RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B36 (2012), 131–139

Coxeter system and the category $\mathcal{O}$

By

阿部 紀行（Noriyuki Abe）*

Abstract

For a Coxeter system, we introduce an analogue of the category $\mathcal{O}$. If the Coxeter system is the Weyl group of a semisimple Lie algebra, then that category is simlar to the BGG category with an integral regular infinitesimal character. We also present some properties of this category.

§1. はじめに

Cartan-Weyl による複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の分類において重要であったのが，表現の最高ウェイトであった．そのような最高ウェイトを用いた，無限次元まで含めた表現の研究を系統的に行うために Bernstein-Gelfand-Gelfand により導入されたのが，圏 $\mathcal{O}$ である [BGG76]．Bernstein-Gelfand-Gelfand はその後圏 $\mathcal{O}$ の研究のために，有限次元表現とのテンソル積をとるという操作を開発した [BGG75]．このアイデアはその後様々な研究者により整理され，今日移動関手と呼ばれる形に整理されている．また，その中でも特に壁越え関手と呼ばれる関手を用いて，Weyl 群の連接表現と呼ばれる表現が $\mathcal{O}$ の Grothendieck 群上に定義された．これらの研究により，圏 $\mathcal{O}$ が Weyl 群の組み合わせ論により支配されていることが強く認識されて来たが，Soergel [Soe90] はこれに関し，次のような決定的な結果を示した．すなわち，圏 $\mathcal{O}$ は Weyl 群の Coxeter 系としての構造にしか依らないのである．ρ を正ルートの和の半分とする．また支配的な元 $\lambda \in \mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ に対し，$\mathcal{O}$ の充満部分圏 $\mathcal{O}_\lambda$ を，無限小指標 λ を持ちその重みがルートの整数係数結合に $\lambda + \rho$ を加えた形をしている対象全体からなるものとして定める．

定理 1.1 (Soergel [Soe90])**.** $\mathfrak{g}$ を複素半単純 *Lie* 代数とし，*Borel* 部分代数 $\mathfrak{b}$ と *Cartan* 部分代数 $\mathfrak{h}$ を固定する．W_λ を λ に関する整 *Weyl* 群とし，S_λ をその単純鏡

Received September 11, 2009. Accepted April 30, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 22E47, Secondary 17B10.
Key Words: Semisimple Lie algebra, Coxeter system, Moment graph, Category $\mathcal{O}$
本研究は JSPS 科研費 21840016 の助成を受けたものです
*北海道大学・創成研究機構（〒 001-0021 札幌市北区北 21 条西 10 丁目）
e-mail: abenori@math.sci.hokudai.ac.jp

映全体とする．更に，$\mathrm{Stab}_W(\lambda) \subset W_\lambda$ を λ の固定部分群とする．この時，$\mathcal{O}_\lambda$ は組 $(W_\lambda, S_\lambda, \mathrm{Stab}_W \lambda)$ にしか依らない．つまり，$\mathfrak{g}', \mathfrak{b}', \mathfrak{h}', \mathcal{O}'_{\lambda'}, W'_{\lambda'}, S'_{\lambda'}$ を同じ組み合わせとしたとき，同型 $W_\lambda \simeq W'_{\lambda'}$ で $S_\lambda \simeq S'_{\lambda'}$ と $\mathrm{Stab}_W \lambda \simeq \mathrm{Stab}_{W'} \lambda'$ を導くものが存在すれば，ある完全な圏同値 $\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathcal{O}'_{\lambda'}$ が存在する．更に，この同値は既約表現や *Verma* 加群を対応する既約表現や *Verma* 加群に移す.

