

3次元 Euclid 空間内の平坦なメビウスの帯の特異点 (Singularities on flat Möbius strips in Euclidean 3-space)

By

直川耕祐 (KOSUKE NAOKAWA)*

Abstract

We report on the outline of the author's previous works related to the singularities of the asymptotic extensions of developable Möbius strips. In particular, if the strip contains a closed geodesic, then the extension of such a strip has at least three singular points other than cuspidal edge singularities, and this lower bound is sharp. Moreover, we also report on a numerical experiment in the case that the strip contains a closed line of curvature.

§ 1. 導入

3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の (はめ込まれた) 曲面で, Gauss 曲率が恒等的に 0 であるものを **平坦曲面** という. 直線 (あるいは線分) の連続的運動によって生成される曲面を **線織面** と呼び, それが平坦であるとき **可展的** (developable) であるという. 可展面は, \mathbb{R}^3 内の平面の他, 円柱面や円錐面など, 「紙」を曲げたり丸めたりしてできる曲面である. 帯状の「紙」を半捻りしてから両端を繋ぎ合わせると, 可展的な Möbius の帯を作ることができる. Hartman-Nirenberg の定理により, \mathbb{R}^3 内の完備かつ平坦な正則曲面は柱面に限る. したがって, 可展的な Möbius の帯の延長上には必ず特異点が現れる. 一方, 可展面上には, カस्प辺 (3/2-カस्पと実区間の直積), 燕の尾, カस्प状交叉帽子 (図 4, 5, 6) などの特異点が現れるが, このうち最も頻繁に現れる特異点はカस्प辺である (cf. [7, Proposition 2.16]). 例えば, 図 1 は可展的な Möbius の帯の例で, 図 2 はその帯を延長したものである. この場合, ほとんどの特異点はカस्प辺であり, カस्प辺がさらにカस्पして「皺 (しわ)」になっている特異点が 3 点あることが観察できる. ここでは, 可展的な Möbius の帯を延長したときに, このようなカस्प辺でない特異点がどの程度現れる

Received July 1, 2012. Revised December 11, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s): 53A05, 57R45

Key Words: cuspidal edge singularity, developable surface, rectifying Möbius strip

Partly supported by the Grant-in-Aid for JSPS Fellows.

*Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8551, Japan.

e-mail: naokawa1@is.titech.ac.jp

のか, その特異点の個数の下からの評価について, 概略を報告する. 詳しくは, 筆者の論文 [8] に記載している. 特に, その帯が閉測地線を含む場合の概要を説明し, 最後の節において, 残された問題についても言及する.

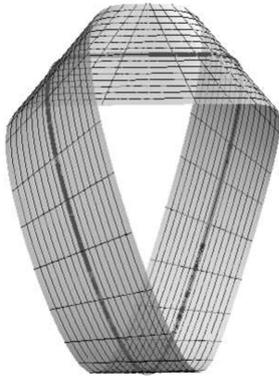


図 1. $F(s, u)$ の像

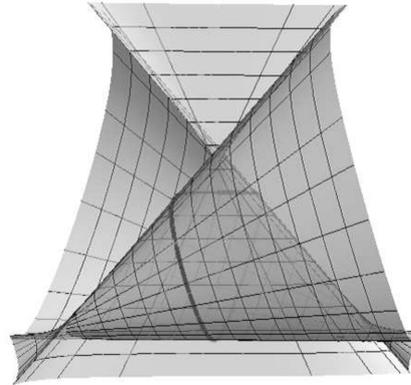


図 2. $F(s, u)$ の漸近的完備化

C^∞ -写像 $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, その速度ベクトル $\gamma'(s) := d\gamma(s)/ds$ が \mathbb{R} 上消えないとき, **正則曲線**という. 正則曲線 $\gamma(s)$ は, $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma(s+2\pi) = \gamma(s)$ を満たすとき, 2π -**周期的**であるという. 以下, $\gamma = \gamma(s)$ を正則な空間閉曲線とし, s を γ の弧長パラメータとする. また, \mathbb{R}^3 の拡大縮小により, γ は 2π -周期的であると仮定してよい. $\xi = \xi(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を γ に沿う C^∞ -ベクトル場であって, 各 $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma'(s)$ と一次独立なものとする. $\xi(s)$ は, $s \in \mathbb{R}$ において $\xi(s+2\pi) = -\xi(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) を満たすとき, 2π -**奇周期的**であるという. このような γ, ξ に対し, 十分小さく $\epsilon > 0$ をとると, C^∞ -写像

$$(1.1) \quad F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

は \mathbb{R}^3 へのはめ込みを与える. この F を「 γ を**生成曲線**, ξ を**漸近方向**」とする **Möbius の帯**という. (1.1) で定義された F に対して, C^∞ -写像

$$\tilde{F}(s, u) := \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s, u \in \mathbb{R})$$

を F の**漸近的完備化**(asymptotic completion)という. 冒頭で述べた Möbius の帯の延長とは, 帯の漸近的完備化のことである. $\tilde{F}(s, u)$ の定義域 \mathbb{R}^2 に対し, 点 (s, u) と点 $(s+2\pi, -u)$ を同一視するような同値関係 \sim を入れる. このとき, $M := \mathbb{R}^2 / \sim$ とおくと, F の漸近的完備化 \tilde{F} は M から \mathbb{R}^3 への C^∞ -写像とみなせる.

