RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B38 (2013), 169–187

3次元球面の向き付けられた測地線の空間について
Note on the Space of Oriented Geodesics in the three-Sphere

By

本田 淳史
Atsufumi HONDA*

Abstract

3次元空間形の向き付けられた測地線の空間は自然な中間符号 Kähler 構造を持つ．ユークリッド空間の場合，Guilfoyle-Klingenberg はその中間符号 Kähler 構造を調べ，測地線の空間の部分多様体の幾何とユークリッド空間のそれとを結びつける結果を導いた．Georgiou-Guilfoyle は双曲空間の場合に Guilfoyle-Klingenberg の類似の結果を導いた．本稿では，彼らの結果の紹介を交えながら，S^3 の場合に類似の結果が成り立つことを示す．

The space of oriented geodesics in the 3-dimensional space form admits a neutral Kähler structure naturally. In the case of the Euclidean space, Guilfoyle-Klingenberg investigated the neutral Kähler structure, and derived some results which connect the submanifold geometry of the Euclidean space and that of the space of oriented geodesics. Georgiou-Guilfoyle proved similar results in the case of the hyperbolic space. In this note, introducing their results, we show analogue results in the case of the sphere.

§1. 導入

近年，n 次元単連結空間形 M^n の超曲面と，M^n の向き付けられた測地線の空間 $\mathcal{L}(M^n)$ の Lagrange 部分多様体との間の関係が盛んに研究されている [A, AGK, Ge, GG1, GG2, GK1, GK2, GK3, GK4, S1, S2]．測地線の空間 $\mathcal{L}(M^n)$ は $(2n-2)$ 次元多様体であり，さらに M^n の等長変換群 $\mathrm{Isom}(M^n)$ の $\mathcal{L}(M^n)$ への自然な作用は推移的であるため，$\mathcal{L}(M^n)$

Received July 10, 2012. Revised February 25, 2013.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 53A35; Secondary 53C22, 53C50.
Key Words: the space of oriented geodesics, minitwistor space, neutral-Kähler structure, isometry group, ruled surface, geodesic congruence.
This work is partly supported by JSPS KAKENHI Grant Number 11J09534.
*Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, O-okayama, Meguro, Tokyo 152-8551, Japan.
e-mail: `10d00059@math.titech.ac.jp`

は Isom(M^n) の等質空間である．ユークリッド空間 $M^n = \boldsymbol{R}^n$ の場合，$\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)$ に不変計量が存在するとき $n=3$ もしくは $n=7$ であり，存在するのはその時に限る [S1]．非平坦空間形 M^n の場合は，任意の n に対し $\mathcal{L}(M^n)$ に不変計量が存在する．さらに，$\mathcal{L}(M^n)$ の不変計量のなす空間の次元は，$n \neq 3$ のとき 1 であり，$n=3$ のとき 2 である (M^n が双曲空間の場合には [S2] を，より一般の場合には [AGK] を参照)．つまり，$n=3$ の場合は他の次元の場合とは異なる状況が起こっている．また， Hitchin [Hi] により構成されたミニツイスター空間と呼ばれる複素曲面の構造 $(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}})$ の存在からも，$n=3$ の場合は特殊 であると考えられる．

測地線の空間 $\mathcal{L}(M^n)$ には標準的にシンプレクティック構造 Ω が定まることが知られている．従って，$n=3$ の場合，ミニツイスター空間には Kähler 曲面 $(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の構造が自然に導かれる．これから得られる Kähler 計量をミニツイスター計量と呼ぶ．3 次元ユークリッド空間 $M^3 = \boldsymbol{R}^3$ の場合，$\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$ は 2 次元球面 S^2 の接束 TS^2 と同一視できる．Guilfoyle-Klingenberg は，$(\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の幾何構造を研究し，特に，$(\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の等長変換群や測地線，平坦曲面を $\boldsymbol{R}^3$ の部分多様体の幾何と対応付ける結果を導いた [GK1, GK2, GK3, GK4]．また，Georgiou-Guilfoyle は M^3 が 3 次元双曲空間 H^3 の場合に，$\boldsymbol{R}^3$ における Guilfoyle-Klingenberg の結果の類似を導いた [GG1, GG2, Ge]．一方で，著者は H^3 の可展面と $(\mathcal{L}(H^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の null 曲線との対応することを示し，ある種の H^2 の H^3 への等長はめ込みを分類し，無限遠での挙動を調べた [Ho]．近年，Anciaux [A] は Guilfoyle, Klingenberg や Georgiou とは異なる手法を用いて彼らの結果のうちいくつかを任意の次元の空間形へと一般化した．本稿では M^3 が 3 次元球面 S^3 の場合に，Guilfoyle, Klingenberg や Georgiou による手法を用いて得られる結果を紹介する．

本稿の構成は以下の通りである．§2 では，$\mathcal{L}(S^3)$ のミニツイスター複素構造 J_{tw} や標準シンプレクティック構造 Ω などの幾何構造を復習する．

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の測地線の空間 $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$ のミニツイスター計量は共形平坦であり [GK2]，双曲空間 H^3 の場合にも同様の結果が成り立つ [GG1]．§3 では，ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), J_{\mathrm{tw}})$ の複素構造に両立する複素座標系を明示的に記述し，球面の場合にも同様に $\mathcal{L}(S^3)$ のミニツイスター計量は共形平坦であることを紹介する (命題 3.4)．また $M^3 = \boldsymbol{R}^3, H^3$ の場合，$(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の等長変換群の単位連結成分は M^3 のそれと同型であることが知られている ($M^3 = R^3$ の場合 [GK2, Theorem 1]，$M^3 = H^3$ の場合 [GG1, Theorem 3] を参照)．ここでは，球面の場合にも同様の結果が従うことを示す (命題 3.6)．

§4 では，ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の測地線と S^3 の線織面の対応を記述する．ミニツイスター空間の測地線に対応する M^3 の線織面は極小であることが，$M^3 = \boldsymbol{R}^3, H^3$ の場合に知られている ($M^3 = \boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK2, Theorem 2]，$M^3 = H^3$ の場合 [GG1, Theorem 4] を参照)．ここでは，球面の場合にも類似の結果が従うことを示す (定理 4.1)．

2 次元多様体の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめ込みを $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面，または測地線叢と呼ぶ．§5 では，測地線叢の性質を述べる．まず，Guilfoyle-Klingenberg [GK1, GK2, GK3, GK4] や

Georgiou-Guilfoyle [GG1, GG2, Ge] に従って，S^3 の場合に測地線に沿う null 枠を構成する．この構成は S^3 の群構造を用いるため，他の空間形の場合より簡素に記述される．一般に 3 次元空間形 M^3 の曲面は法測地線叢を介して $(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ の Lagrange 曲面と対応する．この対応のもとで，$M^3 = \boldsymbol{R}^3$, H^3 の Weingarten 曲面は $(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}}, \Omega)$ のローレンツ平坦 Lagrange 曲面と対応することが知られている ($M^3 = \boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK4, Main Theorem 3]，$M^3 = H^3$ の場合 [GG2, Main Theorem] を参照)．ここでは，球面の場合にも同様の結果が従うことを示す (定理 5.13).

謝辞. 本稿作成にあたり，詳細なコメントと洞察に富む助言を与えて頂いたレフェリーに心からの感謝の意を表する．また，本研究の草稿段階から建設的なコメントを頂いた山田光太郎先生，梅原雅顕先生，佐治健太郎先生にも深く御礼申し上げる．

§ 2. 準備

ここでは，まず 3 次元球面の測地線の空間がグラスマン多様体であることを復習し，それから定まる標準的な Kähler 構造を紹介する．次に，測地線の空間に標準的に定まるシンプレクティック形式を導入する．最後に，Hitchin により導入された複素構造 [Hi] を定義する．

3 次元完備リーマン多様体 (M^3, g) の単位速さを持つ完備測地線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ に対し，ある実数 t_0 が存在して

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0) \qquad \left({}^{\forall} t \in \boldsymbol{R}\right)$$

となるとき $\gamma_1(t) \sim_{\mathrm{g}} \gamma_2(t)$ と表す．この同値関係 $\sim_{\mathrm{g}}$ による商集合

$$\left\{\gamma : \boldsymbol{R} \to (M^3, g)\,;\, \gamma \text{ は単位速さを持つ完備測地線}\right\} / \sim_{\mathrm{g}}$$

を**向き付けられた測地線の空間**と呼び，$\mathcal{L}(M^3)$ と表す．測地線 $\gamma(t)$ の同値類を $[\gamma]$ とする．