この定理の証明は，圏 $\mathcal{O}_\lambda$ の構造の組み合わせ論的データを $(W_\lambda, S_\lambda, \mathrm{Stab}_W(\lambda))$ を用いて記述することにより行われる．当初の証明ではその組み合わせ論を記述するデータを圏 $\mathcal{O}_\lambda$ を用いて作り，それが実は $(W_\lambda, S_\lambda, \mathrm{Stab}_W(\lambda))$ にしか寄らないことを示していたが，その後 Soergel や Fiebig の研究により，組 $(W_\lambda, S_\lambda, \mathrm{Stab}_W(\lambda))$ からそのようなデータを構成する方法が得られた．従って，組 $(W_\lambda, S_\lambda, \mathrm{Stab}_W(\lambda))$ から圏 $\mathcal{O}_\lambda$ を再構成することができる.

ここでは，Fiebig の方法を用いて一般の Coxeter 系 (W, S) に対し圏 $\mathcal{O}$（の類似物）を構成し，[Abe12] において得られた，その圏の構造に関する結果をいくつか述べる．これらの考察は，圏 $\mathcal{O}$ の研究の見直しと整理につながり，また一方で Coxeter 系に関する新たな視点を与えることが期待される．尚，前述と比べて組が一つ減っているが，これは $\mathrm{Stab}_W(\lambda)$ が自明な時のみを考えていることに対応する.

§ 2. Moment graph の理論

以下，(W, S) を Coxeter 系であって，$\#S < \infty$ なるものとする．また，$T = \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}$ とおく．この時，次の性質を満たす $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現 V が存在する．$w \in W$ に対し，$V^w = \{v \in V \mid w(v) = v\}$ とおく.

V^w が余次元 1 であることと，$w \in T$ は同値.

このような表現を一つとり固定しておく．また，$t \in T$ に対し，$\alpha_t \in V^*$ を $V^t = \operatorname{Ker} \alpha_t$ なるものとしてとる．$S = S(V^*)$ を V^* 上の対称代数とし，V^* の次数を 2 とすることで，S を次数付き代数と見なす．次数付き S 代数 Z を次で定める.

$$Z = \left\{ (z_w)_w \in \prod_{w \in W} S \;\middle|\; \text{全ての } t \in T,\ w \in W \text{ に対し } z_{tw} \equiv z_w \pmod{\alpha_t} \right\}$$

Z は Coxeter 系 (W, S) に対応する moment graph の構造層の大域切断全体である [Fie08].

$x \in W$ の Z への作用を $x(z_w)_w = (z_{wx^{-1}})_w$ と定める．$s \in S$ と次数付き Z 加群 M に対し，$\theta_s^Z(M) = Z \otimes_{Z^s} M\langle -1 \rangle$ とおく．但し，$Z^s = \{z \in Z \mid s(z) = z\}$，$\langle -1 \rangle$ は次数を -1 ずらすことを意味する．この時次が成り立つ.

命題 2.1 (Fiebig [Fie08]). θ_s^Z は自己随伴な完全関手であり，また非自明な自然変換 $\mathrm{Id} \to \theta_s^Z$ と $\theta_s^Z \to \mathrm{Id}$ を持つ.

以下の定理は一般化された圏 $\mathcal{O}$ の構成の基本となる.

定理 2.2 (Fiebig [Fie08]). 次を満たす次数付き Z 加群の族 $\{\widetilde{B}(x)\}_{x\in W}$ が一意的に存在する．

(1) $\widetilde{B}(e)=S$，但し $z=(z_w)_w\in Z$ は $z\cdot p=z_e p$ $(p\in S=\widetilde{B}(e))$ により作用する．

(2) $x\in W, s\in S, xs>x$ とすると，適当な $m_{y,k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\theta_s^Z\widetilde{B}(x)\simeq\widetilde{B}(xs)\oplus\bigoplus_{y<x,k\in\mathbb{Z}}\widetilde{B}(y)^{m_{y,k}}$ が成り立つ．

注意 2.3. 一意性はほとんど明らかである．存在はBraden-MacPherson [BM01] による交叉コホモロジーの記述により得られる．よく知られている通り，(旗多様体上の）交叉コホモロジーは単純対象に対応するが，以下で見るように $\widetilde{B}(x)$ は射影的対象に対応する．これは，Koszul 双対性 [BGS96] の一つの表れでもある．

尚，Braden-MacPherson の構成は旗多様体に限らず，より一般にトーラスが適当な条件を満たして作用する代数多様体に関して行うことができる．それに対応して，上記 $\widetilde{B}(x)$ も Coxeter 系でなくても一般の順序集合及び $\{\alpha_t\}$ に対応する V^* の元が与えられていれば定めることができる [Fie08].

