RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B41 (2013), 001–023

パフィアンの加法公式
Addition Formula for Pfaffians

By

広田良吾
Ryogo Hirota

Abstract

An extended form of the addition formula for pfaffians is obtained, which is useful for finding the structure of the higher order discrete BKP equation. As the result we obtain two types of discrete BKP equation of order 4. The extended addition formula can be applied to the non-autonomous discrete BKP equations.

§1. はじめに

1992 年に出版した本 [2] で、筆者は『双線形方程式とはパフィアン の恒等式である』との観点に立ってソリトン（可積分系）の理論を統一的に議論した。その後 20 年間、可積分系の理論は微分方程式から差分方程式へと進化・発展を続けている。独立変数が連続な微分方程式を対象にして得られた結論、『双線形方程式をパフィアンで 表示すると、それはパフィアンの恒等式に帰着する』は、独立変数が離散的になっても不変であるのか？答えは「Yes」である。

本稿では BKP 差分方程式系を例にして方程式のパフィアン化の方法を説明する。BKP 差分方程式系の双線形形式の基本的構成要素は τ_N' 関数（独立変数をシフトした τ_N 関数) であり、この τ_N' 関数をパフィアンで表現するのが最も困難である。

しかし表題の「パフィアン（pfaffian）の加法公式」を使うと τ_N' 関数のパフィアン化は τ_{ij}' 関数のパフィアン化に帰着される。ここで τ_{ij} 関数は、$\tau_N = (1, 2, 3, \cdots, 2N)$ の構成要素 (i, j) を表している。すなわち「N ソリトンで証明すべきことが 1 ソリトン解の証明で十分である」ことを示している。

本稿の構成は次の通りである。

Received October 31, 2012. Revised November 26, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s):

第２節はパフィアンへの入門である。パフィアンの記号の解説から始めている。参考記事として、前述の本 [2] の第２章がある。ここではソリトン研究に必要な行列式とパフィアンの解説に 47 ページを費やしている。もう一つ、応用数理学会誌に 4 回に分けて連載された記事 [4] がある。

第３節ではパフィアンの恒等式の説明である。行列式の恒等式の証明は一般に面倒である。しかしパフィアンの恒等式は本質的に簡単である。したがって初心者でも容易に理解できる。恒等式にはタイプＡとＢの２種類あることを示す。

第４節でパフィアン の加法公式について述べる。本 [2] の中で述べた加法公式を一般の差分方程式でも使えるような形に公式を拡張した。

第５節ではパフィアン の積表示について述べる。この積表示は特殊な成分を持つパフィアン、即ち成分 $(b_i, b_j) = (b_i - b_j)/(b_i + b_j)$ をもつパフィアン, $(b_1, b_2, \cdots, b_{2N})$ の積表示である。この積表示は差分方程式系に拡張できる。成分 $(b_i, b_j) = (b_i - b_j)/(b_i b_j - 1)$ をもつパフィアン, $(b_1, b_2, \cdots, b_{2N})$ の積表示も存在する。

第６節以降では高次 BKP 差分方程式をパフィアンで表現する。τ'_N 関数（独立変数をシフトした τ_N 関数) のパフィアン表現を行い、BKP 差分方程式系がパフィアン の恒等式に帰着することを示す。パフィアン の恒等式のタイプの違い（A と B）によって 4 次の BKP 差分方程式は 2 種類あることを示す。さらに BKP 差分方程式系の構成法は Nonautonomous 系でもそのまま適用できることを示す。

§2. 行列式とパフィアン

行列式は成分の積の和で構成されている. 同じようにパフィアンも成分の積の和で構成される. パフィアンの成分の表現の仕方はいろいろある。たとえば

$$\mathrm{pf}(a,b) \quad \text{または} \quad (a,b) \quad \text{または} \quad (1,2) \quad \text{または} \quad \mathrm{pf}(b_j,b_k) \quad \text{または} \quad b_{jk}$$

と表現する。

パフィアンの成分が行列式の成分と基本的に異なる点は次の反対称性である。

$$\begin{aligned}&\mathrm{pf}(b,a) = -\mathrm{pf}(a,b), \quad (b,a) = -(a,b),\\ &(2,1) = -(1,2), \quad \mathrm{pf}(b_k,b_j) = -\mathrm{pf}(b_j,b_k), \quad b_{kj} = -b_{jk}.\end{aligned}$$

したがって成分を表す二つの文字が等しいとき、例えば $b = a$ のとき $\mathrm{pf}(a,a) = 0$ である。

次数 2 の行列式を、たとえば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{または} \quad \det|a_{jk}|_{1\le j,k\le 2} \quad \text{または} \quad \det|A|$$

と表現するように、次数 2 のパフィアンを、たとえば

$$\mathrm{pf}(b_1,b_2,b_3,b_4) \quad \text{または} \quad (b_1,b_2,b_3,b_4) \quad \text{または} \quad (1,2,3,4)$$

と表したり、成分を全部見たいときには行列式を斜め半分に切った形

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ & b_{23} & b_{24} \\ & & b_{34} \end{vmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{vmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ & (2,3) & (2,4) \\ & & (3,4) \end{vmatrix}$$

のように書く。どちらの表示も現在使われている。前者の表示の方が書くスペースが少なくてすむので今後はこの表示を使う。

§2.1.　パフィアンの定義

２次の行列式の展開公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

は２次の行列式の定義式とも読み換えられる。同じように２次のパフィアンの展開公式

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1, b_2)(b_3, b_4) - (b_1, b_3)(b_2, b_4) + (b_1, b_4)(b_2, b_3)$$

または

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3)$$

を２次のパフィアンの定義式[1]と考える。

２次の行列式は二つの項の和（差）である。一方、２次のパフィアンは三つの項の和（差）である。このことはパフィアンの方が行列式に比べてより一般的であること、すなわちパフィアンの特別の場合が行列式であることを示している。