§ 2.1. 3 次元球面の四元数モデル

四元数体 $\boldsymbol{H}$ を

$$\boldsymbol{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} ; a_1,\, a_2 \in \boldsymbol{C} \right\}$$

と表し，4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ とのベクトル空間としての同型写像

$$\boldsymbol{R}^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + \mathrm{i}x_3 & -x_2 + \mathrm{i}x_1 \\ x_2 + \mathrm{i}x_1 & x_0 - \mathrm{i}x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{H} \tag{2.1}$$

を一つ固定する．四元数体 $\boldsymbol{H}$ に，内積

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\left(X\,{}^{\mathrm{t}}\bar{Y}\right), \qquad (X, Y \in \boldsymbol{H})$$

を与えるとき，$\boldsymbol{H}$ は対応 (2.1) のもとで $\boldsymbol{R}^4$ と等長的になる．このとき，$S^3 = \mathrm{SU}(2) = \{A \in \boldsymbol{H}\,;\, \det A = 1\}$ と実現される．スピン群 Spin(4) は $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ と同一視されるが，S^3 に

$$S^3 \ni p \longmapsto ApB^{-1} \in S^3, \qquad (A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \tag{2.2}$$

と等長的かつ推移的に作用する．

§ 2.2. 球面の測地線の空間

球面の単位接束 US^3 は $US^3 = \{(p, v) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}\,;\, \langle p, p\rangle = \langle v, v\rangle = 1,\, \langle p, v\rangle = 0\}$ と表され，射影

$$\pi : US^3 \ni (p, v) \longmapsto p \in S^3$$

は S^2-束を与える．球面 S^3 の任意の測地線は $(p, v) \in US^3$ を用いて

$$\gamma_{p,v}(t) := (\cos t)p + (\sin t)v \tag{2.3}$$

と表すことができる．これは，S^3 の測地線の像は $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^4$ の原点を通る平面と S^3 との交わりであることを意味するので，$\mathcal{L}(S^3)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の向き付けられた 2 次元部分空間全体のグラスマン多様体 $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$ である．ここで $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$ は，US^3 への SO(2)-作用

$$US^3 \ni (p, v) \longmapsto ((\cos t)p + (\sin t)v, -(\sin t)p + (\cos t)v) \in US^3$$

の軌道空間である．従って $\mathcal{L}(S^3) = \tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$ には，自然な射影

$$\hat{\pi} : US^3 \ni (p, v) \longmapsto [\gamma_{p,v}] \in \mathcal{L}(S^3) \tag{2.4}$$

が滑らかな沈め込みとなるような可微分構造が一意的に定まり，このとき $\hat{\pi}$ は S^1-束となる．

実際，$\mathcal{L}(S^3) = \tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$ は 3 次元複素射影空間 $\boldsymbol{CP}^3$ 内の複素 2 次曲面を $\boldsymbol{Q}^2$ と同一視できることが知られている ([K, Section 2] を参照)．3 次元複素射影空間 $\boldsymbol{CP}^3$ の Fubini-Study 計量から $\boldsymbol{Q}^2$ へ誘導されるリーマン計量 G_0 は Kähler-Einstein 計量である．

定義 2.1 (標準複素構造)**.** 同一視 $\mathcal{L}(S^3) = \boldsymbol{Q}^2$ から誘導される $\mathcal{L}(S^3)$ 上の複素構造 J_0 を**標準複素構造**，Kähler 計量 G_0 を**標準計量**と呼ぶ．

複素 2 次曲面 $\boldsymbol{Q}^2$ はリーマン球面 $\hat{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ の直積 $\hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ と正則同型である．それらの間の同型写像は [F, Section 5.2] に明示的に記述されている．その同型写像を用いると，標準計量 G_0 は

$$G_0 = \frac{2dz_1 d\bar{z}_1}{(1 + |z_1|^2)^2} + \frac{2dz_2 d\bar{z}_2}{(1 + |z_2|^2)^2} \tag{2.5}$$

と表すことができる．ここで，(z_1, z_2) は $\mathcal{L}(S^3) = \boldsymbol{Q} = \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ の複素座標系を表しており，$\mathcal{L}(S^3)$ の標準複素構造 J_0 に両立する座標系である (cf. 命題 3.1)．

§ 2.3. 標準シンプレクティック形式

一般に，リーマン多様体の単位余接束には自然に接触形式が存在する．これを用いて，測地線の空間に標準的なシンプレクティック形式を定めよう．単位接束 US^3 の点 (p,v) における接空間は

$$T_{(p,v)}US^3 = \{(X,V) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}\,;\, \langle p, X\rangle = \langle v, V\rangle = \langle p, V\rangle + \langle X, v\rangle = 0\}$$

と表せる．このとき

$$\Theta_{(p,v)}(X,V) = \langle X, v\rangle = -\langle p, V\rangle\,, \qquad \big((X,V) \in T_{(p,v)}US^n\big)$$

は US^3 上の接触形式を定める．接触形式 Θ を US^3 の**標準接触形式**と呼ぶ.

定義 2.2 (標準シンプレクティック形式)**.** 写像 $\hat{\pi}$ を式 (2.4) により定義される射影とするとき

$$\Omega := \hat{\pi}_*(d\Theta) \tag{2.6}$$

は $\mathcal{L}(S^3)$ 上のシンプレクティック形式を定める．これを**標準シンプレクティック形式**と呼ぶ.

標準複素構造 J_0 に両立する複素座標系 (z_1, z_2) を用いて計算することにより，標準的な Kähler 構造 $(\mathcal{L}(S^3), J_0, G_0)$ の Kähler 形式は標準シンプレクティック形式 Ω と定数倍を除いて一致することがわかる：

$$G_0 = 2\Omega(J_0\cdot, \cdot). \tag{2.7}$$

§ 2.4. ミニツイスター複素構造

3 次元単連結空間形 (M^3, g) の測地線の空間 $\mathcal{L}(M^3)$ において，点 $[\gamma]$ における $\mathcal{L}(M^3)$ の接空間は $\gamma(t)$ の測地変分の $\gamma'(t)$ に直交する方向の変分ベクトル場全体と同一視できるので，$\gamma(t)$ に沿う直交ヤコビ場全体 $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ と線型同型である．直交ヤコビ場全体 $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ の線型変換 $(J_{\mathrm{tw}})_{[\gamma]} : \mathcal{J}^\perp(\gamma) \to \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ を

$$(J_{\mathrm{tw}})_{[\gamma]}(V) := \gamma' \times V \qquad (V \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)) \tag{2.8}$$

と定義すると，これは $\mathcal{L}(M^3)$ の概複素構造を定めるが，J_{tw} は可積分である [Hi]．ただし，$\times$ は計量 g から定まる M^3 の接空間のベクトル積である.

定義 2.3 (ミニツイスター複素構造)**.** 複素構造 J_{tw} を**ミニツイスター複素構造**，複素曲面 $(\mathcal{L}(M^3), J_{\mathrm{tw}})$ を M^3 の**ミニツイスター空間**と呼ぶ.

§ 3. ミニツイスター空間に付随する計量

ここでは，ミニツイスター複素構造 J_{tw} に両立する複素座標系を用いて，J_{tw} と標準複素構造 J_0 が一致しないことを述べる (命題 3.1)．さらに，ミニツイスター複素構造 J_{tw} に付随する Kähler 計量 (ミニツイスター計量，定義 3.3 参照) の曲率 (命題 3.4)，等長変換群 (命題 3.6) を記述する．

§ 3.1. ミニツイスター複素構造に両立する局所座標系

§2.2 で紹介したように，$(\mathcal{L}(S^3), J_0)$ は $\hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ と正則同型である．その同型写像 ([F, Section 5.2] 参照) を用いることで，任意の向き付けられた測地線 $[\gamma] \in \mathcal{L}(S^3)$ は点 $(z_1, z_2) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ に対して $[\Xi^{z_1,z_2}]$ と表すことができることがわかる．ただし，Ξ^{z_1,z_2} は

$$\Xi^{z_1,z_2}(t) := \frac{1}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t} z_1 z_2 & e^{-\mathrm{i}t} z_1 - e^{\mathrm{i}t} \bar{z}_2 \\ -e^{\mathrm{i}t} \bar{z}_1 + e^{-\mathrm{i}t} z_2 & e^{-\mathrm{i}t} + e^{\mathrm{i}t} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