以上の Z や $\widetilde{B}(x)$ と圏 $\mathcal{O}$ との関係は次の通りである．$\mathcal{O}_\rho$ を $\mathfrak{g}$ に付随する圏 $\mathcal{O}$ の充満部分圏で，無限小指標 ρ（正ルートの和の半分）を持つ対象全体からなるものとする．最高ウェイト $x\rho-\rho$ を持つ既約対象を $L(x)$ と書くこととし，$P(x)$ を $L(x)$ の射影的被覆とする．また，$\mathcal{P}$ を $\mathcal{O}_\rho$ の射影的対象全体からなる充満部分圏とする．この時，次が成り立つ．$\mathbb{C}$ を S/V^*S と同一視し，1 次元 S 加群と見なす.

定理 2.4 (Soergel [Soe90], Fiebig [Fie03, Fie06]). $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\rho}$ を $\mathcal{O}_\rho$ の恒等関手とする．また，$V=\mathfrak{h}$ とおく．

(1) $\mathcal{O}_\rho$ は有限生成 $\mathrm{End}\left(\bigoplus_{x\in W}P(x)\right)$ 加群全体のなす圏と圏同値である．

(2) 同型 $\mathrm{End}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\rho}\simeq Z\otimes_S\mathbb{C}$ が存在する．

(3) 忘却関手の制限 $\mathbb{V}\colon\mathcal{P}\to Z\otimes_S\mathbb{C}$-mod は忠実充満である．

(4) $\mathbb{V}(P(x))=\widetilde{B}(x)\otimes_S\mathbb{C}$.

従って，圏 $\mathcal{O}_\rho$ は有限生成 $\mathrm{End}\left(\bigoplus_{x\in W}\widetilde{B}(x)\otimes_S\mathbb{C}\right)$ 加群全体のなす圏と圏同値である.

以上を参考にして，次のように定義する．

- $\widetilde{A}=\mathrm{End}\left(\bigoplus_{x\in W}\widetilde{B}(x)\right)$.
- $A=\widetilde{A}\otimes_S\mathbb{C}$.
- $\widetilde{\mathcal{O}}$: 右 $\widetilde{A}$ 加群全体のなす圏.
- $\mathcal{O}$: 右 A 加群全体のなす圏.

(W,S) が有限次元半単純 Lie 環の Weyl 群の場合，ここで定義された $\mathcal{O}$ は上でのべた $\mathcal{O}_\rho$ に近い．但し，定義の間には少なくとも以下の二つのギャップがある．

(1) A の定義が $\mathrm{End}\left(\bigoplus_{x\in W}\widetilde{B}(x)\otimes_S\mathbb{C}\right)$ ではない．

(2) $\mathcal{O}$ の定義から「有限生成」が抜けている．

(1) に関しては問題ない．すなわち，次が成り立つ．

補題 2.5. 自然な射 $\mathrm{Hom}_Z(\widetilde{B}(x),\widetilde{B}(y))\otimes_S\mathbb{C}\to\mathrm{Hom}_Z(\widetilde{B}(x)\otimes_S\mathbb{C},\widetilde{B}(y)\otimes_S\mathbb{C})$ は同型である．

この補題は，θ_s^Z を用いて x の長さに関する帰納法により示すことができる．

一方，(2) によりここで定めた圏 $\mathcal{O}$ ともともとの圏 $\mathcal{O}_\rho$ は一致しない．しかし，有限生成性の仮定をおくことには，次のような問題がある．