２次のパフィアン $(1, 2, 3, 4)$ で二つの文字たとえば、文字 1 と文字 3 を入れ換える

$$\begin{aligned} (3, 2, 1, 4) &= (3, 2)(1, 4) - (3, 1)(2, 4) + (3, 4)(2, 1) \\ &= -(1, 2)(3, 4) + (1, 3)(2, 4) - (1, 4)(2, 3) = -(1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

と符号が変わる。したがって二つの文字が等しいとき、例えば $3 = 1$ のとき $(1, 2, 1, 4) = 0$ である。このことは行列式で二つの行または列が等しいとき、値は 0 になることに対応している。

同様にして３次のパフィアン $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を次の展開式で定義する。

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4, 5, 6) = (1, 2)(3, 4, 5, 6) &- (1, 3)(2, 4, 5, 6) + (1, 4)(2, 3, 5, 6) \\ &- (1, 5)(2, 3, 4, 6) + (1, 6)(2, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

この式で２次のパフィアン $(3, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 6), \ldots$ などは成分の積の和で展開されるので、結局３次のパフィアンは成分の３次の積の和として表現される。このことは３次の行列式が成分の３次の積の和として表現されることに対応している。

[1]行列式とパフィアンは後で外積代数を使って一般的に定義する。

外積代数によるパフィアンの定義から一般的に言えることだが、3次のパフィアン $(1,2,3,4,5,6)$ も二つの文字を入れ換えると符号が変わる。したがって成分を表す二つの文字が等しいとき パフィアンの値は0 である。

新しい記号 $\hat{k}$「$\hat{}$ の下の文字 k を取り去る」を導入して上の展開式を簡潔に表現する。

$$
\begin{aligned}
(1,2,3,4,5,6) &= (1,2)(\hat{2},3,4,5,6) - (1,3)(2,\hat{3},4,5,6) + (1,4)(2,3,\hat{4},5,6) \\
&\quad -(1,5)(2,3,4,\hat{5},6) + (1,6)(2,3,4,5,\hat{6}), \\
&= \sum_{k=2}^{6} (-1)^k (1,k)(2,\cdots,\hat{k},\cdots,5,6) \\
&= \sum_{k=1}^{6} (-1)^k (1,k)(\hat{1},2,\cdots,\hat{k},\cdots,5,6)
\end{aligned}
$$

この記号を使うと一般に n 次のパフィアン $(1,2,3,\cdots,2n)$ は次のように展開される。

$$
(1,2,3,\cdots,2n) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{j+k-1} (j,k)(1,\cdots,\hat{j},\cdots,\hat{k},\cdots,2n) \quad \text{for } j=1,2,\cdots,2n
$$

ただし $\hat{j}$ と $\hat{k}$ を入れ換えると符号が変わる、

$$
(\cdots,\hat{j},\cdots,\hat{k},\cdots) = -(\cdots,\hat{k},\cdots,\hat{j},\cdots) \quad \text{for } k>j
$$

と約束する。

§ 2.2. 外積代数 (Grassmann Exterior Algebra)

ベクトルの外積 $A\times B = -B\times A$ という概念を一般化した外積代数 (Grassmann Exterior Algebra) を使って、行列式やパフィアンを定義すると行列式やパフィアンの諸性質が見通しよくなる。まず **1 次式 (one-form)** を導入する。

$$
\omega_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x^k \quad j=1,2,\cdots,n,
$$

ここで基本になるのは、 x^j の積や y^j の積が次の反対称な交換関係

$$
x^j \wedge x^k = -x^k \wedge x^j, \quad x^j \wedge x^j = 0,
$$

を満たしていることで、それ以外はふつうの計算法にしたがう。ふつうの積 $\times$ との混同をさけるために積 $\wedge$ を使う。

n 次の行列式 は n 個の 1 次式の外積によって定義される。

$$
\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det |a_{jk}|_{1\le j,k\le n}\, x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^n, \tag{1}
$$

次に Ω を 2 次式 (two-form) とする:

$$\Omega = \sum_{1\le j<k,\le 2n} b_{j,k} x^j \wedge x^k, \quad b_{j,k} = -b_{k,j}.$$

成分が $\mathrm{pf}(b_j, b_k) = b_{jk} = -b_{kj}$ である n 次のパフィアンは Ω の n 乗積（外積）によって定義される：

$$\Omega\wedge^n = \Omega\wedge\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega = (n!)\mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}) x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \ldots \wedge x^{2n}. \tag{2}$$

ここで $n!$ は n の階乗である。

上式 (2) の一次式 x^j を別の一次式 y^j で表す。

$$x^j = \sum_{k=1}^{2n} w_{j,k} y^k, \quad (j = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{3}$$

そのとき式 (2) は定義式 (1) によって

$$\Omega\wedge^n = (n!)\mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}) \det(w_{ij})_{1\le i,j\le 2n} y^1 \wedge y^2 \wedge y^3 \ldots \wedge y^{2n}. \tag{4}$$

となる。したがってパフィアン $\mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n})$ は変換式 (3) によって値が次式のように変わる。

$$\mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}) \to \mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}) \det(w_{ij})_{1\le i,j\le 2n}$$

式 (4) を使うと、ソリトン理論の $\tau-$ 関数で結合型ソリトン解を表すパフィアン $\mathrm{pf}(a_1, a_2, \cdots, a_N, b_N, \cdots, b_2, b_1)$ は変換

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{k=1}^{n} u_{j,k} \alpha^k, \\ b_j &= \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} \beta^k, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

によって次のように変換される。

$$\begin{aligned} &\mathrm{pf}(a_1, a_2, \cdots, a_N, b_N, \cdots, b_2, b_1) \to \\ &\qquad \mathrm{pf}(a_1, a_2, \cdots, a_N, b_N, \cdots, b_2, b_1) \det(u_{ij})_{1\le i,j\le n} \det(v_{ij})_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