で定まる測地線である．ここで，$S^3 = \mathrm{SU}(2)$ と同一視している．

この明示的表示により，定義 2.3 のミニツイスター複素構造 J_{tw} に両立する複素座標系は，標準複素構造 J_0 に両立する複素座標系 (z_1, z_2) を用いて，以下のように記述されることがわかる．

命題 3.1. 測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ に対して

$$(\mu_1, \mu_2) := (z_1, \bar{z}_2) \tag{3.2}$$

は，ミニツイスター複素構造 J_{tw} に両立する複素座標系を与える．

命題 3.1 は，式 (3.1) を用いて J_{tw} の定義式 (2.8) の通りに計算することにより得られる．

命題 3.1 により，ミニツイスター空間の点 $(\mu_1, \mu_2) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}} = (\mathcal{L}(S^3), J_{\mathrm{tw}})$ に対応する測地線 γ^{μ_1,μ_2} は，式 (3.1) に $(z_1, z_2) = (\mu_1, \bar{\mu}_2)$ を代入したものとして表すことができる．球面 $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ の群構造を用いて計算することで，以下のことがわかる．

補題 3.2. ミニツイスター空間の点 $(\mu_1, \mu_2) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}} = (\mathcal{L}(S^3), J_{\mathrm{tw}})$ に対応する測地線 γ^{μ_1,μ_2} は

$$\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t) = \mathcal{M}(\mu_1)\, c(t) \mathcal{M}(\mu_2)^{-1}$$

と表示される．ここで，$\mathcal{M} : \hat{\boldsymbol{C}} \to \mathrm{SU}(2)$ と $c : S^1 = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z} \to \mathrm{SU}(2)$ は，埋め込み

$$\mathcal{M}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{1+|\zeta|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ -\bar{\zeta} & 1 \end{pmatrix}, \qquad c(t) := \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}, \qquad \left(\zeta \in \hat{\boldsymbol{C}},\, t \in S^1\right)$$

である．

§3.2. ミニツイスター空間の Kähler 構造

標準計量 G_0 は，標準複素構造 J_0 と標準シンプレクティック形式 Ω から定まる Kähler 計量である (式 (2.7) 参照)．ここでは，ミニツイスター複素構造 J_{tw} と Ω を用いて定まる Kähler 計量を導入する．

定義 3.3 (ミニツイスター計量)**.** 標準シンプレクティック形式 Ω (式 (2.6) 参照) とミニツイスター複素構造 J_{tw} に対して，次で定まる計量

$$G_{\mathrm{tw}} := 2\Omega(J_{\mathrm{tw}}\cdot, \cdot)$$

を**ミニツイスター計量**と呼ぶ.

ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), J_{\mathrm{tw}})$ の複素座標系 (μ_1, μ_2) を用いると

$$G_{\mathrm{tw}} = \frac{2d\mu_1 d\bar{\mu}_1}{(1+|\mu_1|^2)^2} - \frac{2d\mu_2 d\bar{\mu}_2}{(1+|\mu_2|^2)^2} \tag{3.3}$$

と表せる．計算すると，G_{tw} の曲率テンソル R の 0 でない成分は

$$R^1_{1\bar{1}1} = \frac{2}{(1+|\mu_1|^2)^2}, \quad R^2_{2\bar{2}2} = \frac{2}{(1+|\mu_2|^2)^2}$$

となり，以下のことがわかる：

命題 3.4. ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ は中間符号を持つ *Kähler* 多様体であり，共形平坦である.

この命題は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK2, Proposition 7]，双曲空間 H^3 の場合 [GG1, Theorem 2] の類似である.

§3.3. 測地線の空間への群作用，等長変換群

測地線 $[\gamma] \in \mathcal{L}(S^3)$，$A$, $B \in \mathrm{SU}(2)$ に対して，$A\gamma(t)B^{-1}$ が与える $\mathcal{L}(S^3)$ の元 $[A\gamma(t)B^{-1}]$ は代表元 γ の取り方によらず定まる．これを $A[\gamma]B^{-1}$ と表す．従って，スピン群 $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ の S^3 への作用 (2.2) は測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ への作用

$$\mathcal{L}(S^3) \ni [\gamma] \longmapsto A[\gamma]B^{-1} = [A\gamma B^{-1}] \in \mathcal{L}(S^3), \tag{3.4}$$

を自然に誘導する．この作用 (3.4) は座標系 (μ_1, μ_2) の各成分の Möbius 変換を誘導する：

命題 3.5. リーマン球面の点 μ_1, $\mu_2 \in \hat{\boldsymbol{C}}$ に対し

$$A\left[\gamma^{\mu_1,\mu_2}\right]B^{-1} = \left[\gamma^{A\star\mu_1, B\star\mu_2}\right], \qquad A, B \in \mathrm{SU}(2)$$

となる．ただし $A \in \mathrm{SU}(2)$ に対して，$A \star \cdot : \hat{\boldsymbol{C}} \to \hat{\boldsymbol{C}}$ は *Möbius* 変換を表す.

注意． 一般に $A\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)B^{-1} \neq \gamma^{A\star\mu_1,B\star\mu_2}(t)$ である．

従って，S^3 の等長変換群はミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ の等長変換群の部分群となっていることがわかるが，逆に次が従う．

命題 3.6. ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ の等長変換群の単位元の連結成分は，S^3 の等長変換群の単位元の連結成分と同型である．

この命題は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK2, Theorem 1]，双曲空間 H^3 の場合 [GG1, Theorem 3]) の類似である．証明はそれらと同様の方法，すなわち，$(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ のキリングベクトル場を分類し，それらのなすリー環の次元を計算することにより従う．

§ 4. 測地線

3 次元球面 S^3 の線織面は S^3 の測地線の 1-パラメータ族の軌跡で与えられる曲面なので，測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線に対応する．ここでは，次が成り立つことを示す．

定理 4.1. 測地線の空間 $(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ の測地線は S^3 の極小線織面を生成する．逆に，S^3 の全測地的でない極小線織面は $(\mathcal{L}(S^3), G_{\mathrm{tw}}, J_{\mathrm{tw}})$ の測地線を与える．

定理 4.1 は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK2, Theorem 2]，双曲空間 H^3 の場合 [GG1, Theorem 4]) の類似である．

まず §4.1 において主張の前半 (補題 4.3) を示し，次に §4.2 では後半 (補題 4.4) を示す．

§ 4.1. 測地線の空間の測地線が生成する線織面

任意の測地線 $\ell \in \mathcal{L}(S^3)$ に対して，点 μ_1，$\mu_2 \in \hat{\boldsymbol{C}}$ が存在して $\ell = [\gamma^{\mu_1,\mu_2}]$ (ただし，γ^{μ_1,μ_2} は補題 3.2 参照) と表せていたので，すべての $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線 $\alpha(s)$ は，ある球面曲線のペア $\mu_1(s)$，$\mu_2(s) \in \hat{\boldsymbol{C}}$ を用いて $\alpha(s) = [\gamma^{\mu_1(s),\mu_2(s)}]$ と表せる．従って補題 3.2 より，線織面のパラメータ表示

$$f(s,t) = \mathcal{M}_1(s)c(t)\mathcal{M}_2(s)^{-1} \tag{4.1}$$

を得る．ここでは，このような線織面と $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線の対応を用いて，$\mathcal{L}(S^3)$ のミニツイスター計量 G_{tw} に関する測地線が S^3 の極小線織面を与えることを示そう．まず，補題 4.2 で $\mathcal{L}(S^3)$ の G_{tw} に関する測地線を求め，それらが極小線織面を与えることを補題 4.3 で示す．

補題 4.2. 測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3) = \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ のミニツイスター計量 G_{tw} に関する測地線を $\alpha(s)$ とする．このとき，$\alpha(s)$ は $\mathcal{L}(S^3)$ の適当な等長変換を施すことで，実数 a, b を用いて次のように表すことができる：

$$\alpha(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s)) = (e^{\mathrm{i}as}, e^{\mathrm{i}bs}).$$

証明． ミニツイスター計量 G_{tw} の Levi-Civita 接続 ∇ は次のように表すことができる．

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\frac{\partial}{\partial\mu_1}=\frac{-2\bar{\mu}_1}{1+|\mu_1|^2}\frac{\partial}{\partial\mu_1},\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial\mu_2}}\frac{\partial}{\partial\mu_2}=\frac{-2\bar{\mu}_2}{1+|\mu_2|^2}\frac{\partial}{\partial\mu_2},\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\frac{\partial}{\partial\mu_2}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\mu_2}}\frac{\partial}{\partial\mu_1}=0.$$