村田-梅原 [7] は, \mathbb{R}^3 内の波面 (cf. 定義 2.1) にある種の「完備性」を定義し, 特異点をもつ完備な平坦波面は, もし十分遠方で自己交叉を持たないならば, カस्प辺以外の特異点を少なくとも 4 つ持つことを示した. 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化は, 彼らの意味での完備性を満たさない対象であるが, 彼らと同様に, カस्प辺以外の特異点の個数の下からの評価について考えることができる. まず, 次のような結果を得た.

命題([8]). 可展的な Möbius の帯 $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ の漸近的完備化 $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, M 上にカスプ辺以外の特異点を少なくとも 1 つ持つ.

さらに, カスプ辺以外の特異点がちょうど 1 個である例が存在する. したがって, この命題におけるカスプ辺以外の特異点の個数の評価はシャープなものである (図 3).

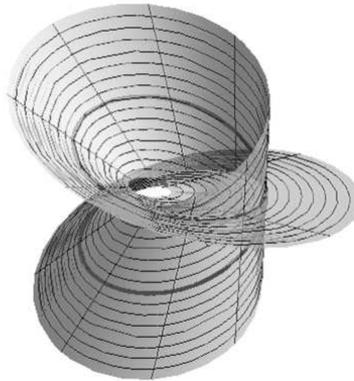


図 3. 漸近的完備化上にカスプ辺以外の特異点を 1 つだけもつ例

ここで, 可展的な Möbius の帯は, 豊富に存在していることを注意しておく. 実際, Chicone-Kalton [1] は, ジェネリックに与えられた正則な空間閉曲線に対し, これを生成曲線とするような可展的な Möbius の帯が存在することを示した. Røgen [12] は, ある種の条件を満たす任意の C^∞ -正則な空間閉曲線が与えられたとき, この閉曲線に沿う可展的な Möbius の帯のイソトピー型の分類を行った. 著者の最近の論文 [9] では, この結果の精密化として, 任意に与えられた実解析的かつ正則な空間閉曲線に沿う, 可展的な Möbius の帯のイソトピー型を分類した.

可展的な Möbius の帯の重要な場合として, 閉測地線を含む場合がある. 可展的な Möbius の帯は, その生成曲線が閉測地線であるとき, **測地的な Möbius の帯**(rectifying Möbius strip, rectifying Möbius developable) という. 測地的な Möbius の帯は, 「長方形」の紙の帯を半整数回だけ捻り, その両端を繋げてできる Möbius の帯と考えられる. 例えば, 図 1 の可展的な Möbius の帯は, 生成曲線が閉測地線になっている. この図の上部真ん中を生成曲線に対して垂直にハサミで切り, 平面に展開すると, 帯状の長方形になっている. このように測地的な Möbius の帯は, 長方形の紙の帯から「工作」できるものであるが, 数学的な意味で厳密にそのような帯の構成を行ったのは, 1962 年の Wunderlich [13] である. 最近, 黒野-梅原 [6] は, 任意のイソトピー型の測地的な Möbius の帯が存在することを示した. したがって, このような Möbius の帯は豊富に存在していることが分かる. その漸近的完備化上に現れるカスプ辺以外の特異点の個数の下からの評価について, 次のような結果を得た.

主定理([8]). 測地的な Möbius の帯 $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ の漸近的完備化 $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, M 上にカスプ辺以外の特異点を少なくとも 3 つ持つ.

カスプ辺以外の特異点がちょうど3つの例が存在する(図1, 2). したがって, この主定理におけるカスプ辺以外の特異点の個数の下からの評価は, 最良である. 以上の命題と主定理の証明には, とともに [5] におけるカスプ辺の判定法を用いた.

§ 2. 準備

U を \mathbb{R}^2 の領域とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ -写像とする. 点 $p \in U$ が f の特異点であるとは, p において f の Jacobi 行列が退化するときをいう. 3つの C^∞ -写像

$$f_C(u, v) := \begin{pmatrix} 2u^3 \\ -3u^2 \\ v \end{pmatrix}, f_S(u, v) := \begin{pmatrix} 3u^4 + u^2v \\ -4u^3 - 2uv \\ v \end{pmatrix}, f_{CR}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv^3 \end{pmatrix}$$

は, すべて原点において特異点をもつ(図4, 5, 6). f の特異点 p がカスプ辺(cuspidal edge)であるとは, p のまわりの座標変換と, $f(p)$ のまわりの \mathbb{R}^3 の座標変換によって, f が f_C と一致するときをいう. 同様に, このような座標変換で f が f_S と一致するとき燕の尾(swallowtail)といい, f_{CR} と一致するときカスプ状交叉帽子(cuspidal cross cap)という.