外積代数による行列式とパフィアンの定義式をよく理解するために, 簡単な例を示す。たとえば $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_{11}x^1 + a_{12}x^2) \wedge (a_{21}x^1 + a_{22}x^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) x^1 \wedge x^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^2 \end{aligned} \tag{5}$$

である。これは２行２列の行列式 $\det|a_{jk}|_{1\le j,k\le 2}$ を定義している。

パフィアンの定義式を $n=2$ のときに書き表すと

$$\Omega = b_{12}x^1\wedge x^2 + b_{13}x^1\wedge x^3 + b_{14}x^1\wedge x^4 + b_{23}x^2\wedge x^3 + b_{24}x^2\wedge x^4 + b_{34}x^3\wedge x^4 \quad (6)$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\Omega\wedge\Omega \\
&= \{b_{12}x^1\wedge x^2 + b_{13}x^1\wedge x^3 + b_{14}x^1\wedge x^4 + b_{23}x^2\wedge x^3 + b_{24}x^2\wedge x^4 + b_{34}x^3\wedge x^4\} \\
&\quad \wedge\{b_{12}x^1\wedge x^2 + b_{13}x^1\wedge x^3 + b_{14}x^1\wedge x^4 + b_{23}x^2\wedge x^3 + b_{24}x^2\wedge x^4 + b_{34}x^3\wedge x^4\} \\
&= 2\{b_{12}b_{34} - b_{13}b_{24} + b_{14}b_{23}\}x^1\wedge x^2\wedge x^3\wedge x^4. \qquad (7)
\end{aligned}$$

となる。一方定義式 (5) より

$$\Omega\wedge\Omega = 2\mathrm{pf}(b_1,b_2,b_3,b_4)x^1\wedge x^2\wedge x^3\wedge x^4. \qquad (8)$$

である。したがって展開式（=定義式）

$$\mathrm{pf}(b_1,b_2,b_3,b_4) = b_{12}b_{34} - b_{13}b_{24} + b_{14}b_{23} \qquad (9)$$

が得られる。

§2.3. 行列式のパフィアン表示

n 次の行列式は n 次のパフィアンで表示される：

$$|a_{jk}|_{1\le j,k\le n} = \mathrm{pf}(b_1,b_2,\ldots,b_n,b_n^*,b_{n-1}^*,\ldots,b_2^*,b_1^*)$$

ただしパフィアンの成分を次式で定める。

$$\mathrm{pf}(b_j,b_k) = \mathrm{pf}(b_j^*,b_k^*) = 0, \quad \mathrm{pf}(b_j,b_k^*) = a_{jk}, \quad \text{for } j,k=1,2,\ldots,n.$$

たとえば $n=2$ のとき、左辺は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

であり、右辺は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pf}(b_1,b_2,b_2^*,b_1^*) \\
&= \mathrm{pf}(b_1,b_2)\mathrm{pf}(b_2^*,b_1^*) - \mathrm{pf}(b_1,b_2^*)\mathrm{pf}(b_2,b_1^*) + \mathrm{pf}(b_1,b_1^*)\mathrm{pf}(b_2,b_2^*) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

であるので、左辺と右辺が等しくなる。行列式のパフィアン表示によって行列式がパフィアンの一種であることが理解される。

§3. パフィアン の恒等式

『双線形方程式をパフィアンで 表示すると、それはパフィアンの恒等式に帰着する』と述べたが、

1) パフィアン の恒等式はどうやって求めるのか？

2) それはどのような構造をしているのか？

これらの疑問に答えるのがこの節の目的である。

§3.1. 基本的恒等式

まず文字列 $\mathbf{b} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_M\}$ と $\mathbf{c} = \{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ を用意する。文字列 $\mathbf{b}$ と文字列 $\mathbf{c}$ は必ずしも異なっている必要はなく、共通の文字があってもよい。文字列 $\mathbf{b}$ の中から一文字 b_j $(j = 0, 1, 2, \cdots, M)$ を取り出し、文字列 $\mathbf{c}$ の先頭に付け加える。この操作によって文字列 $\mathbf{b}$ と文字列 $\mathbf{c}$ は新しい文字列

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_j &= \{b_0, b_1, b_2, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M\},\\ \mathbf{c}^j &= \{b_j, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N\}\end{aligned}$$

になる。$\hat{b}_j$ は文字 b_j が取り去られていることを示す記号である。

文字列 $\mathbf{b}_j$ と文字列 $\mathbf{c}^j$ を使った次のようなパフィアンの積の $M+1$ 個の和を考える。

$$P_1 \equiv \sum_{j=0}^{M} (-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M)\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N)$$

一方、文字列 $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ を入れ換えて、文字列 $\mathbf{c}$ の中から一文字 c_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, N)$ を取り出し、文字列 $\mathbf{b}$ の後尾に付け加える。この操作によって新しい文字列

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^k &= \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_M, c_k\},\\ \mathbf{c}_k &= \{c_0, c_1, c_2, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N\}\end{aligned}$$

が得られる。文字列 $\mathbf{b}^k$ と文字列 $\mathbf{c}_k$ を使った次のようなパフィアンの積の $N+1$ 個の和を考える。

$$P_2 \equiv \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N)$$

このとき $P_1 = P_2$, すなわち次の恒等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{M} (-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M)\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N)\\ &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N) \qquad (10)\end{aligned}$$

この恒等式は太田泰広氏（神戸大学）によって発見された[2]。

この恒等式はほとんど自明で、左辺の $\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N)$ を最初の文字 b_j について展開し、右辺の $\mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, c_k)$ を最後の文字 c_k について展開すると、式 (10) は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M) \times \mathrm{pf}(b_j, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N) \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \sum_{j=0}^{M}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M) \times \mathrm{pf}(b_j, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N)
\end{aligned}
$$