従って，$\mathcal{L}(S^3)=\hat{\boldsymbol{C}}\times\hat{\boldsymbol{C}}$ の測地線 $\alpha:\boldsymbol{R}\supset I\to\hat{\boldsymbol{C}}\times\hat{\boldsymbol{C}}$ を $\alpha(s)=(\mu_1(s),\mu_2(s))$ とすると

$$0=\nabla_{\alpha'}\alpha'=\left(\mu_1''+\frac{-2\bar{\mu}_1}{1+|\mu_1|^2}(\mu_1')^2\right)\frac{\partial}{\partial\mu_1}+\left(\mu_2''+\frac{-2\bar{\mu}_2}{1+|\mu_2|^2}(\mu_2')^2\right)\frac{\partial}{\partial\mu_2}$$

を満たすので，$\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ は $\hat{\boldsymbol{C}}=S^2$ の測地線もしくは定値曲線となる． □

次に，$\mathcal{L}(S^3)$ の測地線が生成する線織面が極小であることを示そう．

補題 4.3. 測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の測地線が生成する S^3 の線織面は極小である．

証明． 補題 4.2 より，$\mathcal{L}(S^3)=\hat{\boldsymbol{C}}\times\hat{\boldsymbol{C}}$ の測地線 $\alpha(s)$ は $\mathcal{L}(S^3)$ の適当な等長変換を施すことで，実数 a, b を用いて $\alpha(s)=(\mu_1(s),\mu_2(s))=(e^{\mathrm{i}as},e^{\mathrm{i}bs})$ と表すことができる．これを式 (4.1) に代入すると測地線 $\alpha(s)$ が生成する線織面 f は

$$f(s,t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t}+e^{\mathrm{i}((a-b)s-t)} & e^{\mathrm{i}(as-t)}-e^{\mathrm{i}(bs+t)} \\ -e^{-\mathrm{i}(as-t)}+e^{-\mathrm{i}(bs+t)} & e^{-\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}((a-b)s-t)} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と表すことができる．直接計算により f が極小であることがわかる． □

§4.2. 極小線織面が与える測地線の空間の曲線

球面 S^3 の極小線織面が与える測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線は，ミニツイスター計量 G_{tw} に関する測地線であることを示そう．ここで，全測地的な曲面は全臍的であり $\mathcal{L}(S^3)$ の曲線を一意的に定めないため，ここでは除外する．

補題 4.4. 球面 S^3 の全測地的でない極小線織面は，測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の測地線を与える．

証明． 極小線織面 f に対して，ある球面曲線のペア $(\mu_1(s),\mu_2(s))\in\hat{\boldsymbol{C}}\times\hat{\boldsymbol{C}}$ が存在して，f を式 (4.1) のように表すことができる．このとき 補題 4.2 により，球面曲線 $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ の各々が定値曲線でないならば，$\hat{\boldsymbol{C}}$ の Fubini-Study 計量に関する測地線となることを示せば良い．すなわち，勝手に選んだ点 $s=s_0$ において，f の $f(s_0,t)$ における平均曲率 $H(s_0,t)$ が消えるとき，$\kappa_1(s_0)=\kappa_2(s_0)=0$ であることを示す．ただし，$\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ は $\hat{\boldsymbol{C}}=S^2$ の曲線 $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ の各々の Fubini-Study 計量に関する測地的曲率を表す．

球面 S^2 の等長変換 A, $B \in \mathrm{SU}(2)$ を用いて，$A\star\mu_1(s_0) = B\star\mu_2(s_0) = 0$ であり $A\star\mu_1'(s_0)$, $B\star\mu_2'(s_0)$ は実数とできるので，はじめから

$$\mu_1(s_0) = \mu_2(s_0) = 0, \qquad \mu_1'(s_0) = a, \qquad \mu_2'(s_0) = b, \qquad (a, b \in \boldsymbol{R})$$

であったとしてよい．このとき (s_0, t) における f の平均曲率 $H(s_0, t)$ は

$$H(s_0,t) = \frac{a\,\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}t}\mu_2''(s_0) - \mu_1''(s_0)\right) + b\,\mathrm{Im}\left(e^{-\mathrm{i}t}\mu_1''(s_0) - \mu_2''(s_0)\right)}{2\left(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2t}\right)^3}$$

と表すことができる．従って

$$H(s_0,0) = \frac{-\mathrm{Im}(\mu_1''(s_0)) + \mathrm{Im}(\mu_2''(s_0))}{2(a-b)^2}, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(s_0,t) = -\frac{\mathrm{Im}(\mu_1''(s_0)) + \mathrm{Im}(\mu_2''(s_0))}{2(a+b)^2}$$

となり，$\mathrm{Im}(\mu_1''(s_0)) = \mathrm{Im}(\mu_2''(s_0)) = 0$ を得る．一方で，球面曲線 $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ の $s = s_0$ における測地的曲率 $\kappa_1(s_0)$, $\kappa_2(s_0)$ は

$$\kappa_1(s_0) = -\frac{\mathrm{Im}(\mu_1''(s_0))}{a^2}, \qquad \kappa_2(s_0) = -\frac{\mathrm{Im}(\mu_2''(s_0))}{b^2}$$

であるので，主張が証明された． □

注意 (極小線織面の分類).　補題 4.4，補題 4.3 から，全ての極小線織面は式 (4.2) で定まる曲面の開部分多様体であることがわかる．これは [La, Proposition 7.2] の “全ての極小線織面は

$$\Psi(x,y) = (\cos\alpha x\cos y, \sin\alpha x\cos y, \cos x\sin y, \sin x\sin y) \in S^3 \subset \boldsymbol{R}^4 \tag{4.3}$$

で定まる曲面の開部分多様体である” という主張の別証明を与えている．実際，式 (4.2) で定まる極小線織面 f において $x = -\dfrac{(a+b)s}{2}$, $y = -t + \dfrac{(a-b)s}{2}$, $\alpha = \dfrac{b-a}{b+a}$ を代入し，同一視 (2.1) を通して $\boldsymbol{R}^4$ の部分集合として実現すると式 (4.3) の Ψ を得る．

§ 5.　法線叢のミニツイスター計量に関する幾何的性質

2 次元多様体の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめ込みを $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面，または測地線叢と呼ぶ．ここでは，$\mathcal{L}(S^3)$ の曲面のミニツイスター計量 G_{tw} に関する性質を調べる．特に S^3 の Weingarten 曲面と $\mathcal{L}(S^3)$ の Lagrange 曲面でミニツイスター計量に関して平坦であるものが対応すること (定理 5.13) を示す．

§ 5.1.　測地線に沿う枠

測地線に沿う枠を求めたい．しかし，測地線は曲率が 0 であるから Frenet 枠は定義されないため，以下のように $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ の群構造を用いて構成する．

補題 5.1. 測地線 $\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ を補題 *3.2* のように表すとき，$\tau \in S^1 = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$, $k = 1, 2, 3$ に対して $\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ に沿うベクトル場 $\mathcal{E}_k(\mu_1, \mu_2, t, \tau)$ を

$$\mathcal{E}_k(\mu_1, \mu_2, t, \tau) = \left(\mathcal{M}(\mu_1)c\left(\frac{t+\tau}{2}\right)\right)\sigma_k\left(\mathcal{M}(\mu_2)c\left(\frac{-t+\tau}{2}\right)\right)^{-1}$$

とおくと，$\{\mathcal{E}_1(\mu_1, \mu_2, t, \tau), \mathcal{E}_2(\mu_1, \mu_2, t, \tau), \mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t, \tau)\}$ は $\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ に沿う S^3 の正規直交枠である．

証明. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ の標準基底は同一視 (2.1) を通じて以下のように表すことができる：

$$\sigma_0 = \mathrm{id}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

従って，$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は $T_{\sigma_0}S^3$ の正規直交基底だから，任意の A, $B \in \mathrm{SU}(2)$ に対して $\{A\sigma_1B^{-1}, A\sigma_2B^{-1}, A\sigma_3B^{-1}\}$ は $T_{A\sigma_0B^{-1}}S^3$ における正規直交基底である．任意の $\tau \in S^1$ に対して

$$\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t) = \left(\mathcal{M}(\mu_1)c\left(\frac{t+\tau}{2}\right)\right)\sigma_0\left(\mathcal{M}(\mu_2)c\left(\frac{-t+\tau}{2}\right)\right)^{-1}$$