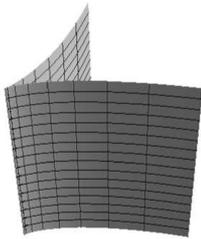


図 4. カスプ辺

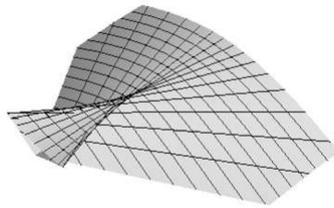


図 5. 燕の尾

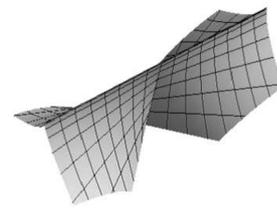


図 6. カスプ状交叉帽子

國分-Rossman-佐治-梅原-山田 [5] によるカスプ辺・燕の尾の便利な判定法を紹介する. これを述べるために, いくつかの定義を準備する.

定義 2.1. C^∞ -写像 $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が波面(wave front)またはフロント(front)であるとは, 次の (1) と (2) を満たす C^∞ -写像 $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ (\mathbb{S}^2 は 2次元単位球面) が存在するときをいう.

- (1) $p \in U, v \in T_p U$ に対して $\nu(p) \cdot df_p(v) = 0$ である. ただし, ドットは \mathbb{R}^3 の標準内積である.
- (2) 写像 $L := (f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ が C^∞ -はめ込みである.

この ν を f の単位法線ベクトル場という. 一方, (1) を満たす ((2) を必ずしも満たさない) ν が存在するとき, f をフロントル(frontal)という.

また, 論文 [5] に従い, 次のように定義する. C^∞ -写像 $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする. f の特異点 p が**非退化**であるとは, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$ の微分 $d\lambda = \lambda_u du + \lambda_v dv$ が点 p で 0 とならないときにいう. ただし, $f_u := \partial f / \partial u$, $f_v := \partial f / \partial v$ である. このとき, f の特異点集合 $S(f)$ は点 p の近傍で正則曲線となる. この正則曲線 $c(s)$ を f の**特異曲線**といい, その接ベクトルを f の**特異方向**という. 「特異点为非退化である」という条件は, 波面の単位法線ベクトル場 ν の取り方によらないことに注意する. 実際, ある ν に対して特異点 p が非退化であれば, p の近傍における f の非特異点集合が稠密となり, ν の取り方は, 符号を除いて一意に定まる ([14], cf. [5, Lemma 2.2]). さらに, 非退化な特異点 p の近傍では, $df(\eta) = 0$ となる 0 でない接ベクトル $\eta \in T_{c(s)}U$ がとれる. この η は, 定数倍を除いて一意に定まり, f の**退化方向**という. 退化方向 $\eta(s)$ は特異曲線 $c(s)$ に沿って滑らかに取れる.

事実 2.2 ([5]). $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする. $c(s)$ を非退化な特異点 $p \in U$ の近傍における f の特異曲線とし, $c(0) = p$ とする. $\eta(s)$ を $c(s)$ に沿って f の退化方向を与える C^∞ -ベクトル場とする. また, (u, v) -平面において, 特異方向と退化方向のベクトルを並べてできる行列の行列式を $\rho(s) := \det(c'(s), \eta(s))$ とおく. このとき,

- (1) $p = c(0)$ がカस्प辺であるための必要十分条件は, $\rho(0) \neq 0$ である.
- (2) $p = c(0)$ が燕の尾であるための必要十分条件は, $\rho(0) = 0$ かつ $\rho'(0) \neq 0$ である.

注意 2.3. 可展的な Möbius の帯は, フロンタルであるが, 波面であるとは限らない. 実際, 可展的な Möbius の帯 $F(s, u)$ が特異点 $(s, u) = (s_0, u_0)$ の近傍で波面となるための必要十分条件は, $\gamma'(s_0) \cdot \nu'(s_0) \neq 0$ となることである. これは $\nu'(s_0) \neq \mathbf{0}$ であることと同値となる. ただし, $\nu(s)$ は $F(s, u)$ の単位法線ベクトル場である. $\nu(s)$ は 2π -奇周期的であるから, $\gamma'(s) \cdot \nu'(s) = 0$ となる点 $s = s_0$ が存在する. もし, 漸近線 $u \mapsto F(s_0, u)$ 上に特異点が存在すれば, その特異点では波面でない.

§ 3. 主定理の証明の概要

可展的な Möbius の帯 $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ とその漸近的完備化 $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ の違いは, 定義域のみであるので, 以降では簡単のため両者を同じ記号 F で表すものとする. 次のような手順で主定理を証明する.

