用意する．

補題 4.4. λ,μ を n の分割とし，$\mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathcal{M}(2n)$ とする．このとき，

$$\sum_{\mathfrak{l}\in\mathcal{M}(2n)}\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{l})\omega^\mu(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{n})=\delta_{\lambda\mu}\frac{(2n-1)!!}{f^{2\lambda}}\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}).$$

証明． S_{2n} の H_n による右剰余類への分解 (3.1) と ω^λ が両側 H_n-不変関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{l}\in\mathcal{M}(2n)}\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{l})\omega^\mu(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{n})&=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\zeta\in H_n}\sum_{\mathfrak{l}\in\mathcal{M}(2n)}\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}(\mathfrak{l}\zeta))\omega^\mu((\mathfrak{l}\zeta)^{-1}\mathfrak{n})\\ =&\frac{1}{2^n n!}\sum_{\sigma\in S_{2n}}\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\sigma)\omega^\mu(\sigma^{-1}\mathfrak{n})=\frac{1}{2^n n!}(\omega^\lambda\omega^\mu)(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})\end{aligned}$$

となる．帯球関数の良く知られた性質

$$\omega^\lambda \omega^\mu = \delta_{\lambda\mu} \frac{(2n)!}{f^{2\lambda}} \omega^\lambda$$

を使うことで補題を得る． □

等式 (3.3) と同値な式として次がある:

$$p_\rho(x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\lambda \vdash n} f^{2\lambda} \omega^\lambda_\rho Z_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_d), \qquad \rho \vdash n.$$

変数を $(x_1, x_2, \dots, x_d) = (1, 1, \dots, 1)$ と特殊化することで，等式

$$d^{\ell(\rho)} = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\lambda \vdash n} f^{2\lambda} \omega^\lambda_\rho Z_\lambda(1^d) \tag{4.3}$$

を得る．よって，$\mathrm{loop}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ は $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}$ の剰余類型の長さと等しいことから，

$$G^{O(d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\lambda \vdash n} f^{2\lambda} Z_\lambda(1^d) \omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}), \qquad \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n),$$

という表示を得る．この表示と (4.1) と補題 4.4 から，

$$G^{O(d)}_n \cdot \mathrm{Wg}^{O(d)}_n = \mathrm{Wg}^{O(d)}_n \cdot G^{O(d)}_n = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le d}} f^{2\lambda} \cdot (\omega^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)} \tag{4.4}$$

となる．同様に等式 (4.2) が示せる．よって，主定理の証明が完了した．

等式 (4.3) の両辺に d^{-n} をかけて $d \to \infty$ とすると，

$$\delta_{\rho, (1^n)} = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\lambda \vdash n} f^{2\lambda} \omega^\lambda_\rho, \qquad \rho \vdash n \tag{4.5}$$

を得る．一方 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}$ の剰余類型が (1^n) となるのは，$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ のときに限る．したがって，式 (4.4) から，$d \ge n$ のときに限り，$G^{O(d)}_n \cdot \mathrm{Wg}^{O(d)}_n$ は単位行列となる．すなわちこのとき $G^{O(d)}_n$ は可逆であり，$\mathrm{Wg}^{O(d)}_n$ がその逆行列である．

§ 5. 直交群のワインガルテン計算法についての補足

§ 5.1. 主定理の応用

次は定理 2.7 と定理 4.1 から容易に示せる．ランダム行列 g の「部分トレース」のモーメントを与えている．

命題 5.1 (Collins - M [2])**.** k, d, n を正の整数とし，$k \le d$ とする．このとき，

$$\int_{O(d)} (g_{11} + g_{22} + \cdots + g_{kk})^{2n} dg = \mathrm{tr}\ (G_n^{O(k)} \cdot \mathrm{Wg}_n^{O(d)}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le k}} f^{2\lambda} \frac{Z_\lambda(1^k)}{Z_\lambda(1^d)}.$$

補足 2. 特に $k = d$ のとき，

$$\frac{1}{(2n-1)!!} \int_{O(d)} \mathrm{tr}\ (g)^{2n} dg = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le d}} \frac{f^{2\lambda}}{(2n-1)!!} \tag{5.1}$$

という等式を得る．ここで，$\mathbb{P}_n(\lambda) = \frac{f^{2\lambda}}{(2n-1)!!}$ とおくと，$\mathbb{P}_n$ は n の分割の上の確率測度を定めており，ジャック測度と呼ばれるものの特殊な場合である ([6])．上の式の右辺は，ジャック測度における確率変数 $\lambda \mapsto \ell(\lambda)$ の分布を与えている．