となることにより従う． □

補題 5.1 の正規直交枠 $\{\mathcal{E}_1(\mu_1, \mu_2, t, \tau), \mathcal{E}_2(\mu_1, \mu_2, t, \tau), \mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t, \tau)\}$ に対し

$$\mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t, \tau) = (\gamma^{\mu_1,\mu_2})'(t) \tag{5.2}$$

となるので，$\mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t, \tau)$ は τ によらない．以後は $\tau = 0$ とし，$\mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t, 0)$ を $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t)$ と表す．さらに，各 $k = 1, 2$ に対して $\mathcal{E}_k(\mu_1, \mu_2, t, 0)$ は t によらないので，以後 $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(\mu_1, \mu_2)$ と表す．このとき正規直交枠 $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ は

$$\mathcal{E}_k(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{M}(\mu_1)\sigma_k\mathcal{M}(\mu_2)^{-1}, \qquad \mathcal{E}_3(\mu_1, \mu_2, t) = \mathcal{M}(\mu_1)c'(t)\mathcal{M}(\mu_2)^{-1}. \tag{5.3}$$

$(k = 1, 2)$ と表される．

記号の簡略のため，次の枠を導入する．

定義 5.2 (Null 枠)**.** 3 次元リーマン多様体 $(M^3, \langle\ ,\ \rangle)$ の **null 枠**とは，M^3 の複素ベクトル場 $\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(-)}\}$ で次を満たすものである：

- $\boldsymbol{e}_{(0)}$ は実ベクトル場，$\boldsymbol{e}_{(+)}$ は $\boldsymbol{e}_{(-)}$ の複素共役，
- $\boldsymbol{C}$-線形に拡張された $(TM^3)^{\boldsymbol{C}}$ の内積を同じ記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表すとき

$$\langle \boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(0)} \rangle = 1, \qquad \langle \boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(+)} \rangle = \langle \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(+)} \rangle = 0, \qquad \langle \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(-)} \rangle = \frac{1}{2}.$$

与えられた 3 次元リーマン多様体の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に対して，$\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(-)}\}$ を

$$\boldsymbol{e}_{(0)} := \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_{(+)} := \frac{\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2}{2}, \qquad \boldsymbol{e}_{(-)} := \frac{\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2}{2}$$

と定めると (M^3, g) の null 枠である．従って，式 (5.3) のベクトル場 $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ に対して，$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ を

$$\boldsymbol{e} := \mathcal{E}_3, \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}} := \frac{\mathcal{E}_1 - \mathrm{i}\mathcal{E}_2}{2} \tag{5.4}$$

と定めると，$\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \bar{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\}$ は測地線 γ^{μ_1,μ_2} に沿う S^3 の null 枠である．このとき，次は直接計算により確かめられる．

補題 5.3. 写像 $\Gamma : \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}} \times S^1 \to S^3$ を $\Gamma(\mu_1, \mu_2, t) := \gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ とし（ただし，$\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ は補題 *3.2* 参照），$\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \bar{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\}$ を式 (5.4) で定まる $\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ に沿う S^3 の *null* 枠とする．このとき，Γ の微分は次のように表される：

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t))_{\mu_1} &= \frac{\mathrm{i}\bar{\mu}_1}{2(1+|\mu_1|^2)}\boldsymbol{e} - \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t}}{1+|\mu_1|^2}\boldsymbol{\mathcal{E}}, \\ (\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t))_{\mu_2} &= -\frac{\mathrm{i}\bar{\mu}_2}{2(1+|\mu_2|^2)}\boldsymbol{e} + \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{1+|\mu_2|^2}\boldsymbol{\mathcal{E}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

§ 5.2. 線叢の幾何学

ここでは，測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ のミニツイスター複素構造 J_{tw} に関する測地線叢の性質を記述する．

定義 5.4（適合 null 枠）**.** 測地線の空間 $\mathcal{L}(M^3)$ の曲面に対して，M^3 の null 枠 $\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(-)}\}$ が**適合的**であるとは，曲面の各点 $[\gamma]$ に対して $\gamma' = \boldsymbol{e}_{(0)}$ であり，$\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \mathrm{Re}\,\boldsymbol{e}_{(+)}, \mathrm{Im}\,\boldsymbol{e}_{(+)}\}$ の向きが M^3 の向きに同調しているときをいう．

リーマン面 Σ^2 の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめこみ $F : \Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3)$ に対し，Σ^2 の複素座標 z を用いて局所的に $F(z) = (\mu_1(z), \mu_2(z)) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ と表す．このとき $j, k = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}$ に対して

$$J_{jk}(z) := \frac{\partial \mu_j}{\partial z}\frac{\partial \mu_k}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \mu_j}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \mu_k}{\partial z} \tag{5.6}$$

と定める．各 $j, k = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}$ に対して $J_{jk}dz\,d\bar{z}$ は Σ^2 の複素座標 z の取り方によらない．定め方から，各 $j, k = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{gathered} J_{jj} = 0, \quad J_{kj} = -J_{jk}, \quad \overline{J_{jk}} = J_{\bar{k}\bar{j}} = -J_{\bar{j}\bar{k}}, \\ J_{j\bar{j}} = |(\mu_j)_z|^2 - |(\mu_j)_{\bar{z}}|^2, \quad J_{12}J_{\bar{2}\bar{1}} = J_{1\bar{2}}J_{2\bar{1}} - J_{1\bar{1}}J_{2\bar{2}}. \end{gathered}$$

補題 5.5. リーマン面 Σ^2 の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめこみ $F:\Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3)$ に対し，Σ^2 の複素座標 z を用いて局所的に $F(z)=(\mu_1(z),\mu_2(z)) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ と表す．このとき，$\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}, \bar{\boldsymbol{E}}\}$ は F の適合 *null* 枠を与える．ただし，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は $\boldsymbol{\varepsilon} := \mathcal{E}_3 \circ F$ (式 (5.3) 参照) で定められるもので，$\boldsymbol{E}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \frac{1}{\Lambda}\Bigg[\varphi\,\boldsymbol{\varepsilon} &+ \left(\frac{(\bar{\mu}_2)_{\bar{z}} e^{-\mathrm{i}t}}{1+|\mu_2|^2} - \frac{(\bar{\mu}_1)_{\bar{z}} e^{\mathrm{i}t}}{1+|\mu_1|^2}\right)\left(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)}(t)\right)_z \\
&- \left(\frac{(\bar{\mu}_2)_{z} e^{-\mathrm{i}t}}{1+|\mu_2|^2} - \frac{(\bar{\mu}_1)_{z} e^{\mathrm{i}t}}{1+|\mu_1|^2}\right)\left(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)}(t)\right)_{\bar{z}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

と定義する ($\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ は補題 3.2 参照)．ここで，φ, Λ は

$$
\begin{aligned}
\varphi := \frac{\mathrm{i}}{2}\Bigg\{ e^{\mathrm{i}t}&\left(\frac{\bar{\mu}_1 J_{1\bar{1}}}{(1+|\mu_1|^2)^2} + \frac{\mu_2 J_{\bar{2}\bar{1}} - \bar{\mu}_2 J_{2\bar{1}}}{(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)}\right) \\
&+ e^{-\mathrm{i}t}\left(\frac{\bar{\mu}_2 J_{2\bar{2}}}{(1+|\mu_2|^2)^2} + \frac{\mu_1 J_{\bar{1}\bar{2}} - \bar{\mu}_1 J_{1\bar{2}}}{(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)}\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda := \frac{J_{1\bar{1}}}{(1+|\mu_1|^2)^2} + \frac{J_{2\bar{2}}}{(1+|\mu_2|^2)^2} - \frac{J_{2\bar{1}} e^{2\mathrm{i}t} + J_{1\bar{2}} e^{-2\mathrm{i}t}}{(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)} \tag{5.8}
$$

で定められる関数である．

証明． 式 (5.5) を $(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_z = (\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_{\mu_1}(\mu_1)_z + (\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_{\mu_2}(\mu_2)_z$ に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_z = \frac{\mathrm{i}}{2}&\left(\frac{\mu_2(\bar{\mu}_2)_z - \bar{\mu}_2(\mu_2)_z}{1+|\mu_2|^2} - \frac{\mu_1(\bar{\mu}_1)_z - \bar{\mu}_1(\mu_1)_z}{1+|\mu_1|^2}\right)\boldsymbol{\varepsilon} \\
&+ \left(\frac{(\mu_2)_z e^{\mathrm{i}t}}{1+|\mu_2|^2} - \frac{(\mu_1)_z e^{-\mathrm{i}t}}{1+|\mu_1|^2}\right)\boldsymbol{E} + \left(\frac{(\bar{\mu}_2)_z e^{-\mathrm{i}t}}{1+|\mu_2|^2} - \frac{(\bar{\mu}_1)_z e^{\mathrm{i}t}}{1+|\mu_1|^2}\right)\bar{\boldsymbol{E}}
\end{aligned}
$$