- (1) $F : M \ni (s, u) \mapsto \gamma(s) + u\xi(s) \in \mathbb{R}^3$ を測地的な Möbius の帯の漸近的完備化とし, その生成曲線 γ は正則な閉測地線であるとする. s は γ の弧長パラメータで, $\gamma(s)$ は 2π -周期的, $\xi(s)$ は 2π -奇周期的とする. $e(s)$ を γ の単位接ベクトルとする. $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が 0 でない点において, $\gamma(s)$ の主法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$, 従法線ベクトル $\mathbf{b}(s)$, 振率関数 $\tau(s) := -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ が存在する. 漸近方向 $\xi(s)$ は「法平面」

への射影が単位ベクトルとなるように正規化しておく, ただし, 法平面とは生成曲線の接ベクトルに直交する平面のことをいう. すると, $\xi(s)$ は, 符号の差を除いて

$$D(s) := \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \mathbf{e}(s) + \mathbf{b}(s) \quad (\kappa(s) \neq 0)$$

と一致することが知られている. これを**正規化された Darboux ベクトル場**という (cf. [6]). ただし, $D(s)$ は, 曲率関数の零点では定義されない. また, 曲率関数の零点を越えると, ベクトルの向きが逆になる場合があることに注意する. $\sigma(s) := \tau(s)/\kappa(s)$ のことを γ の**円錐的曲率**(conical curvature) という. 円錐的曲率も曲率関数の零点では定義されない.

- (2) 一方, 測地的な Möbius の帯の閉測地線上には, 曲率関数の零点が存在することが知られており (cf. [11]), このような点で $D(s)$ や $\sigma(s)$ は定義されない. そこで, ξ として D とは別の表示を与える. そのために, まず $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau, \sigma$ の滑らかな拡張を次で定義する. すなわち

$$\hat{\mathbf{n}} := -\mathbf{e} \times \xi, \quad \hat{\mathbf{b}} := \mathbf{e} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\kappa} := \mathbf{e}' \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\tau} := -\hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\sigma} := \mathbf{e} \cdot \xi$$

とおく. このとき, $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\kappa}, \hat{\tau}, \hat{\sigma}$ は \mathbb{R} 上で C^∞ 級である. $\kappa(s)$ の零点でない点において, $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}$ は, 符号の違いを除いてそれぞれ $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \sigma$ と一致している. すなわち, $\hat{\kappa}(s) = \pm \kappa(s)$, $\hat{\mathbf{n}}(s) = \pm \mathbf{n}(s)$, $\hat{\mathbf{b}}(s) = \pm \mathbf{b}(s)$, $\hat{\sigma}(s) = \pm \sigma(s)$ である. $\hat{\tau}(s)$ は, $\kappa(s) \neq 0$ のとき, 符号を込めて $\tau(s)$ に一致している. これらの記号を用いると,

$$\xi = \hat{\sigma} \mathbf{e} + \hat{\mathbf{b}}$$

と書ける.

- (3) F の特異点はすべて非退化であり, 特異点集合は,

$$S(F) := \left\{ (s, u) \in M; u = -\frac{1}{\hat{\sigma}'(s)}, \hat{\sigma}'(s) \neq 0 \right\}$$

で与えられる. $\hat{\sigma}'(s_0) = 0$ となる各 $s_0 \in \mathbb{R}$ に対し, u -軸に平行な直線 $\{(s_0, u) \in M; u \in \mathbb{R}\}$ 上には, F の特異点は存在しない. また, s -軸上にも特異点は存在しない. よって, 特異点集合 $S(F)$ は, いくつかの連結成分に分かれる. そのうち一つの連結成分をとり,

$$\left\{ \left(s, u(s) := -\frac{1}{\hat{\sigma}'(s)} \right) \in S(F); s_1 < s < s_2 \right\}$$

とおく. ただし, $\hat{\sigma}'(s_1) = \hat{\sigma}'(s_2) = 0$ である. 関数 $\hat{\sigma}'(s)$ は, 开区間 (s_1, s_2) 上で定符号となる. 例えば, (s_1, s_2) 上で $\hat{\sigma}'(s) > 0$ であると仮定しよう. このとき, s を上から s_1 に近づければ, 関数 $u(s)$ は $-\infty$ に発散する. 下から s_2 に近づけるときも

同様に $-\infty$ に発散する. したがって, $S(F)$ の各連結成分上には, 関数 $u(s)$ が極値となる点が少なくとも1つ存在する. F の退化方向は $\partial/\partial s$ であるので, $S(F)$ 上の $u(s)$ が極値となる点において, F の特異方向と退化方向は1次従属となる. 事実 2.2 (1) より, このような点で F はカusp辺でなくなる. つまり, $S(F)$ の各連結成分上には, 少なくとも1つカusp辺でない特異点が存在することが分かる. 一方, 特異点集合 $S(F)$ の連結成分の個数は, 有限ならば, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しい. ゆえに, F のカusp辺でない特異点の個数は, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しいか, または大きい.