となる。この式は和の順序を入れ替えただけなので確かに恒等式である。

式 (10) で文字列 $\mathbf{b}^k$ と文字列 $\mathbf{c}_k$ が共通の文字を含むとき、たとえば $b_3 = c_5$ のとき、式 (10) の左辺の j についての和は $j = 3$ のとき $(\mathrm{pf}(b_3, c_0, c_1, \cdots, c_N) = 0$ のため）0 になり、右辺の k についての和は $k = 5$ のとき $(\mathrm{pf}(b_0, b_1, \cdots, b_M, c_5) = 0$ のため）0 になる。文字列 $\mathbf{b}^k$ と $\mathbf{c}_k$ の共通の文字列を明示的にした公式が次の Ohta's Identity(太田の恒等式) である。

§ 3.2. Ohta's identity

基本的恒等式は任意の文字列 $1, 2, \cdots, 2n$ を同次的に追加しても成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, 1, 2, \cdots, 2n, c_k) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

この恒等式を Ohta's identity と呼ぶ。証明は簡単で基本的恒等式で、$M \to M+2n, N \to N+2n$ と置き換えると、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M+2n}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M, b_{M+1}, \ldots, b_{M+2n}) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, c_{N+1}, \ldots, c_{N+2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{N+2n}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, b_{M+1}, \ldots, b_{M+2n}, c_k) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, c_{N+1}, \ldots, c_{N+2n})
\end{aligned}
$$

[2] 太田泰広:*Bilinear Theory of Soliton,* 博士論文（東京大学工学部 1992）

となる。ここで 文字列 $\mathbf{b}^k$ と $\mathbf{c}_k$ の共通の文字列として $b_{M+k} = c_{N+k} = k, (k = 1, 2, \ldots, 2n)$ を選ぶと上式は

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M+2n} (-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M, 1, 2, \ldots, 2n) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, 1, 2, \ldots, 2n) \\
&= \sum_{k=0}^{N+2n} (-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, 1, 2, \ldots, 2n, c_k) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, 1, 2, \ldots, 2n)
\end{aligned}$$

となる。ここで左辺の和は、$j = M+1, M+2, \ldots, M+2n$ のとき、($b_{M+k} = c_{N+k} = k,\ (k = 1, 2, \ldots, 2n)$ と置いて、同一文字にしたので、) 移動した文字が移動先の文字と重複する。そのためパフィアンの値は 0 である。同様にして右辺の和は $k = N+1, N+2, \ldots, N+2n$ のとき 0 である。したがって式 (11) が成り立つ。

Ohta's identity は $M = 0$ のとき、恒等式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pf}(1, 2, \ldots, 2n)\mathrm{pf}(b_0, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N, 1, 2, \ldots, 2n) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(b_0, c_k, 1, 2, \ldots, 2n)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, 1, 2, \ldots, 2n)
\end{aligned} \tag{12}$$

を与える。この恒等式を本稿ではパフィアンの恒等式 A と呼ぶ。

この恒等式 A はパフィアンの展開公式

$$\mathrm{pf}(b_0, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_N) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(b_0, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \cdots, \hat{c}_k, \cdots, c_N)$$

に任意の文字列 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ を同次的に追加したものである。

式 (12) に戻り、$b_0 = c_0$ とおくと、左辺は恒等的に 0 となり、右辺の k についての和は、$k = 0$ のときは 0 になるので、$k = 1$ から始まる。即ち、式 (12) は次式になる。

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(c_0, c_k, 1, 2, \ldots, 2n)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, 1, 2, \ldots, 2n) = 0. \tag{13}$$

この式 (13) を本稿ではパフィアンの恒等式 B と呼ぶ。

恒等式 (13) は（文字 c_0 が重なっているので）恒等的に 0 であるパフィアンの展開公式

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{pf}(c_0, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_N) \\
&= \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \mathrm{pf}(c_0, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \cdots, \hat{c}_k, c_N)
\end{aligned}$$

に任意の文字列 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ を同次的に追加したものである。

§4. パフィアンの加法公式 (Addition formula for pfaffians)

「直接法によるソリトンの数理」pp.94-95 で証明されているパフィアンの加法公式 (addition formula for pfaffians) がある。

N 次の pfaffian $(1, 2, \cdots, 2N)_c$ を考える。ただし成分 $(i, j)_c$ は pfaffian, (i, j) と $\lambda(a, b, i, j)$ の和、即ち

$$(i, j)_c = (i, j) + \lambda(a, b, i, j)$$

で与えられる。ここで $(a, b) = 0$, λ は任意定数である。このとき加法公式

$$(1, 2, \cdots, 2N)_c = (1, 2, \cdots, 2N) + \lambda(a, b, 1, 2, \cdots, 2N) \tag{14}$$

が成り立つ。

§4.1. 拡張された加法公式

この加法公式 (14) を拡張する。　まず上の加法公式を書き直す。

(1) 定義 : $(a, b) = 0$　を使わなくて、$(a, b) \neq 0$ とする。

(2) 任意定数 λ の値をパフィアン (a, b) を使って $1/(a, b)$ と定める。

そのとき、加法公式 (14) は次式に等しい。

$$(1, 2, \cdots, 2N)_c = (a, b, 1, 2, \cdots, 2N)/(a, b)$$

ただし、

$$(i, j)_c = (a, b, i, j)/(a, b). \quad \text{for } i, j = 1, 2, \cdots, 2N$$

である。

この加法公式を拡張するために記号を新しくする。m, n は自然数として

(1) パフィアン (i, j) をパフィアン (b_i, b_j) で表す.

(2) パフィアン $(i, j)_c$ をパフィアン (β_i, β_j) で表す。 $i, j = 1, 2, \cdots, 2n$.