補題 2.6. A が *Noether* 環であることと，$\#W<\infty$ は同値である．

Proof. $\#W<\infty$ ならば $\dim A<\infty$ であるから A は Noether である．一方，A は右 A 加群として，$A=\bigoplus_{y\in W}\mathrm{Hom}_Z(\bigoplus_{x\in W}\widetilde{B}(x),\widetilde{B}(y))\otimes_S\mathbb{C}$ なる分解を持つ．従って，$\#W=\infty$ ならば A は無限個の直和因子を持ち，従って Noether ではない． □

よって，$\#W=\infty$ の場合には有限生成 A 加群全体のなす圏は Abel 圏にはならず，都合が悪い．以上の理由によって，ここでは $\mathcal{O}$ の対象には有限生成性を課さないことにする．

§ 3. 加群

いくつかの加群を定義する．$\widetilde{B}=\bigoplus_{y\in W}B(y)$ とおく．$x\in W$ とする．

$$\widetilde{P}(x)=\mathrm{Hom}_Z(\widetilde{B},B(x))\in\widetilde{\mathcal{O}}$$

とおく．これは射影的 $\widetilde{A}$ 加群となる．また，

$$P(x)=\widetilde{P}(x)\otimes_S\mathbb{C}\in\mathcal{O}$$

とおく．これは射影的 A 加群を与え，また唯一の既約商を持つ．その既約商を $L(x)$ と書くことにする．(W,S) が Weyl 群の場合には，これは最高ウェイト $x\rho-\rho$ を持つ単純対象に対応する．

次に Verma 加群に対応する対象を構成しよう．まずは，対応する Z 加群 $V(x)$ を次のように定める．S 加群としては $V(x)=S$ であり，$z=(z_w)_w\in Z$ の作用は $z\cdot p=z_xp$ ($p\in S=V(x)$)．この $V(x)$ を用いて，

$$\widetilde{M}(x)=\mathrm{Hom}_Z(\widetilde{B},V(x))\in\widetilde{\mathcal{O}},$$
$$M(x)=\widetilde{M}(x)\otimes_S\mathbb{C}\in\mathcal{O}$$

と定める．(W,S) が半単純 Lie 環の Weyl 群である時は，$M(x)$ は最高ウェイト $x\rho-\rho$ を持つ Verma 加群に対応する．よって，$M(x)$ は Verma 加群の類似であると考えることができる．

§4. 移動関手

移動関手，特に壁越え関手と呼ばれる関手の類似を構成する．実は，既に現れた θ_s^Z がその実体であり，この関手を「持ち上げる」ことにより $\mathcal{O}$ の壁越え関手を構成することができる．

$s\in S$ に対し，次のようにおく．

$$\widetilde{A}'=\mathrm{Hom}_Z(\widetilde{B},\theta_s^Z\widetilde{B}).$$

これはもちろん右 $\widetilde{A}$ 加群であり，また左 $\mathrm{End}_Z(\theta_s^Z\widetilde{B})$ 加群でもある．準同型 $\widetilde{A}=\mathrm{End}_Z(\widetilde{B})\to\mathrm{End}_Z(\theta_s^Z\widetilde{B})$ を用いれば，$\widetilde{A}'$ を両側 $\widetilde{A}$ 加群と思うことができる．この $\widetilde{A}'$ を用いて，関手 $\theta_s\colon\widetilde{\mathcal{O}}\to\widetilde{\mathcal{O}}$ を

$$\theta_s(M)=\mathrm{Hom}_A(\widetilde{A}',M)$$

と定める．この時，次が成り立つ．

定理 4.1.