- (4) $e = e(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ を球面曲線と見なすとき, 円錐的曲率 $\sigma(s)$ は, 球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率と一致することが知られている (cf. [2]). $\kappa(s)$ の零点で球面曲線 $e(s)$ は特異点となるが, $\sigma(s)$ の拡張 $\hat{\sigma}(s)$ が \mathbb{R} 上で C^∞ 級なので, $e(s)$ の測地的曲率円も $e(s)$ の特異点を込めて \mathbb{R} 上で滑らかに定義できる.

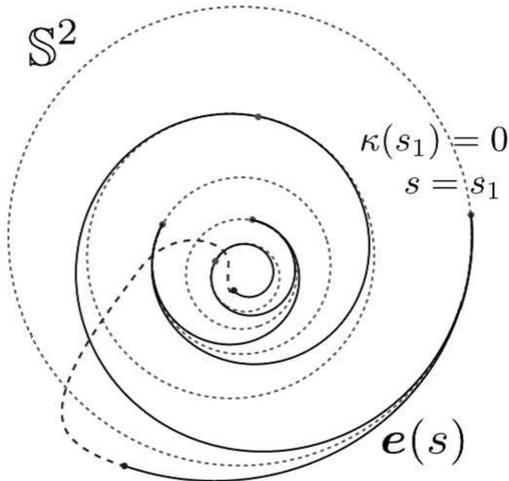


図 7. $e(s)$ の像, 点線は不可能

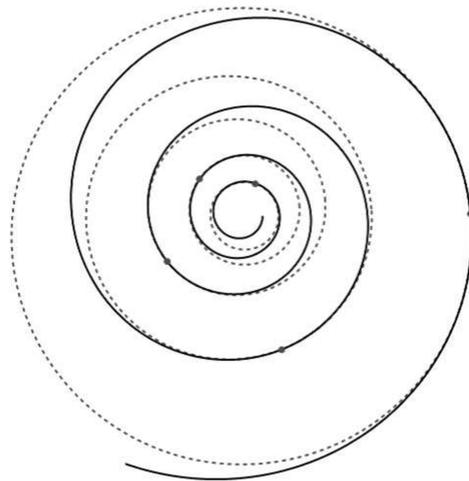


図 8. 渦巻き線

- (5) $\hat{\sigma}'(s)$ の零点が1つしかないと仮定し, 矛盾を導く. ここでは説明を簡単にするために, $\kappa(s)$ の零点は有限個とする. 今, $\xi(s)$ が 2π -奇周期的なので, $\hat{\sigma}(s)$ も 2π -奇周期的である. よって, パラメータ s を適当に平行移動して, $\hat{\sigma}(s)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ 上で (狭義の) 単調関数であるとしてよい. すると, $[0, 2\pi]$ 上で球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率円の族は, 渦巻き線の曲率円の族と同様の「入れ子構造」をもつ. つまり, 曲線 $e(s)$ の各点における測地的曲率円は, 他のどの測地的曲率円とも共通部分を持たない. 渦巻き線の曲率円の入れ子構造については, [4] または [10] に詳しく述べられている. 図 7 は球面曲線 $e(s)$ の像, 図 8 は渦巻き線の一例である. 特に, 球面曲線 $e(s)$ が閉じず, 矛盾が生じる. よって, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点は2つ以上となるが, 2つの場合は $\hat{\sigma}(s)$ の奇周期性から, 同様の議論によって矛盾が生じる. したがって, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点は3つ以上である. (3) により, 主定理が示された.

注意 3.1. 注意 2.3 と 事実 2.2 (1) を用いると, γ を閉測地線とする測地的な Möbius の帯 $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ の漸近的完備化が点 $(s, u) = (s_0, u_0) \in M$ においてカस्प辺であるための必要十分条件は, $\nu'(s_0) \neq \mathbf{0}$ かつ $u_0 = -1/\hat{\sigma}'(s_0)$, $\hat{\sigma}'(s_0) \neq 0$, $\hat{\sigma}''(s_0) \neq 0$ となることである. ただし, $\nu(s)$ は F の単位法線ベクトル場である. 同様に, 事実 2.2 (2) を用いると, 点 $(s, u) = (s_0, u_0) \in M$ において燕の尾であるための必要十分条件は, $\nu'(s_0) \neq \mathbf{0}$ かつ $u_0 = -1/\hat{\sigma}'(s_0)$, $\hat{\sigma}'(s_0) \neq 0$, $\hat{\sigma}''(s_0) = 0$, $\hat{\sigma}'''(s_0) \neq 0$ となることである. なお, これらの必要十分条件は, γ の曲率関数 κ が消えないという仮定の下で, [3] によって既に示されており, 定理の証明において事実 2.2 の代わりに用いることもできる.