となる．これと $(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_{\bar{z}} = \overline{(\gamma^{\mu_1(z),\mu_2(z)})_z}$ を合わせると従う． □

測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面の適合 null 枠 $\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(-)}\}$ に対して，複素数値関数 σ, ρ を

$$
\sigma := \left\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_{(+)}} \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(0)} \right\rangle, \qquad \rho := \left\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_{(-)}} \boldsymbol{e}_{(+)}, \boldsymbol{e}_{(0)} \right\rangle \tag{5.9}
$$

と定め，[PR] にしたがって，σ を **shear**，$\mathfrak{K} := \mathrm{Re}\,\rho$ を **convergence**，$\mathfrak{T} := \mathrm{Im}\,\rho$ を **twist** と呼ぶ．以下は直接計算により従うことがわかる．

補題 5.6. リーマン面 Σ^2 の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめこみ $F:\Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3)$ に対し，Σ^2 の複素座標 z を用いて局所的に $F(z)=(\mu_1(z),\mu_2(z)) \in \hat{\boldsymbol{C}} \times \hat{\boldsymbol{C}}$ と表す．このとき，F の

shear σ，*convergence* $\mathfrak{K}$，*twist* $\mathfrak{T}$ は以下で与えられる：

$$\begin{aligned}\sigma = -\frac{\mathrm{i}}{\Lambda}\frac{\overline{J_{12}}}{(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)}, \qquad \mathfrak{K} = \frac{\mathrm{Im}\left(J_{1\bar{2}}e^{-2\mathrm{i}t}\right)}{\Lambda(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)},\\ \mathfrak{T} = -\frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{J_{1\bar{1}}}{(1+|\mu_1|^2)^2} - \frac{J_{2\bar{2}}}{(1+|\mu_2|^2)^2}\right).\end{aligned} \tag{5.10}$$

§ 5.3. Lagrange 曲面

ここでは，測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の標準的なシンプレクティック構造 Ω (§2.3 参照) を用いて，S^3 の曲面の法線叢を記述する.

補題 5.7. 測地線の空間 $(\mathcal{L}(S^3), \Omega)$ の曲面が *Lagrange* はめ込みであることと，*twist* が常に消えることは同値である．さらに，測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面が S^3 の曲面の法線叢で与えられることと，*twist* が常に消えることは同値である.

補題 5.7 は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK2, Proposition 10]，双曲空間 H^3 の場合 [GG2, Proposition 4, Proposition 5] の類似であり，それらと同様の方法で証明される．証明には，式 (5.10) や式 (5.7) を用いる.

補題 5.7 より次が従う：

系 5.8. 測地線の空間 $(\mathcal{L}(S^3), \Omega)$ の曲面が *Lagrange* はめ込みであることと，S^3 の曲面の法線叢で与えられることは同値である.

球面 S^3 の曲面の曲率と，その法線叢の shear, twist は次のような関係を持つ.

補題 5.9. リーマン面 Σ^2 の S^3 へのはめこみ $f : \Sigma^2 \to S^3$ に対して，その法線叢により与えられる $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面の *shear* を σ，*convergence* を $\mathfrak{K}$ とするとき

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2), \qquad |\sigma| = \frac{1}{4}|\lambda_1 - \lambda_2| \tag{5.11}$$

となる．ただし，λ_1, λ_2 は曲面 f の主曲率である.

補題 5.9 は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK4, Proposition 7]，双曲空間 H^3 の場合 [GG2, Proposition 7] の類似であり，それらと同様の方法で証明される.

補題 5.9 により，$\mathfrak{K}^2 - |\sigma|^2 = \lambda_1\lambda_2/4$ なので，曲面 f のガウス曲率 K，平均曲率 H は以下のように表される：

$$K = \lambda_1\lambda_2 + 1 = 4(\mathfrak{K}^2 - |\sigma|^2) + 1, \qquad H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 2\mathfrak{K}. \tag{5.12}$$

以下の補題 5.10 と補題 5.9 を用いると，S^3 の曲面の法線叢で与えられるミニツイスター空間の正則はめ込みは分類される (命題 5.11).

補題 5.10. リーマン面 Σ^2 の $\mathcal{L}(S^3)$ へのはめ込み $F:\Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3)$ が，J_{tw} に関して正則もしくは反正則となる必要十分条件は，F の *shear* が常に消えることである．

証明．リーマン面 Σ^2 の複素座標を z とし，局所的に曲面を $F(z)=(\mu_1(z),\mu_2(z))$ と表すとき，その shear σ は式 (5.10) で与えられるので，$\sigma=0$ と $J_{12}=0$ は同値である (J_{12} は式 (5.6) 参照)．ここで

$$J_{12}=(\mu_1)_z(\mu_2)_{\bar z}-(\mu_1)_{\bar z}(\mu_2)_z=\det\left(\begin{pmatrix}(\mu_1)_z\\(\mu_2)_z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(\mu_1)_{\bar z}\\(\mu_2)_{\bar z}\end{pmatrix}\right)=\det(F_z,F_{\bar z}) \tag{5.13}$$

なので，もし F が J_{tw} に関して正則もしくは反正則ならば，$J_{12}=0$ である．逆に，$J_{12}=0$ ならば式 (5.13) より，F_z と $F_{\bar z}$ が線形従属となってしまうので，$F_z=0$ もしくは $F_{\bar z}=0$ となる． □

命題 5.11. 球面 S^3 の曲面の法線叢で与えられる $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面が J_{tw} に関して正則であるならば，全臍的である．

証明．補題 5.10 より，ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3),J_{\mathrm{tw}})$ の正則はめ込みは shear-free, すなわち $\sigma=0$ である．補題 5.9 より，$(\mathcal{L}(S^3),\Omega)$ の shear-free な Lagrange 曲面は全臍的である． □

§5.4. ミニツイスター計量から誘導される計量

ここでは，$\mathcal{L}(S^3)$ の曲面にミニツイスター計量 G_{tw} から誘導される計量を考える．

命題 5.12. リーマン面 Σ^2 のミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(S^3),\Omega,J_{\mathrm{tw}},G_{\mathrm{tw}})$ へのはめ込みを $F:\Sigma^2\to(\mathcal{L}(S^3),\Omega,J_{\mathrm{tw}},G_{\mathrm{tw}})$ とする．このとき

- F が S^3 の曲面 $f:\Sigma^2\to S^3$ の法線叢のとき，G_{tw} の F による誘導計量は Σ^2 上でローレンツ 計量もしくは退化し，退化する必要十分条件は f が臍点を持つときである．
- F が J_{tw} に関して正則のとき，G_{tw} の F による誘導計量は Σ^2 上で半正定値であり，退化する必要十分条件は F が Ω に関して *Lagrange* はめ込みのときである．

証明．局所的に曲面を $F(z)=(\mu_1(z),\mu_2(z))$ と表し，誘導計量を $F^*G_{\mathrm{tw}}=Pdz^2+\bar{P}d\bar{z}^2+2Qdzd\bar{z}$ とする．このとき，式 (3.3) より

$$\begin{aligned}P&=2\left(\frac{(\mu_1)_z(\bar\mu_1)_z}{(1+|\mu_1|^2)^2}-\frac{(\mu_2)_z(\bar\mu_2)_z}{(1+|\mu_2|^2)^2}\right),\\Q&=\frac{|(\mu_1)_z|^2+|(\mu_1)_{\bar z}|^2}{(1+|\mu_1|^2)^2}-\frac{|(\mu_2)_z|^2+|(\mu_2)_{\bar z}|^2}{(1+|\mu_2|^2)^2}\end{aligned} \tag{5.14}$$

となる．ここで，座標を $z = u + \mathrm{i}v$ として $F^*G_{\mathrm{tw}} = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2$ と表したとき $\det(F^*G_{\mathrm{tw}}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -4(P\bar{P} - Q^2)$ なので

$$\det(F^*G_{\mathrm{tw}}) = 16\,\Lambda^2\left(\mathfrak{T}^2 - |\sigma|^2\right) \tag{5.15}$$