(1) θ_s は自己随伴な完全関手であり，$\theta_s(\mathcal{O})\subset\mathcal{O}$ を満たす．

(2) 非自明な自然変換 $\mathrm{Id}\to\theta_s$ 及び $\theta_s\to\mathrm{Id}$ が存在する．

(3) $xs>x$ ならば $\theta_s(P(x))\simeq P(xs)\oplus\bigoplus_{y<x,\ ys<y}P(y)^{m_y}$ が適当な $m_y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成り立つ．

(4) $xs<x$ ならば $\theta_s(P(x))\simeq P(x)^2$．

(5) $\theta_s(L(x))=0$ と $xs>x$ は同値．

似たような方法を用いて，θ_s によく似た関手 φ_s を次のようにして構成することができる．まずは $a_Z\colon Z\to Z$ を $a_Z((z_w)_w)=(wz_{w^{-1}})_w$ により定める．a_Z は $a_Z^2=1$ を満たす環同型である．よって，Z 加群 M に対し，M への Z 作用を a_Z でひねった加群，すなわち構造射を $Z\xrightarrow{a}Z\to\mathrm{End}(M)$ にしたものを考えることができる．この加群を $a_M(M)$ とおく．そこで，新しい関手 φ_s^Z を $\varphi_s^Z(M)=(a_M\circ\theta_s^Z\circ a_M)(M)$ により定める．この関手も，自己随伴な完全関手を定める．θ_s と同じ方法で φ_s^Z から $\varphi_s\colon\widetilde{\mathcal{O}}\to\widetilde{\mathcal{O}}$ を定めることができる．φ_s は θ_s と良く似た性質を持つが，次に掲げる二点が大きく異なる．

- φ_s は $\mathcal{O}$ を保たない．これは，a_Z が S 代数としての同型でないことに起因する．
- $M\in\widetilde{\mathcal{O}}$ に対し，合成 $M\to\varphi_s(M)\to M$ は $m\mapsto\alpha_s m$ という簡単な形で書かれる．特に $M\in\mathcal{O}$ ならばこの合成は 0 になる．

§5. Zuckerman 関手

s を固定し，$\mathcal{O}$ の充満部分圏 $\mathcal{O}_s$ を

$$\mathcal{O}_s = \{M \in \mathcal{O} \mid sx < x \text{ ならば } \mathrm{Hom}(P(x), M) = 0\}$$

と定める．$L(x)$ は $P(x)$ の唯一の既約商であることから，$\dim \mathrm{Hom}(P(x), M)$ は M における $L(x)$ の重複度であると考えられる．つまり，$\mathcal{O}_s$ は $sx < x$ なる $L(x)$ がその組成列に現れない加群全体である．(W, S) が $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の場合には，$\mathfrak{p}_s$ を s に対応する放物型部分代数とすれば，$sx < x$ なる $L(x)$ は局所 $\mathfrak{p}_s$ 有限（つまり，$L(x)$ は有限次元 $\mathfrak{p}_s$ 安定部分空間の和に一致する）となる．従って，$\mathcal{O}_s$ は局所 $\mathfrak{p}_s$ 有限な加群全体である．

$\iota_s \colon \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}$ を埋め込み関手とする．簡単にわかるように，ι_s は左随伴関手 $\widetilde{\tau}_s \colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}_s$ を持つ．$\tau_s = \iota_s \circ \widetilde{\tau}_s$ とおく．この関手は Zuckerman 関手と呼ばれる．Zuckerman 関手に対し，次が成り立つ．$L\tau_s$ を τ_s の左導来関手，$D^b(\mathcal{O})$ を $\mathcal{O}$ の有界導来圏とする．

定理 5.1.

(1) $M \in \mathcal{O}$ に対し，$i > 2$ ならば $L^i\tau_s(M) = 0$ が成り立つ．従って，$L\tau_s$ は $D^b(\mathcal{O})$ から $D^b(\mathcal{O})$ への関手を与える．

(2) $L\tau_s[-1]$ は自己随伴である．

(W, S) が Weyl 群の時は，（別の方向に一般化した形で）Enright-Wallch [EW80] により示されている．しかし，その証明は Lie 環のコホモロジーに帰着させて複体をとり計算を行う方法で，一般の Coxeter 系に対し通用する方法ではない．

証明の概要を述べる．まずはよく知られた次の一般的な事実に注意する．

補題 5.2. 右完全関手 $F \colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ に対し，自然な同型 $F(M) \simeq M \otimes_A F(A)$ が成り立つ．