(3) 文字リスト $\{a, b\}$ を拡張して $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2m}\}$ とする。

このとき拡張された加法公式は次式で表される。

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2n}) = (d_1, d_2, \cdots, d_{2m}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n})/(d_1, d_2, \cdots, d_{2m}). \tag{15}$$

ただし

$$(\beta_i,\beta_j)=(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_i,b_j)/(d_1,d_2,\cdots,d_{2m}).$$

$i,j=1,2,\cdots,2n.$

§4.2. 加法公式の証明

n 次の加法公式 (15) を帰納法を使って証明する。ただし 1 次の加法公式

$$(\beta_i,\beta_j)=(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_i,b_j)/(d_1,d_2,\cdots,d_{2m}) \tag{16}$$

が $i,j=1,2,\cdots,2n$ について常に成立していると仮定する。

帰納法を使うため、$n-1$ 次の加法公式

$$\begin{aligned}&(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2(n-1)})\\&\quad=(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_1,b_2,\cdots,b_{2(n-1)})/(d_1,d_2,\cdots,d_{2m})\end{aligned} \tag{17}$$

が成立していると仮定する。

n 次のパフィアンの展開式、

$$(b_1,b_2,\cdots,b_{2n})=\sum_{j=2}^{2n}(b_1,b_j)(-1)^j(b_2,b_3,\cdots,\hat{b}_j,\cdots,b_{2n}). \tag{18}$$

を取り上げる。展開式は Ohta's identity によって文字リスト $\{d_1,d_2,\cdots,d_{2m}\}$ を同次的に追加しても成立する。

$$\begin{aligned}&(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_1,b_2,\cdots,b_{2n})(d_1,d_2,\cdots,d_{2m})\\&=\sum_{j=2}^{2n}(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_1,b_j)(-1)^j(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_2,b_3,\cdots,\hat{b}_j,\cdots,b_{2n}).\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) を $(d_1,d_2,\cdots,d_{2m})$ の二乗で割り、仮定 (16) と (17) を使うと

$$\begin{aligned}&(d_1,d_2,\cdots,d_{2m},b_1,b_2,\cdots,b_{2n})/(d_1,d_2,\cdots,d_{2m})\\&=\sum_{j=2}^{2n}(\beta_1,\beta_j)(-1)^j(\beta_2,\beta_3,\cdots,\hat{\beta}_j,\cdots,\beta_{2n})\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2n})\end{aligned} \tag{20}$$

となる。すなわち n 次の加法公式が得られた。証明終わり。

§4.3. 加法公式の簡単な例

次の成分

$$(\beta_i,\beta_j)=\sin(x_i-x_j),\quad i,j=1,2,3,4 \tag{21}$$

をもつパフィアン $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ を考える。このパフィアンの値は展開式

$$\begin{aligned}&(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\beta_1,\beta_2)(\beta_3,\beta_4)-(\beta_1,\beta_3)(\beta_2,\beta_4)+(\beta_1,\beta_4)(\beta_2,\beta_3)\\&=\sin(x_1-x_2)\sin(x_3-x_4)-\sin(x_1-x_3)\sin(x_2-x_4)\\&+\sin(x_1-x_4)\sin(x_2-x_3)\end{aligned}\tag{22}$$

で与えられる。

「問題」　このパフィアンの値は 0 である。すなわち $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=0$ を示せ。

「解答」　成分 (β_i,β_j) を別のパフィアンで表す。

$$(\beta_i,\beta_j)=(c,s,b_i,b_j)/(c,s).$$

ここで $(c,s)=1,(c,b_i)=\cos(b_i),(s,b_i)=\sin(b_i),(b_i,b_j)=0,\quad i,j=1,2,3,4$ である。このとき、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}(\beta_i,\beta_j)&=-(c,b_i)(s,b_j)+(c,b_j)(s,b_i)\\&=-\cos(b_i)\sin(b_j)+\cos(b_j)\sin(b_i)\\&=\sin(b_i-b_j)\end{aligned}$$

パフィアンの加法公式より、

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(c,s,b_1,b_2,b_3,b_4)/(c,s)$$

と表される。右辺は定義式 $(b_i,b_j)=0$ に注目すると、文字 $\{b_j\}$ の数が文字 $\{c,s\}$ の数より多いので、0 である。解答終わり。

§5.　特別なパフィアンの積表示

文字リスト L_p を定義する。この L_p に含まれている任意の文字 $\{a,b\}$ で生成されたパフィアン (a,b) は次のように定義されている。

$$(a,b)=\frac{a-b}{a+b},\quad a,b\in L_p.$$

文字 $s_i,\ i=1,2,\cdots.$ は L_p に含まれている、すなわち

$$(s_i,s_j)=\frac{s_i-s_j}{s_i+s_j},\quad i,j=1,2,\cdots.\tag{23}$$

とする。この s_i にたいして、添え字 0 を持つ s_0 で作ったパフィアン (s_0,s_i)

$$(s_0,s_i)=1$$

を用意する。このとき自然数 m に対して, 次の積表示が成り立つ。

$$(s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{2m-1}) = \prod_{1\le i<j\le 2m-1} (s_i, s_j), \tag{24}$$

$$(s_1, s_2, \cdots, s_{2m}) = \prod_{1\le i<j\le 2m} (s_i, s_j). \tag{25}$$

この積表示を使うと、さらに新しい文字 $p(i), p(j)$, $i, j = 1, 2, \cdots, 2N$ が L_p に含まれているとき、次の積表示が成り立つ。

$$\begin{aligned}&(s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{2m-1}, p(i), p(j))\\ &= (s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{2m-1})[\prod_{l=1}^{2m-1}((s_l, p(i))(s_l, p(j)))](p(i), p(j)),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&(s_1, s_2, \cdots, s_{2m}, p(i), p(j))\\ &= (s_1, s_2, \cdots, s_{2m})[\prod_{l=1}^{2m}((s_l, p(i))(s_l, p(j)))](p(i), p(j)).\end{aligned} \tag{27}$$

上式でパフィアンの成分は式（23）で表されているが、このパフィアンは連続系のソリトンの phase shift (衝突後の位相のずれ）を記述する量である。

この量は離散系になると次式の形に変化する。

$$(s_i, s_j) = \frac{s_i - s_j}{s_i s_j - 1}, \quad i, j = 1, 2, \cdots. \tag{28}$$