系 5.2. 任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して，

$$\int_{O(d)} g_{ij}^{2n} dg = \frac{(2n-1)!!}{\prod_{k=0}^{n-1}(d+2k)}.$$

証明. 命題 5.1 で $k = 1$ とせよ．また，ハール測度の性質から，g_{ij} と g_{11} は同分布である． □

i, j を固定し，各 $d \ge 1$ に対し $O(d)$ 上の確率変数 X_d を $X_d(g) = \sqrt{d} g_{ij}$ で定める．系 5.2 から，X_d の偶数次のモーメント $\mathbb{E}(X_d^{2n})$ が $d \to \infty$ で $(2n-1)!!$ に収束することが分かる．これはすなわち，確率変数列 $\{X_d\}_{d=1,2,\ldots}$ が Z へ分布収束していることを意味する．ここで，Z は平均 0，分散 1 の正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う確率変数である．

ここで挙げた命題や系は，ワインガルテン計算法を使わずに得ることも可能である．

§5.2. ワインガルテン行列の成分の漸近挙動

$\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)$ を固定する．定理 4.1 と (4.5) より，$d \to \infty$ のとき

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} d^{-n} + \mathrm{O}(d^{-n-1}) \tag{5.2}$$

が成り立つ．$2n$ 個の正の整数 $i_1, \ldots, i_{2n}, j_1, \ldots, j_{2n}$ を固定すれば，積分の漸近展開

$$\int_{O(d)} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_{2n} j_{2n}} dg = \left[\sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}(2n)} \binom{\mathfrak{m}}{i_1, i_2, \ldots, i_{2n}} \binom{\mathfrak{m}}{j_1, j_2, \ldots, j_{2n}} \right] d^{-n} + \mathrm{O}(d^{-n-1})$$

を得る．これは序章で述べた Weingarten ([13]) の結果 (1.1) に他ならない．

漸近展開 (5.2) より精密な結果については，次が知られている．

命題 5.3 (Collins-Śniady [3]). $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)$ に対し，$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}$ の剰余類型を μ とすれば，$d \to \infty$ において

$$\mathrm{Wg}^{O(d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \left[(-1)^{n-\ell(\mu)} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} c_{\mu_i - 1}\right] d^{-2n+\ell(\mu)} + \mathrm{O}(d^{-2n+\ell(\mu)-1}).$$

ここで，$c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ はカタラン数.

さらにこれは [7] で精密化されている.

§5.3. 特殊直交群のワインガルテン計算法

混乱を避けるために，ここでは直交群 $O(d)$ のハール測度を $\mu_{O(d)}(dg)$ と書くことにする．特殊直交群 $SO(d) = \{g \in O(d) \mid \det(g) = 1\}$ の正規化されたハール測度を $\mu_{SO(d)}(dg)$ と書く．次が成り立つ.

命題 5.4. $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, d\}$ を固定する．$d > k$ ならば,

$$\int_{SO(d)} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_k j_k} \mu_{SO(d)}(dg) = \int_{O(d)} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_k j_k} \mu_{O(d)}(dg).$$

証明. 仮定 $d > k$ より，$i_1, i_2, \dots, i_k$ のいずれとも異なる $p \in \{1, \dots, d\}$ が存在する．$g_1 \in O(d)$ を対角行列で，(p,p) 成分のみ -1 で他の対角成分は 1 なるものとする．このとき，$\det(g_1) = -1$ である．$f(g) = g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_k j_k}$ と定めると，p の選び方から，$f(g_1 g) = f(g)$ が全ての $g \in O(d)$ で成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
&\int_{O(d)} f(g)\mu_{O(d)}(dg) \\
&= \int_{O(d)} f(g)\frac{1+\det(g)}{2}\mu_{O(d)}(dg) + \int_{O(d)} f(g)\frac{1-\det(g)}{2}\mu_{O(d)}(dg) \\
&= \int_{O(d)} f(g)\frac{1+\det(g)}{2}\mu_{O(d)}(dg) + \int_{O(d)} f(g_1 g)\frac{1-\det(g_1 g)}{2}\mu_{O(d)}(dg) \\
&= \int_{O(d)} f(g)(1+\det(g))\mu_{O(d)}(dg) = \int_{SO(d)} f(g)\mu_{SO(d)}(dg).
\end{aligned}$$

□

したがって，d が十分の大きければ，特殊直交群のワインガルテン計算法は，直交群のそれに一致する．しかし，d が小さいときには違いが現れる.