射は $M \simeq \mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(M))$ から Hom とテンソルの随伴性を用いて得られる．M が自由ならば明らかに同型であり，一般の場合は自由加群による表示をとれば自由加群の場合に帰着できる．

従って，$\tau_s(M) \simeq M \otimes_A \tau_s(A)$ である．従って，$L\tau_s$ を計算するには $\tau_s(A)$ の平坦分解をとればよい．これは，次のようにして φ_s を用いて得られる．

補題 5.3. 自然な射からなる列

$$0 \to A \to \varphi_s(A) \to A \to \tau_s(A) \to 0$$

及び

$$0 \to A \to \varphi_s(\widetilde{A}) \otimes_S \mathbb{C} \to A \to \tau_s(A) \to 0$$

はどちらも完全である．

φ_s は完全，特に右完全であるから，補題 5.2 より $\varphi_s(M) \simeq M \otimes_A \varphi_s(A)$．$\varphi_s$ は完全であるから，$\varphi_s(A)$ は左 A 加群としては平坦である．よって，この分解を用いて $L\tau_s$ を計算することができる．

まず，$\tau_s(A)$ の平坦分解が第三項までであることから，$i > 2$ ならば $L^i\tau_s(M) = \mathrm{Tor}_i(M, \tau_s(A)) = 0$ である．

次に，$L\tau_s(M)$ を計算してみる．補題 5.3 を用いれば，$L\tau_s(M)$ は次の複体で与えられる．

$$0 \to M \to M \otimes_A \varphi_s(A) \to M \to 0.$$

ここで，

$$\begin{aligned} M \otimes_A \varphi_s(A) &\simeq \varphi_s(M) \simeq \mathrm{Hom}(\widetilde{A}, \varphi_s(M)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varphi_s(\widetilde{A}), M) \simeq \mathrm{Hom}(\varphi_s(\widetilde{A}) \otimes_S \mathbb{C}, M) \end{aligned}$$

である（最後の同型には $M \in \mathcal{O}$ を用いた）．関手 τ'_s を $\tau'_s(M) = \mathrm{Hom}(\tau_s(A), M)$ と定めると，これは τ_s の右随伴関手である．よって，定理 5.1 (2) のためには，$L\tau_s \simeq R\tau'_s[2]$ を示せば良い．

$R\tau'_s$ の計算には，補題 5.3 の二つめの完全列を用いることができる．実際，既に見たように

$$\mathrm{Hom}(\varphi_s(A) \otimes_S \mathbb{C}, M) \simeq \varphi_s(M)$$

であるから，$\varphi_s(A)\otimes_S\mathbb{C}$ は射影加群である．よって，補題 5.3 の二つめの完全列は $\tau_s(A)$ の射影分解を与えており，同型 $M\otimes_A\varphi_s(A) \simeq \mathrm{Hom}(\varphi_s(A)\otimes_S\mathbb{C}, M)$ を用いれば，$L\tau_s \simeq R\tau'_s[2]$ が分かる．

注意 5.4.　以上をまとめれば，$L\tau_s(M)$ は複体

$$0 \to M \to \varphi_s(M) \to M \to 0$$

で与えられる．しかし，既に述べた通り φ_s は $\mathcal{O}$ を一般には保たず，従ってこの複体は $D^b(\mathcal{O})$ の対象ではない．従って，上の証明では $L\tau_s \simeq R\tau'_s[2]$ が $D^b(\widetilde{\mathcal{O}})$ においてしか成り立つことしか示せていない．きちんと $D^b(\mathcal{O})$ の対象として一致することを示すためには，もう少し議論が必要である．詳しくは [Abe12] を見ていただきたい．

§6.　その他の性質

[Abe12] で示されている圏 $\mathcal{O}$ に関する性質をいくつか述べる．証明に関しては [Abe12] を見ていただきたい．

関手 C_s, T_s を

$$\begin{aligned} C_s(M) &= \mathrm{Ker}(\varphi_s(M) \to M), \\ T_s(M) &= \mathrm{Cok}(M \to \varphi_s(M)) \end{aligned}$$

と定める．C_s は左完全な，T_s は右完全な関手を与える．φ_s は $\mathcal{O}$ を保たないにも関わらず，C_s, T_s は $\mathcal{O}$ を保つことが示される．また，C_s は Joseph による Enright 関手 [Jos83] の，T_s はねじり関手 [Ark04] の類似を与えることが証明できる．

これらについては，次が成り立つ．

定理 6.1.