しかし、パフィアンの積表示 (26) と (27) はこの場合（パフィアンの成分 (s_i, s_j) が式（28）で表されるとき）にも成り立っている。

§5.1. 例

$m = 2$ のとき積表示 (24) の左辺は展開すると

$$\begin{aligned}(s_0, s_1, s_2, s_3) &= (s_0, s_1)(s_2, s_3) - (s_0, s_2)(s_1, s_3) + (s_0, s_3)(s_1, s_2),\\ &= \frac{s_2 - s_3}{s_2 + s_3} - \frac{s_1 - s_3}{s_1 + s_3} + \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}\end{aligned} \tag{29}$$

となる。一方右辺は

$$\begin{aligned}\prod_{1\le j<k\le 3} (s_j, s_k) &= (s_1, s_2)(s_1, s_3)(s_2, s_3),\\ &= \frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{(s_1 + s_2)(s_1 + s_3)(s_2 + s_3)}\end{aligned} \tag{30}$$

である。つまり恒等式

$$\frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{(s_1 + s_2)(s_1 + s_3)(s_2 + s_3)} = \frac{s_2 - s_3}{s_2 + s_3} - \frac{s_1 - s_3}{s_1 + s_3} + \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \tag{31}$$

が成り立つことを意味している。これら恒等式は分母と分子の零点の個数を調べると証明できる。

§6. Discrete BKP 方程式

Miwa [1] によって発見された Discrete BKP 方程式 は双線形方程式で次式の形をしている。

$$\begin{aligned}&(a+b)(a+c)(b-c)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)\\ &+(b+c)(b+a)(c-a)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\ &+(c+a)(c+b)(a-b)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)\\ &+(a-b)(b-c)(c-a)\tau(l,m,n)\tau(l+1,m+1,n+1)=0. \end{aligned} \tag{32}$$

２ソリトン解は次式の形をしている。

$$\tau_2 = 1 + c_1\exp(\eta_1) + c_2\exp(\eta_2) + c_1c_2b_{12}\exp(\eta_1+\eta_2), \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\exp(\eta_j) = {} & [\frac{(1-p_ja)(1-q_ja)}{(1+p_ja)(1+q_ja)}]^l\\ & [\frac{(1-p_jb)(1-q_jb)}{(1+p_jb)(1+q_jb)}]^m\\ & [\frac{(1-p_jc)(1-q_jc)}{(1+p_jc)(1+q_jc)}]^n, \quad j=1,2,\end{aligned} \tag{34}$$

$$b_{12} = \frac{(p_1-p_2)(p_1-q_2)(q_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1+p_2)(p_1+q_2)(q_1+p_2)(q_1+q_2)}. \tag{35}$$

ただし c_j $(j=1,2)$ は j だけに依存する任意定数である。

§6.1. 高次 BKP 差分方程式のパフィアン表現

高次 BKP 差分方程式とその解はパフィアンを使って表現されることが論文 [5] で既に示されている。

本稿の目的は高次 BKP 差分方程式とその解の構成法をパフィアンの加法公式を使って簡潔に説明することである。以下はそのための準備である。

§6.2. シフト演算子

独立変数が 3 個 $\{l,m,n\}$ の BKP 方程式を拡張して独立変数が m 個の高次 BKP 方程式を考える。このため $\{l,m,n\}$ の代わりに $\{k_1,k_2,k_3,\cdots k_m\}$ を導入する。f が変数 $\{k_1,k_2,k_3,\cdots k_m\}$ の関数であるとき、添え字を省略して $f(k)$ で表す。

次にシフト演算子 E を導入する。演算子 E は f の変数 $k_j (j=1,2,\cdots,m)$ に作用して k_j を 1 だけシフトする. すなわち

$$E(f(k),k_{j_1},k_{j_2},\cdots) = f(k)|_{k_{j_1}=k_{j_1}+1,k_{j_2}=k_{j_2}+1,\cdots} \tag{36}$$

である。たとえば

$$E(f(k),k_1)=f(k_1+1,k_2,k_3,\cdots),$$
$$E(f(k),k_1,k_3)=f(k_1+1,k_2,k_3+1,\cdots).$$

である。

§6.3. τ'_N 関数と τ_{ij} 関数

N ソリトン解を表す関数 τ_N と 1 ソリトン解を表す関数 τ_{ij} を導入する。

τ_N はN次のパフィアン $(1,2,3,\cdots,2N)$ で表現され、τ_{ij} は 1 次のパフィアン (i,j) で表現されている。

$$\tau_N(k)=\tau_N(k_1,k_2,\cdots,k_m)=(1,2,3,\cdots,2N),$$
$$\tau_{ij}(k)=\tau_{ij}(k_1,k_2,\cdots,k_m)=(i,j).$$

BKP 差分方程式は τ'_N 関数 (変数をシフトした τ_N 関数) の積の和として表現されている。τ'_N 関数として $\tau_N(k_l),\tau_N(\bar{k}),\tau_N(\hat{k}_l)$ などがある。

1. 1 個の変数 k_l のみをシフトした $\tau_N(k_l)$,

$$\tau_N(k_l)=E(\tau_N,k_l)=\tau_N(k_1,k_2,\cdots,k_l+1,\cdots,k_m).$$

2. 全部の変数をシフトした $\tau_N(\bar{k})$,

$$\tau_N(\bar{k})=E(\tau_N,k_1,k_2,\cdots,k_m)=\tau_N(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1).$$

3. 変数 k_l を除いた他の変数すべてをシフトした $\tau_N(\hat{k}_l)$,

$$\tau_N(\hat{k}_l)=E(\tau_N,k_1,k_2,\cdots,\hat{k}_l,\cdots,k_m)=\tau_N(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_l,\cdots,k_m+1).$$