例 3.2 ([8]). 図 1, 2 の測地的な Möbius の帯 $F(t, v) := \gamma(t) + v\xi(t)$ は,

$$\gamma(t) := \frac{1}{1 + (t + t^3)^2} \begin{pmatrix} (2/5)t + t^3 + t^5 \\ t + t^3 \\ -8/5 \end{pmatrix}, \quad \xi(t) := \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \mathbf{e}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定義される. 注意 3.1 より, この測地的な Möbius の帯の漸近的完備化上には, カस्प辺でない特異点をちょうど 3 個持つことが分かる. また, そのうち 2 つについては, 燕の尾である.

注意 3.3. 図 3 の漸近的完備化上のカस्प辺でない特異点において, F は波面ではない. また, 図 1, 2 のカस्प辺でない 3 つの特異点のうち, 1 つは波面でない. 筆者のグラフィックスによれば, これらの波面でない特異点は, 図 9 のような形をしている. 数値実験によれば, 可展的であることを保ちながら Möbius の帯を少し摂動させると, 燕の尾とカस्प状交叉帽子 (図 6) に分裂する様子が観察される. $\gamma'(s) \cdot \nu(s) = 0$ となる点が存在する (cf. 注意 2.3) ことから, 可展的な Möbius の帯の延長上には, 波面でない特異点が頻繁に現れる. したがって, カस्प辺でない特異点がすべて燕の尾であるような例を見つけることは, 難しいものと思われる.

§ 4. 残された問題について

以上では, 閉測地線を含む可展的な Möbius の帯を扱ったが, 他の重要な場合として, 閉曲率線を含む可展的な Möbius の帯がある. 可展的な Möbius の帯の生成曲線が閉曲率線となっているとき, **主曲率的な Möbius の帯** (principal Möbius strip, principal Möbius developable) という. $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ を, γ を閉曲率線とする主曲率的な Möbius の帯とし, γ の曲率関数 $\kappa(s)$ は零点をもたないとする. 各 $s \in \mathbb{R}$ に対して, ベクトル $\xi(s)$ は点 $\gamma(s)$ における F の一つの主方向を与えているから, $\gamma'(s)$ と $\xi(s)$ は常に直交している. s は γ の弧長パラメータで, γ は 2π -周期的とする. このとき, F の漸近方向 $\xi(s)$ は, 各 $s \in \mathbb{R}$ において単位ベクトルであるように正規化すれば

$$(4.1) \quad \xi(s) = \cos \theta(s) \mathbf{n}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{b}(s), \quad \theta(s) = \int_0^s -\tau(\sigma) d\sigma + C$$

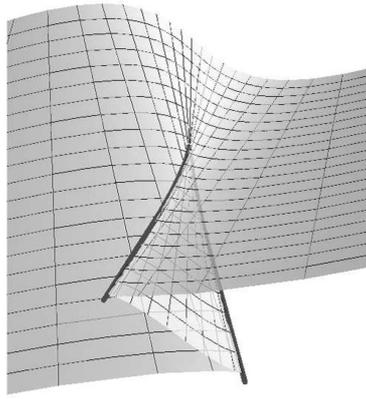


図 9. 波面でない特異点の例

のように表せる (cf. [6]). ただし, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, $\tau(s)$ はそれぞれ γ の主法線ベクトル, 従法線ベクトル, 捩率関数であり, C はある定数である. この正規化の下で, $\xi(s)$ は γ の法接続に関して平行なベクトル場となっている. $\xi(s)$ の奇周期性より,

$$\int_0^{2\pi} -\tau(\sigma) d\sigma \in \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

つまり, γ の全捩率は π の奇数倍でなければならない. (4.1) に現れる定数 C の値を変えると, その差が π の整数倍でなければ, 元と異なる主曲率的な Möbius の帯が得られる. したがって, 一つの主曲率的な Möbius の帯から, 1 パラメータ分の主曲率的な Möbius の帯の族を作ることができる (パラメータの動く範囲は S^1).

主曲率的な Möbius の帯の例は [1] によって構成された. [6] により, 任意のイソトピー型の主曲率的な Möbius の帯が構成されており, 豊富に存在していることが分かる. そこで, 測地的な Möbius の帯と同様に, 主曲率的な Möbius 帯の延長上のカusp 辺でない特異点の個数を下から評価する問題が考えられる. 筆者は, 数値実験ではあるが, 漸近的完備化上にカusp 辺以外の特異点がちょうど 3 個存在するような, 主曲率的な Möbius の帯の例を見つけたので, その構成法をここで紹介したい (例 4.1). 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には, 少なくとも 1 つカusp 辺でない特異点が存在するから, その特異点の個数の下限は, 1 個か 3 個のいずれかであると考えられる.

問題. 主曲率的な Möbius の帯の漸近的完備化上に現れる, カusp 辺以外の特異点の個数の下限を決定せよ.