§6. ユニタリ群と斜交群のワインガルテン計算法

これまでに述べた直交群上の議論は，ユニタリ群や斜交群に対しても同様に展開される．その中身を簡単に紹介する.

§ 6.1. 斜交群のワインガルテン計算法

斜交群 (symplectic group) を

$$Sp(2d) = \{g \in U(2d) \mid {}^t gJg = J\}, \quad J = J_d = \begin{pmatrix} O_d & I_d \\ -I_d & O_d \end{pmatrix},$$

と定める．$\mu_{Sp(2d)}(dg)$ を $Sp(2d)$ の正規化されたハール測度とする．分割 $\lambda \vdash n$ に対し，対称関数 Z'_λ を

$$Z'_\lambda = 2^n n! \sum_{\rho \vdash n} (-1)^{n-\ell(\rho)} z_\rho^{-1} \omega_\rho^{\lambda'} p_\rho$$

と定義する．ここで，λ' は λ の共役な分割である．ジャック関数 $J_\lambda^{(\alpha)}$ を用いれば，$Z'_\lambda = 2^n J_\lambda^{(1/2)}$ である．次の特殊値が重要である．

$$Z'_\lambda(1^d) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (2d - 2i + j + 1).$$

直交群の場合と同様の議論によって，次が成り立つ．

定理 6.1. $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n})$, $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_{2n})$ を $\{1, \ldots, d\}$ の元の列とする．$\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{2n})$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{2n})$ を $\{0, 1\}$ の元の列とする．このとき，

$$\int_{Sp(2d)} \prod_{k=1}^{2n} g_{i_k + \epsilon_k d, j_k + \eta_k d} \ \mu_{Sp(2d)}(dg)$$
$$= \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{M}(2n)} \mathrm{Wg}^{Sp(2d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) (-1)^{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{\mathfrak{m}(2i-1)} + \eta_{\mathfrak{n}(2i-1)})} \mathbf{1}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1}_\mathfrak{n}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{\eta}).$$

ここで，

$$\mathbf{1}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\epsilon}) := \begin{pmatrix} \mathfrak{m} \\ i_1, \ldots, i_{2n} \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \delta_{1, \epsilon_{\mathfrak{m}(2k-1)} + \epsilon_{\mathfrak{m}(2k)}}$$

でありまた，

$$\mathrm{Wg}^{Sp(2d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \mathrm{sgn}(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}) \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le d}} \frac{f^{\lambda \cup \lambda} \omega^{\lambda'}(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}{Z'_\lambda(1^d)}.$$

ただし，$\lambda \cup \lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots)$ である．

この斜交群のワインガルテン関数は，twisted ゲルファント対 $(S_{2n}, H_n, \mathrm{sgn}|_{H_n})$ の twisted 帯球関数 π^λ（[5, VII.2, Example 6-7]）を用いて，

$$\mathrm{Wg}^{Sp(2d)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le d}} \frac{f^{\lambda \cup \lambda} \pi^\lambda(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})}{Z'_\lambda(1^d)}.$$

ともかける．また，$d \geq n$ ならば，

$$\mathrm{Wg}^{Sp(2d)}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = (-1)^n \mathrm{sgn}(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})[\mathrm{Wg}^{O(d')}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})]_{d'=-2d}$$

となる．

§ 6.2. ユニタリ群のワインガルテン計算法

$\mu_{U(d)}(dg)$ をユニタリ群 $U(d)$ の正規化されたハール測度とする．

定理 6.2 (Collins [1])**.**

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \quad i'_1, i'_2, \ldots, i'_n, \quad j_1, j_2, \ldots, j_n, \quad j'_1, j'_2, \ldots, j'_n$$

を $\{1, 2, \ldots, d\}$ の元とする．このとき，

$$\int_{U(d)} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n} \overline{g_{i'_1 j'_1} g_{i'_2 j'_2} \cdots g_{i'_n j'_n}}\ \mu_{U(d)}(dg)$$
$$= \sum_{\sigma \in \tau \in S_n} \mathrm{Wg}^{U(d)}(\sigma^{-1}\tau) \prod_{k=1}^{n} \delta_{i_k, i'_{\sigma(k)}} \delta_{j_k, j'_{\tau(k)}}.$$

ただし，$\mathrm{Wg}^{U(d)} : S_n \to \mathbb{Q}$ は，

$$\mathrm{Wg}^{U(d)}(\sigma) = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq d}} \frac{(f^\lambda)^2 \chi^\lambda(\sigma)}{s_\lambda(1^d)} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq d}} \frac{f^\lambda \chi^\lambda(\sigma)}{\prod_{(i,j) \in \lambda}(d + j - i)}$$