§7. BKP 差分方程式の書き換え

BKP 差分方程式

$$\begin{aligned}&(a+b)(a+c)(b-c)\tau(k_1+1,k_2,k_3)\tau(k_1,k_2+1,k_3+1)\\&+(b+c)(b+a)(c-a)\tau(k_1,k_2+1,k_3)\tau(k_1+1,k_2,k_3+1)\\&+(c+a)(c+b)(a-b)\tau(k_1,k_2,k_3+1)\tau(k_1+1,k_2+1,k_3)\\&+(a-b)(b-c)(c-a)\tau(k_1+1,k_2+1,k_3+1)\tau(k_1,k_2,k_3)=0\end{aligned}$$

は、シフトされた τ を使うと次式になる。

$$\begin{aligned}&(a+b)(a+c)(b-c)\tau(k_1)\tau(\hat{k}_1)+(b+c)(b+a)(c-a)\tau(k_2)\tau(\hat{k}_2)\\&+(c+a)(c+b)(a-b)\tau(k_3)\tau(\hat{k}_3)+(a-b)(b-c)(c-a)\tau(\bar{k})\tau(k)=0.\end{aligned}$$

この式の係数 $(a+b)(a+c)(b-c),\cdots$ を書き換える。前式を $(a+b)(a+c)(b+c)$ で割ると次式が得られる。

$$\frac{b-c}{b+c}\tau(k_1)\tau(\hat{k}_1)-\frac{a-c}{a+c}\tau(k_2)\tau(\hat{k}_2)+\frac{a-b}{a+b}\tau(k_3)\tau(\hat{k}_3)$$
$$-\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\tau(\bar{k})\tau(k)=0.$$

ここで新しいパラメータ s_1,s_2,s_3 $(a=1/s_1,\quad b=1/s_2,\quad c=1/s_3.)$ を導入する。このパラメータによって 係数は

$$\begin{aligned}
&\frac{a-b}{a+b}=-\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}=-(s_1,s_2),\\
&\frac{a-c}{a+c}=-\frac{s_1-s_3}{s_1+s_3}=-(s_1,s_3),\\
&\frac{b-c}{b+c}=-\frac{s_2-s_3}{s_2+s_3}=-(s_2,s_3),\\
&\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=-(s_1,s_2)(s_1,s_3)(s_2,s_3)=-(s_0,s_1,s_2,s_3).
\end{aligned}\tag{37}$$

と表される。したがって BKP 差分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
&(s_0,s_1,s_2,s_3)\tau(\bar{k})\tau(k)\\
&\qquad=(s_0,s_1)(s_2,s_3)\tau(k_1)\tau(\hat{k}_1)-(s_0,s_2)(s_1,s_3)\tau(k_2)\tau(\hat{k}_2)\\
&\qquad+(s_0,s_3)(s_1,s_2)\tau(k_3)\tau(\hat{k}_3).
\end{aligned}\tag{38}$$

§8. BKP 差分方程式とパフィアンの恒等式 A

パフィアンの恒等式 A はパフィアンの展開式に任意の文字列 $\{1,2,\cdots,2N\}$ を同次的に追加して得られる。式 (38) で表された BKP 差分方程式を見て、パフィアンの展開式として次式を選ぶ。

$$(s_0,s_1,s_2,s_3)=(s_0,s_1)(s_2,s_3)-(s_0,s_2)(s_1,s_3)+(s_0,s_3)(s_1,s_2).$$

一方、任意の文字列 $\{1,2,\cdots,2N\}$ として N ソリトン解を表すパフィアン
$\tau_N=(1,2,\cdots,2N)$ を選ぶ。このときパフィアンの恒等式 A は次式で表される。

$$\begin{aligned}
&(s_0,s_1,s_2,s_3,1,2,\cdots,2N)(1,2,\cdots,2N)\\
&=(s_0,s_1,1,2,\cdots,2N)(s_2,s_3,1,2,\cdots,2N)\\
&-(s_0,s_2,1,2,\cdots,2N)(s_1,s_3,1,2,\cdots,2N)\\
&+(s_0,s_3,1,2,\cdots,2N)(s_1,s_2,1,2,\cdots,2N).
\end{aligned}\tag{39}$$

BKP 差分方程式 (38) とパフィアンの恒等式 A(39) を結びつけるものは次の τ'_N 関数のパフィアン表示である。

$$\tau(k_l) = (s_0, s_l, 1, 2, \cdots, 2N)/(s_0, s_l), \tag{40}$$

$$\tau(\hat{k}_l) = (s_1, \hat{s}_l, s_3, 1, 2, \cdots, 2N)/(s_1, \hat{s}_l, s_3), \quad l = 1, 2, 3. \tag{41}$$

$$\tau(\bar{k}) = (s_0, s_1, s_2, s_3, 1, 2, \cdots, 2N)/(s_0, s_1, s_2, s_3). \tag{42}$$

上式が成り立つと、BKP 差分方程式 (38) はパフィアンの恒等式 A(39) に帰着する。したがって τ_N 関数が BKP 差分方程式 (38) の解であることが証明される。

しかし任意の自然数 N で上式を証明するのは簡単ではない！

ここで「パフィアンの加法公式」が役に立つ。パフィアンの加法公式によれば上式が成り立つためには τ'_N 関数 (N ソリトン解) の代わりに、τ'_{ij} 関数 (1 ソリトン解) のパフィアン表示が成り立つことが十分条件である。すなわち

$$\tau_{ij}(k_l) = (s_0, s_l, i, j)/(s_0, s_l), \tag{43}$$

$$\tau_{ij}(\hat{k}_l) = (s_1, \hat{s}_l, s_3, i, j)/(s_1, \hat{s}_l, s_3), \quad l = 1, 2, 3. \tag{44}$$

$$\tau_{ij}(\bar{k}) = (s_0, s_1, s_2, s_3, i, j)/(s_0, s_1, s_2, s_3). \tag{45}$$