この問題を解くためには, 数多くの数値実験が必要であると思われる. まず, (生成曲線が閉曲率線とは限らない) 可展的な Möbius の帯の例を数多く構成する方法を述べよう. $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ を Möbius の帯とする. s は γ の弧長パラメータで, $\gamma(s)$ は 2π -周期的とする. さらに, 各 $s \in \mathbb{R}$ に対し, 漸近方向 $\xi(s)$ は, $\gamma(s)$ の法平面への射影が常に単位ベクトルであるように正規化しておく. このとき, γ の Frenet 枠 $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ を

用いて,

$$(4.2) \quad \xi(s) = p(s)e(s) + \cos \theta(s)\mathbf{n}(s) + \sin \theta(s)\mathbf{b}(s)$$

と表しておく. ただし, $p(s), \theta(s)$ は, ある C^∞ -関数である. $\theta(s)$ は, ある $m \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対して,

$$(4.3) \quad \theta(s + 2\pi) = \theta(s) + 2m\pi \quad (s \in \mathbb{R})$$

を満たす. この m を F の幾何学的捻り数 (geometric twisting number) という. F が可展的であるための必要十分条件は,

$$(4.4) \quad \theta'(s) = p(s)\kappa(s) \sin \theta(s) - \tau(s)$$

である (cf. [1]). 逆に, (4.3), (4.4) を満たす C^∞ -関数 $p(s), \theta(s)$ が与えられると, (4.2) によって $\xi(s)$ を定めれば, $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ は可展的な Möbius の帯となる.

曲率関数 $\kappa(s)$ が消えない正則な空間閉曲線 $\gamma(s)$ が与えられたとする. さらに, γ の捩率関数 $\tau(s)$ はある点 $s = s_0$ において, 負の値をとるものとする. [1] によれば, このような γ に沿う可展的な Möbius の帯で, 幾何学的捻り数が $1/2$ のものが存在する. ここでは, 数値実験を行うために, γ に沿う可展的な Möbius の帯の具体的な表示を与える方法を述べる. 幾何学的捻り数が $\pm 1/2$ 以外の可展的な帯の構成法については [9] に記載している. まず, パラメータの平行移動によって $s_0 = 0$ としておく. $r := -\tau(0) > 0$ とおく.

(1) $n \geq 2$ となる $n \in \mathbb{Z}$ に対し, Fejér 核関数を

$$K_n(s) := \sum_{j=-n+1}^{n-1} \frac{n-|j|}{n} \cos js$$

とおく. このとき, $K_n(0) = n$ かつ $0 \leq K_n(s) \leq n$ ($s \in \mathbb{R}$) で,

$$\int_0^{2\pi} K_n(\sigma) d\sigma = 2\pi$$

が成り立つ. この $K_n(s)$ を用いて, 2π -周期的な実解析的関数 $f_n(s)$ を

$$f_n(s) := (r - h_n) \frac{K_n(s)}{n} + h_n, \quad h_n := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2r-1}{n-1} \right)$$

で定める. このとき,

$$(4.5) \quad f_n(0) = r,$$

$$(4.6) \quad f_n(s) \in [h_n, r] \quad (s \in \mathbb{R}),$$

$$(4.7) \quad \int_0^{2\pi} f_n(\sigma) d\sigma = \pi$$

が成り立つ. ただし, $h_n > r$ のとき $[h_n, r] := [r, h_n]$ とみなす.

(2) $n \geq 2$ に対し, 実解析的関数 $\theta_n(s)$ を

$$(4.8) \quad \theta_n(s) := \int_0^s f_n(\sigma) d\sigma$$

で定める. このとき, (4.7) より

$$\theta_n(s + 2\pi) = \theta_n(s) + \pi \quad (s \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. $n \rightarrow \infty$ のとき $h_n \rightarrow 1/2$ であるから, 十分大きな $n = N \in \mathbb{N}$ をとると, (4.6) より, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し $f_N(s) > 0$ を満たすようにできる. このとき, $\theta(s) := \theta_N(s)$ は単調増加関数となる. 特に, $s \in [0, 2\pi)$ において,

$$(4.9) \quad \sin \theta(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 0$$

が成り立つ.

(3) $\theta(s)$ を用いて, 関数 $p(s)$ を

$$p(s) := \frac{\theta'(s) + \tau(s)}{\kappa(s) \sin \theta(s)}$$

によって定める. (4.9) より, $p(s)$ は $s \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ で定義されている. 一方, $\theta'(0) = -\tau(0) > 0$ に注意して, l'Hospital の規則を用いると,

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = \frac{1}{\kappa(0)} \frac{\theta''(0) + \tau'(0)}{-\tau(0)}$$

となる. したがって, $p(s)$ は \mathbb{R} 上に滑らかに拡張できる.

(4) 以上の $p(s)$, $\theta(s)$ は (4.4) を満たすので, (4.2) によって $\xi(s)$ を定めれば, $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ は γ に沿う可展的な Möbius の帯となる. 幾何学的捻り数は $1/2$ である.