で与えられる．ここで，s_λ はシューア関数である．

§ 6.3. ユチス・マーフィー元

ワインガルテン関数は，対称群の表現論で重要なユチス・マーフィー元を用いて表示することもできる．これは，ワインガルテン計算法と純粋組合せ論との橋渡しとなるものであろう．

$J_1, \ldots, J_n$ をユチス・マーフィー元 (JM 元，Jucys-Murphy element) とする．それらは，対称群 S_n の群環 $\mathbb{C}[S_n]$ の元であり，互換の和

$$J_1 = 0, \qquad J_k = (2\ k) + (3\ k) + \cdots + (k-1\ k) \quad (2 \leq k \leq n)$$

で与えられる．

$\mathrm{Wg}_n^{U(d)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Wg}^{U(d)}(\sigma)\sigma$ とおく．これは $\mathbb{C}[S_n]$ の中心元である．$\mathrm{Wg}_n^{U(d)}$ は次の表示を持つ．ここでは $d \geq n$ を仮定する．

定理 6.3 (M - Novak [9])**.** $d \geq n$ のとき，

$$\mathrm{Wg}_n^{U(d)} = (d + J_1)^{-1} \cdots (d + J_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h_k(J_1, \ldots, J_n) d^{-n-k}.$$

ここで，h_k は完全対称多項式: $h_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$.

この定理で登場しているような JM 元を変数に持つ対称多項式は，近年活発に研究されている．([9] の参考文献を参照.)

定理 6.3 の「直交群」版は，ごく最近 Zinn-Justin [14] によって得られた．ヘッケ環 $\mathcal{H}_n$ の元 $\hat{\mathrm{Wg}}_n^{O(d)}$ を

$$\hat{\mathrm{Wg}}_n^{O(d)} := \frac{1}{(2n)!}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{f^{2\lambda}}{Z_\lambda(1^d)}\omega^\lambda$$

と定める．ワインガルテン行列 $\mathrm{Wg}_n^{O(d)}$ の成分は，この関数の特殊値（の定数倍）であった (定理 4.1).

定理 6.4 (Zinn-Justin [14]. M [7] も参照)**.** $d \geq 2n-1$ のとき，

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{Wg}}_n^{O(d)} &= (d+J_1)^{-1}(d+J_3)^{-1}\cdots(d+J_{2n-1})^{-1}e \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d^{-n-k} h_k(J_1, J_3, \ldots, J_{2n-1})e.\end{aligned}$$

ここで，e は (3.2) で定義される元である．

より詳しくは，[8] にまとめている．

References

[1] Collins, B., Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability, *Int. Math. Res. Not.* **17** (2003), 953–982.

[2] Collins, B. and Matsumoto, S., On some properties of orthogonal Weingarten functions, *J. Math. Phys.* **50**, 113516 (2009), 14pp.

[3] Collins, B. and Śniady, P., Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group, *Comm. Math. Phys.* **264** (2006), no. 3, 773–795.

[4] Collins, B. and Stolz, M., Borel theorems for random matrices from the classical compact symmetric spaces, *The Annals of Probability* **36** (2008), no.3, 876–895.

[5] Macdonald, I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.

[6] Matsumoto, S., Jack deformations of Plancherel measures and traceless Gaussian random matrices, *Electron. J. Combin.* **15** (2008), # R149, 18pp.

[7] Matsumoto, S., Jucys-Murphy elements, orthogonal matrix integrals, and Jack measures, *The Ramanujan Journal* **26** (2011), no. 1, 69–107.

[8] 松本詔，Jucys-Murphy 元を変数とする対称関数 (Japanese)，*RIMS Kôkyûroku* no.1770 (2011), 35–51.

[9] Matsumoto, S. and Novak, J., Jucys-Murphy elements and unitary matrix integrals, *Int. Math. Res. Not.* (2012), rnr267, 36 pages. DOI 10.1093/imrn/rnr267. arXiv:0905.1992v3.

[10] Parkhurst, A. M. and James, A. T., Zonal polynomials of order 1 through 12, *Selected tables in mathematical statistics*, vol. 2, (1974), 199-388.

[11] 齋藤正彦，線型代数演習，基礎数学 4，東京大学出版会, 1985.

[12] Stembridge, J. R., On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra, *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), no. 1, 71–95.
[13] Weingarten, D., Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank, *J. Math. Phys.* **19** (1978): 999–1001.
[14] Zinn-Justin, P., Jucys–Murphy elements and Weingarten matrices, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010), no. 2, 119–127.