を得る．ただし，Λ は式 (5.8)，shear σ, twist $\mathfrak{T}$ は式 (5.10) でそれぞれ与えられるものである．従って，補題 5.7 より，F が S^3 の曲面 $f : \Sigma^2 \to S^3$ の法線叢のときには $\mathfrak{T} = 0$ となるので，式 (5.15) から誘導計量は $F^*G_{\mathrm{tw}} = -16\,\Lambda^2|\sigma|^2$ となり不定値となるか退化している．補題 5.9 より，F^*G_{tw} が退化することと f の主曲率が一致することが同値であることがわかる．後半について，補題 5.10 より，F が J_{tw} に関して正則のとき $\sigma = 0$ となるので，式 (5.15) から誘導計量は $F^*G_{\mathrm{tw}} = 16\,\Lambda^2\mathfrak{T}^2$ となり半正定値である．退化するための必要十分条件は，補題 5.7 より従う． □

球面 S^3 の臍点を持たない曲面が **Weingarten** であるとは，

$$d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 = 0 \tag{5.16}$$

が成り立つときをいう．このとき，次が成り立つ．

定理 5.13. 測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ の曲面 $F : \Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3)$ が S^3 の臍点を持たない曲面 $f : \Sigma^2 \to S^3$ の法線叢で与えられるとき，ミニツイスター計量から F により誘導される計量が平坦な ローレンツ 計量であるための必要十分条件は，f が *Weingarten* となることである．

定理 5.13 は，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合 [GK4, Main Theorem 3]，双曲空間 H^3 の場合 [GG2, Main Theorem] の類似である．

定理 5.13 を示すために，測地線の座標の群構造を用いた計算法 (補題 5.14) を紹介する．特殊ユニタリ群 SU(2) のリー環を $\mathfrak{su}(2)$ とする．リー環 $\mathfrak{su}(2)$ と $\boldsymbol{R}^3$ を

$$\mathfrak{su}(2) \ni \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3 & -x_2 + \mathrm{i}x_1 \\ x_2 + \mathrm{i}x_1 & -\mathrm{i}x_3 \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \tag{5.17}$$

と同一視する．リー環 $\mathfrak{su}(2)$ に，キリング計量の定数倍の内積

$$\langle X, Y\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = -(1/2)\,\mathrm{trace}(XY), \qquad \langle X, X\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = \det X, \qquad (X, Y \in \mathfrak{su}(2)) \tag{5.18}$$

を与えると，$(\mathfrak{su}(2), \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{su}(2)})$ と $\boldsymbol{R}^3$ は等長的である．このとき，写像 $\Phi_L, \Phi_R : \mathcal{L}(S^3) \to S^2$ を

$$\Phi_L([\gamma]) := -\gamma^{-1}\,\gamma', \qquad \Phi_R([\gamma]) := -\gamma'\,\gamma^{-1} \tag{5.19}$$

と定める．ただし，S^2 は $\mathfrak{su}(2) \cong \boldsymbol{R}^3$ の単位球面である．(5.19) の 2 つの式の右辺はそれぞれ $[\gamma]$ の代表元 γ によらない．実際，任意の単位速さを持つ測地線 $\gamma = \gamma(t) \in \mathrm{SU}(2)$ は SU(2) の元 A, B を用いて $\gamma = Ac(t)B^{-1}$ と表せるが，このとき

$$(\gamma(t))^{-1}\,\gamma'(t) = \mathrm{i}B\sigma_3B^{-1}, \qquad \gamma'(t)\,(\gamma(t))^{-1} = \mathrm{i}A\sigma_3A^{-1}$$

となるので，$(\gamma(t))^{-1}\gamma'(t)$ と $\gamma'(t)(\gamma(t))^{-1}$ は t に依存しないためである．写像 $(\Phi_L,\Phi_R):\mathcal{L}(S^3)\to S^2\times S^2$ と，ミニツイスター複素構造 J_{tw} に両立する座標系 $(\mu_1,\mu_2):\mathcal{L}(S^3)\to\hat{\boldsymbol{C}}\times\hat{\boldsymbol{C}}$ は，以下のように立体射影を通して同一視できる．

補題 5.14. 球面 S^2 とリーマン球面 $\hat{\boldsymbol{C}}$ を，立体射影

$$\pi_N:\mathfrak{su}(2)\supset S^2\ni\begin{pmatrix}\mathrm{i}x_3 & -x_2+\mathrm{i}x_1\\ x_2+\mathrm{i}x_1 & -\mathrm{i}x_3\end{pmatrix}\longmapsto\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}\in\hat{\boldsymbol{C}}$$

により同一視するとき，$\mu_1=\pi_N(\Phi_R)$, $\mu_2=\pi_N(\Phi_L)$ となる．

証明． 測地線 $\gamma^{\mu_1,\mu_2}(t)$ を補題 3.2 のように定める．このとき，$\pi(\Phi_R(\gamma^{\mu_1,\mu_2}))=\mu_1$, $\pi(\Phi_L(\gamma^{\mu_1,\mu_2}))=\mu_2$ となるので主張が従う． □

定理 5.13 の証明. 誘導計量 F^*G_{tw} の断面曲率を K_{tw}，f の主曲率を λ_1, λ_2 とするとき，適当な点 $p_0\in\Sigma^2$ において，ある 0 でない実数 c_0 を用いて

$$((\lambda_1)_u(\lambda_2)_v-(\lambda_1)_v(\lambda_2)_u)(p_0)=c_0K_{\mathrm{tw}}(p_0) \tag{5.20}$$

(ただし (u,v) は Σ^2 の局所座標系) となることを示せばよい．

点 p_0 の適当な近傍で定義された f の単位法線ベクトル ν を固定する．式 (5.1) のように σ_0, σ_1, σ_2, $\sigma_3\in\mathrm{SU}(2)$ を定める．適当な S^3 の等長変換を考えると，一般性を失わずに $f(p_0)=\sigma_0$, $\nu(p_0)=\sigma_3$ であったとしてよい．このとき，f の法線叢 $F:\Sigma^2\to\mathcal{L}(S^3)$ は $F=[\gamma_{f,\nu}(t)]$ と表される．ただし $\gamma_{f,\nu}(t)=(\cos t)f+(\sin t)\nu$ とする (式 (2.3) 参照)．立体射影

$$\mathrm{SU}(2)\setminus\{-\sigma_0\}\ni\begin{pmatrix}a_1 & -\bar{a}_2\\ a_2 & \bar{a}_1\end{pmatrix}\longmapsto\frac{1}{1+\operatorname{Re}a_1}(\operatorname{Im}a_2,\operatorname{Re}a_2,\operatorname{Im}a_1)\in\boldsymbol{R}^3$$

の逆を考えると，f は $p_0\in\Sigma^2$ の近傍上で局所的に定義された関数 $\xi=\xi(u,v)$, $\eta=\eta(u,v)$, $\zeta=\zeta(u,v)$ を用いて

$$f(u,v)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\begin{pmatrix}1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2+2\mathrm{i}\zeta & 2(-\eta+\mathrm{i}\xi)\\ 2(\eta+\mathrm{i}\xi) & 1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-2\mathrm{i}\zeta\end{pmatrix}$$

と表される．点 p_0 を中心とする Σ^2 の局所座標系 $(U;u,v)$ を $f_u(0,0)=\sigma_1$, $f_v(0,0)=\sigma_2$ を満たすようにとると，関数 $\xi=\xi(u,v)$, $\eta=\eta(u,v)$, $\zeta=\zeta(u,v)$ は $p_0=(0,0)$ において

$$\xi(0,0)=\eta(0,0)=\zeta(0,0)=\xi_v(0,0)=\eta_u(0,0)=\zeta_u(0,0)=\zeta_v(0,0)=0,$$
$$\xi_u(0,0)=\eta_v(0,0)=1/2$$

を満たす．曲面 f は臍点を持たないので，f の外的曲率を K_{ext}，平均曲率を H とするとき，

$$\varrho:=(H^2-K_{\mathrm{ext}})(p_0)=(\zeta_{uu}(0,0)-\zeta_{vv}(0,0))^2+4(\zeta_{uv}(0,0))^2$$

は 0 でない．このとき，式 (5.20) の左辺は

$$((\lambda_1)_u(\lambda_2)_v - (\lambda_1)_v(\lambda_2)_u)(p_0) = \frac{4\delta}{\sqrt{\varrho}} \tag{5.21}$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}\delta := (\zeta_{uu} - \zeta_{vv})(\zeta_{uuv}\zeta_{uvv} - \zeta_{uuu}\zeta_{vvv}) - 2\zeta_{uv}(\zeta_{uuv}^2 - \zeta_{uvv}^2 - \zeta_{uuu}\zeta_{uvv} + \zeta_{uuv}\zeta_{vvv})\\ + 4(2C_1 + C_2\zeta_{uu}^2 - C_3\zeta_{vv}^2 - (C_4\zeta_{uu} - C_5\zeta_{vv})\zeta_{uv}^2 + 2C_6\zeta_{uu}\zeta_{uv}\zeta_{vv})\\ - 2(C_7\zeta_{uuu} - C_8\zeta_{vvv} - C_9\zeta_{uuv} + C_{10}\zeta_{uvv})\end{aligned}$$