もし, 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上に, 正則な閉曲率線が存在すれば, パラメータ変換によって主曲率的な Möbius の帯を作ることができる. そのために, (生成曲線が閉曲率線とは限らない) 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化が, 正則な閉曲率線を含んでいるかどうかを判定する方法を述べよう. なお, ここでの設定とは異なるが, 可展面の漸近的完備化上の閉曲率線は, 村田-梅原 [7] においても議論されている. $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ ($s, u \in \mathbb{R}$) を可展的な Möbius の帯の漸近的完備化とし, s を γ の弧長, $\xi(s)$ を単位ベクトル場とする. このとき, F 上の曲線 $\alpha(s) := F(s, u(s))$ が閉曲線となり, かつ漸近方向 $\xi(s)$ と常に直交するための必要十分条件は,

$$(4.10) \quad u(s) = - \int_0^s \gamma'(\sigma) \cdot \xi(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma'(\sigma) \cdot \xi(\sigma) d\sigma$$

となることである. さらに, この $\alpha(s)$ が正則であるための必要十分条件は, 定義域の (s, u) -平面において, 閉曲率線と特異曲線が決して交わらないこと, すなわち, $\xi'(s) \neq \mathbf{0}$ となる各 $s \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(4.11) \quad u(s) \neq -\frac{|\gamma'(s) \times \xi(s)|^2}{\gamma'(s) \cdot \xi'(s)}$$

が成り立つことである. もし, $\alpha(s) = F(s, u(s))$ が条件 (4.10), (4.11) を満たすならば, 十分小さな $\epsilon_1 > 0$ をとると,

$$F_1(s, u) := \alpha(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon_1)$$

は, α を閉曲率線とする主曲率的な Möbius の帯となる.

例 4.1. 正則な空間閉曲線を

$$\gamma(s) := \begin{pmatrix} \sin 2s \\ \cos 2s \\ 2 \sin s \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

と定める. このとき, γ の曲率関数 $\kappa(s)$ は零点を持たず, 捩率関数 $\tau(s)$ は $s = 0$ において負の値をとる. $r := -|\gamma'(0)|\tau(0)$ とおく. $n = 2$ のときの (4.8) により $\theta(s) := \theta_2(s)$ と定める. これは単調増加関数ではないが, 条件 (4.9) を満たす. そこで,

$$p(s) := \frac{1}{\kappa(s) \sin \theta(s)} \left(\frac{\theta'(s)}{|\gamma'(s)|} + \tau(s) \right)$$

とおくと, これは $s = 0$ を含めて \mathbb{R} 上で実解析的に滑らかな関数である. このとき, (4.2) によって ξ を定めると, $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ は γ に沿う可展的な Möbius の帯である. 筆者の数値計算によると, この Möbius の帯の閉曲率線 $\alpha(s) := F(s, u_1(s)) = \gamma(s) + u_1(s)\xi(s)$ は正則曲線のように見える. ただし, (4.10) より,

$$u_1(s) = \frac{1}{|\xi(s)|} \left(-\int_0^s \gamma'(\sigma) \cdot \frac{\xi(\sigma)}{|\xi(\sigma)|} d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma'(\sigma) \cdot \frac{\xi(\sigma)}{|\xi(\sigma)|} d\sigma \right)$$

である. したがって, パラメータを取り換えることで, この例は主曲率的な Möbius の帯とみなすことができると思われる. さらに, この Möbius の帯の漸近的完備化上の特異曲線 $\beta(s) := F(s, u_2(s))$ を描いてみると, カस्प辺でない特異点が 3 つあることが観察できる. ただし, (4.11) より

$$u_2(s) = \frac{|\gamma'(s) \times \xi(s)|^2}{(\gamma'(s) \times \xi(s)) \cdot (\xi(s) \times \xi'(s))}$$

である. 以上は数値実験であるが, もし数学的に厳密に示したければ, 計算機援用証明が有効であると思われる.

References

- [1] C. Chicone and N. J. Kalton, *Flat embeddings of the Möbius strip in \mathbb{R}^3* , Commun. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 31–50.
- [2] E. Heil, *A four-vertex theorem for space curves*, Math. Pannon. **10** (1999), 123–132.
- [3] S. Izumiya, H. Katsumi and T. Yamasaki: *The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve*, Banach Center Publications **50** (1999), 137–149.
- [4] A. Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie*, Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber 1912, 170–180.
- [5] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [6] Y. Kurono and M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in R^3 whose center-lines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.
- [7] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Diff. Geom. **82** (2009), 279–316.
- [8] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, to appear in Osaka J. Math.
- [9] K. Naokawa, *Extrinsically flat Möbius strips on given knots in 3-dimensional spaceforms*, to appear in Tohoku Math. J.
- [10] U. Pinkall, *On the four-vertex theorem*, Aequationes Math. **34** (1987), 221–230.
- [11] T. Randrup, P. Røgen, *How to twist a knot*, Arch. Math. **68** (1997), 252–264.
- [12] P. Røgen, *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.
- [13] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.
- [14] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter, and versality of mappings*, Current problems in mathematics, Vol. 22, 56–93, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1983.