(1) (T_s, C_s) は随伴対である．

(2) $M \in \mathcal{O}$, $i > 1$ に対し，$R^i C_s(M) = 0$, $L^i T_s(M) = 0$ が成り立つ．

(3) 完全三角形 $L\tau_s[-2] \to \mathrm{Id} \to RC_s \xrightarrow{+1}$ 及び $LT_s \to \mathrm{Id} \to L\tau_s \xrightarrow{+1}$ が存在する．

(4) RC_s と LT_s は $D^b(\mathcal{O})$ の圏同値を与える．

(5) $w = s_1 \cdots s_l$ を $w \in W$ の簡約表示とすると，$C_{s_1} \cdots C_{s_l}$ 及び $T_{s_1} \cdots T_{s_l}$ は簡約表示の取り方によらず同値である．

次に，Verma 加群の間の準同型に関する性質を述べる．

定理 6.2. $x, y \in W$ に対し，次が成り立つ．

(1) $\dim \mathrm{Hom}(M(x), M(y)) \le 1$.

(2) 以下は同値.

(a) $\mathrm{Hom}(M(x), M(y)) \neq 0$.

(b) $\mathrm{Hom}(P(x), M(y)) \neq 0$.

(c) $x \ge y$.

(3) 0 でない $\mathrm{Hom}(M(x), M(y))$ の元は全て単射.

これは，Verma [Ver68] 及び Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG71] による結果の一般化である．なお，Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果にあたる「$\mathrm{Hom}(P(x), M(y)) \neq 0$ ならば $x \ge y$」は，ここでの圏 $\mathcal{O}$ の場合は半ば定式化の中に組み込まれており，ほとんど自明に従う．

References

[Abe12] N. Abe, *The category $\mathcal{O}$ for a general Coxeter system*, J. Algebra **367** (2012), 1–25.

[Ark04] S. Arkhipov, *Algebraic construction of contragradient quasi-Verma modules in positive characteristic*, Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Adv. Stud. Pure Math., vol. 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 27–68.

[BGG71] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand, *Structure of representations that are generated by vectors of higher weight*, Funkcional. Anal. i Priložen. **5** (1971), no. 1, 1–9.

[BGG75] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules*, Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), Halsted, New York, 1975, pp. 21–64.

[BGG76] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand, *A certain category of $\mathfrak{g}$-modules*, Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 2, 1–8.

[BGS96] A. Beilinson, V. Ginzburg, and W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473–527.

[BM01] T. Braden and R. MacPherson, *From moment graphs to intersection cohomology*, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 533–551.

[EW80] T. J. Enright and N. R. Wallach, *Notes on homological algebra and representations of Lie algebras*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 1, 1–15.

[Fie03] P. Fiebig, *Centers and translation functors for the category $\mathcal{O}$ over Kac-Moody algebras*, Math. Z. **243** (2003), no. 4, 689–717.

[Fie06] P. Fiebig, *The combinatorics of category O over symmetrizable Kac-Moody algebras*, Transform. Groups **11** (2006), no. 1, 29–49.

[Fie08] P. Fiebig, *Sheaves on moment graphs and a localization of Verma flags*, Adv. Math. **217** (2008), no. 2, 683–712.

[Jos83] A. Joseph, *Completion functors in the $\mathcal{O}$ category*, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1020, Springer, Berlin, 1983, pp. 80–106.

[Soe90] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 421–445.

[Ver68] D.-N. Verma, *Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 160–166.