である (右辺は $p_0 = (0,0)$ での値)．ここで，$C_1, \cdots, C_{10}$ は

$$\begin{aligned}
C_1 &:= -\left((\xi_{uu} + 2\eta_{uv})(\xi_{uu} + 3\xi_{vv} + 2\eta_{uv}) - (\eta_{vv} + 2\xi_{uv})(\eta_{vv} + 3\eta_{uu} + 2\xi_{uv})\right)\zeta_{uv}^3\\
&\qquad + \xi_{uv}\xi_{vv}\zeta_{uu}^3 - \eta_{uv}\eta_{uu}\zeta_{vv}^3\\
C_2 &:= 2\left(\xi_{vv}(\eta_{uv} + \xi_{vv} - \xi_{uu}) + \xi_{uv}(\eta_{vv} - 2\xi_{uv})\right)\zeta_{uv}\\
&\qquad - \left(\xi_{vv}(2\xi_{uv} - \eta_{uu}) - 4\xi_{uv}\eta_{uv} + 9\xi_{uu}\eta_{vv}\right)\zeta_{vv}\\
C_3 &:= 2\left(\eta_{uu}(\xi_{uv} + \eta_{uu} - \eta_{vv}) + \eta_{uv}(\xi_{uu} - 2\eta_{uv})\right)\zeta_{uv}\\
&\qquad - \left(\eta_{uu}(2\eta_{uv} - \xi_{vv}) - 4\xi_{uv}\eta_{uv} + 9\xi_{uu}\eta_{vv}\right)\zeta_{uu}\\
C_4 &:= 3\xi_{vv}\eta_{uu} + 2\xi_{uv}(6\eta_{uv} + 2\xi_{vv} - 3\xi_{uu}) - \eta_{vv}(2\eta_{uv} + 4\xi_{vv} + 7\xi_{uu})\\
C_5 &:= 3\xi_{vv}\eta_{uu} + 2\eta_{uv}(6\xi_{uv} + 2\eta_{uu} - 3\eta_{vv}) - \xi_{uu}(2\xi_{uv} + 4\eta_{uu} + 7\eta_{vv})\\
C_6 &:= 4(\xi_{uu}\xi_{vv} - \eta_{uu}\eta_{vv}) - 2(\xi_{uv}^2 - \eta_{uv}^2) + 3(\xi_{vv}\eta_{uv} - \xi_{uv}\eta_{uu}) + 7(\xi_{uu}\eta_{uv} - \xi_{uv}\eta_{vv})\\
C_7 &:= \zeta_{vv}\left(3\eta_{vv}\zeta_{vv} + \zeta_{uv}\left(4\eta_{uv} + 3\xi_{vv}\right)\right) - \zeta_{uu}(\xi_{vv}\zeta_{uv} + 3\eta_{vv}\zeta_{vv}) + 2\zeta_{uv}^2(\eta_{vv} + 2\xi_{uv})\\
C_8 &:= \zeta_{uu}\left(3\xi_{uu}\zeta_{uu} + \zeta_{uv}\left(4\xi_{uv} + 3\eta_{uu}\right)\right) - \zeta_{vv}(\eta_{uu}\zeta_{uv} + 3\xi_{uu}\zeta_{uu}) + 2\zeta_{uv}^2(\xi_{uu} + 2\eta_{uv})\\
C_9 &:= \zeta_{vv}\left(\zeta_{uu}(\xi_{vv} - 2\eta_{uv}) + \zeta_{uv}(2\xi_{uv} + 4\eta_{uu} + 7\eta_{vv}) + 2\eta_{uv}\zeta_{vv}\right)\\
&\qquad - \zeta_{uu}\left(\zeta_{uv}(\eta_{vv} - 6\xi_{uv}) + \xi_{vv}\zeta_{uu}\right) + 2\zeta_{uv}^2(4\eta_{uv} + 3\xi_{vv} + 2\xi_{uu})\\
C_{10} &:= \zeta_{uu}\left(\zeta_{vv}(\eta_{uu} - 2\xi_{uv}) + \zeta_{uv}(2\eta_{uv} + 4\xi_{vv} + 7\xi_{uu}) + 2\xi_{uv}\zeta_{uu}\right)\\
&\qquad - \zeta_{vv}\left(\zeta_{uv}(\xi_{uu} - 6\eta_{uv}) + \eta_{uu}\zeta_{vv}\right) + 2\zeta_{uv}^2(4\xi_{uv} + 3\eta_{uu} + 2\eta_{vv})
\end{aligned}$$

としている (右辺はすべて $p_0 = (0,0)$ での値).

一方，f の法線叢 $F : \Sigma^2 \to \mathcal{L}(S^3) = S^2 \times S^2$ を $F = (F_1, F_2)$ とすると，補題 5.14 から，$F_1 = -\nu f^{-1}$, $F_2 = -f^{-1}\nu$ となる．式 (5.18) から，誘導計量 F^*G_{tw} は

$$\begin{aligned}F^*G_{\mathrm{tw}} = (\det(F_1)_u - \det(F_2)_u)\,du^2 + (\det(F_1)_v - \det(F_2)_v)\,dv^2\\ - \operatorname{trace}\left((F_1)_u(F_1)_v - (F_2)_u(F_2)_v\right)du\,dv\end{aligned}$$

と表されるので，F^*G_{tw} の p_0 での断面曲率 K_{tw} は

$$K_{\mathrm{tw}}(p_0) = -\frac{\delta}{4\varrho^2} \tag{5.22}$$

となる．従って，式 (5.21) と式 (5.22) より

$$((\lambda_1)_u(\lambda_2)_v - (\lambda_1)_v(\lambda_2)_u)\,(p_0) = -16\varrho^{\frac{3}{2}} K_{\mathrm{tw}}(p_0)$$

となり，式 (5.20) が成り立つ． □

References

[A] H. Anciaux, Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces, *preprint* (arXiv:1112.1758), to appear in Transactions of the American Mathematical Society.

[AGK] D.V. Alekseevsky, B. Guilfoyle and W. Klingenberg, On the Geometry of Spaces of Oriented Geodesics, Ann. Global Anal. Geom. **40** (2011), 389–409.

[F] H. Fujimoto, *Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in* $\mathbf{R}^m$, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.

[Ge] N. Georgiou, On maximal surfaces in the space of oriented geodesics of hyperbolic 3-space, *preprint* (arXiv:1001.2179), to appear in Mathematica Scandinavica.

[GG1] N. Georgiou and B. Guilfoyle, On the space of oriented geodesics of Hyperbolic 3-space, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), 1183–1219.

[GG2] N. Georgiou and B. Guilfoyle, A characterization of Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **80** (2010), 233–253.

[GK1] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, On the space of oriented affine lines in $\mathbb{R}^3$, Arch. Math. (Basel) **82** (2004), 81–84.

[GK2] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, An indefinite Käbler metric on the space of oriented lines, J. London Math. Soc. **72** (2005), 497–509.

[GK3] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, A neutral Kähler surface with applications in geometric optics, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys. (2008), 149–178.

[GK4] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, On Weingarten surfaces in Euclidean and Lorentzian 3-space, Differential Geom. Appl. **28** (2010), 454–468.

[Hi] T. J. Hitchin, Monopoles and Geodesics, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 579–602.

[Ho] A. Honda, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), 171–193.

[K] M. Kimura, Space of geodesics in hyperbolic spaces and Lorentz numbers, Mem. Faculty of Sci. and Engi. Shimane Univ. **36** (2003), 61–67.

[KU] Y. Kitagawa and M. Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3, Geom. Dedicata **155** (2011), 105–140.

[La] H. B. Lawson, Jr., Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335–374.

[PR] R. Penrose and W. Rindler, Spinors and Spacetime, vol. 2., Cambridge University Press, Cambridge (1986).

[S1] M. Salvai, On the geometry of the space of oriented lines of Euclidean space, Manuscripta Math. **118** (2005), 181–189.

[S2] M. Salvai, On the geometry of the space of oriented lines of the hyperbolic space, Glasgow Math. J. **49** (2007), 357–366.