が成り立てば τ_N 関数が BKP 差分方程式 (38) の解になる。このため、τ_{ij} 関数の表示を調べる。

§9.　１ソリトン解

Miwa による BKP 差分方程式の 1 ソリトン解の表示は次式である。

$$\tau_1(l, m, n) = 1 + c_j \exp(\eta_j),$$
$$\exp(\eta_j) =$$
$$[\frac{(1-p_j a)}{(1+p_j a)}\frac{(1-q_j a)}{(1+q_j a)}]^l[\frac{(1-p_j b)}{(1+p_j b)}\frac{(1-q_j b)}{(1+q_j b)}]^m[\frac{(1-p_j c)}{(1+p_j c)}\frac{(1-q_j c)}{(1+q_j c)}]^n.$$

ここで c_j は添え字 j だけに依存する任意定数である。この表示を書き換える。

まず i に依存する関数 $\rho(i)$ を次式で導入する。

$$\rho(i) = [\frac{1-p(i)a}{1+p(i)a}]^l[\frac{1-p(i)b}{1+p(i)b}]^m[\frac{1-p(i)c}{1+p(i)c}]^n, \quad i = 1, 2, \cdots, 2N.$$

高次差分方程式への拡張を考えて、変数 $\{l, m, n\}$ とパラメータ $\{a, b, c\}$ を書き換える。

$$\{l, m, n\} \to \{k_1, k_2, k_3, \cdots, k_m\},$$
$$\{a, b, c\} \to \{1/s_1, 1/s_2, 1/s_3, \cdots, 1/s_m\}.$$

このとき次の表示が得られる。

$$\frac{1-p(i)a}{1+p(i)a}=\frac{s_1-p(i)}{s_1+p(i)}\equiv(s_1,p(i)),\ \frac{1-p(i)b}{1+p(i)b}=\frac{s_2-p(i)}{s_2+p(i)}\equiv(s_2,p(i)),\cdots$$

したがって $\rho(i)$ は

$$\rho(i)=\prod_{l=1}^{m}(s_l,p(i))^{k_l},\quad i=1,2,\cdots,2N.$$

と簡潔に表示される。

§9.1. τ'_{ij} 関数 (シフトした τ_{ij} 関数)

パフィアン (i,j) を次式で定義する。

$$(i,j)=c_0(i,j)+(p(i),p(j))\rho(i)\rho(j),\quad i,j=1,2,\cdots,N.$$

ここで $c_0(i,j)$ は i,j に依存する任意の定数である。

$\rho(i)$ の定義 $\rho(i)=\prod_{l=1}^{m}(s_l,p(i))^{k_l}$ より $\rho(i)$ をシフトすると

$$E(\rho(i),k_l)=(s_l,p(i))\rho(i),\quad l=1,2,\cdots,m. \tag{46}$$

である。したがってパフィアン (i,j) をシフトすると次式が得られる。

$$E((i,j),k_l)=c_0(i,j)+(p(i),p(j))[(s_l,p(i))(s_l,p(j))]\rho(i)\rho(j), \tag{47}$$

$$E((i,j),\hat{k}_l)=c_0(i,j)+(p(i),p(j))[\prod_{n=1,n\neq l}^{m}(s_n,p(i))(s_n,p(j))]\rho(i)\rho(j), \tag{48}$$

$$E((i,j),\bar{k})=c_0(i,j)+(p(i),p(j))[\prod_{n=1}^{m}(s_n,p(i))(s_n,p(j))]\rho(i)\rho(j). \tag{49}$$

§9.2. $\tau'_{i,j}$ のパフィアン表示

新しいパフィアン $(a(i),a(j))$ を導入して (i,j) を書き直す。

$$\begin{aligned}&(i,j)=c_0(i,j)+(a(i),a(j)),\\&(a(i),a(j))=(p(i),p(j))\rho(i)\rho(j),\quad i,j=1,2,\cdots,2N.\end{aligned}$$

したがって、

$$(s_l,i)=(s_l,a(i))=(s_l,p(i))\rho(i),\quad l=0,1,2,\cdots,m.$$

と定めると、

$$\begin{aligned}&(s_0,s_{l_1},s_{l_2},\cdots,s_{l_m},i,j)\\&=(s_0,s_{l_1},s_{l_2},\cdots,s_{l_m})c_0(i,j)+(s_0,s_{l_1},s_{l_2},\cdots,s_{l_m},a(i),a(j)).\end{aligned} \tag{50}$$

と表される。ただし、s_{l_j} はリスト $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ から重複しないように選ぶ。すなわち $(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}) \neq 0$ とする。

$(s_l, a(i)) = (s_l, p(i))\rho(i)$ より、左辺のパフィアンを最後の文字で展開すると、次式が成り立つ。

$$(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_{m-1}}, a(i)) = (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_{m-1}}, p(i))\rho(i),$$
$$(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, a(i), a(j)) = (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, p(i), p(j))\rho(i)\rho(j).$$

ここで文字 $p(i), p(j)$, $i, j = 1, 2, \cdots, 2N$ が文字リスト L_p に属しているとする。ここからは m が奇数の場合を考える（m が偶数の場合は Appendix A を見よ）。恒等式 (26) によって次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, a(i), a(j))\\ &= (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, p(i), p(j))\ \rho(i)\rho(j),\\ &= (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m})\ (p(i), p(j))[\prod_{n=1}^{m}(s_{l_n}, p(i))(s_{l_n}, p(j))]\rho(i)\rho(j).\end{aligned}$$

この式と式 (50) を使うと次式が得られる。

$$\begin{aligned}&(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, i, j)/(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m})\\ &= c_0(i, j) + (p(i), p(j))[\prod_{n=1}^{m}(s_{l_n}, p(i))(s_{l_n}, p(j))]\ \rho(i)\rho(j).\end{aligned} \tag{51}$$

パフィアン (i, j) を変数 $k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_m}$ でシフトする。

$$\begin{aligned}&E(\ (i, j)\ , k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_m})\\ &= c_0(i, j) + (p(i), p(j))[\prod_{n=1}^{m}(s_{l_n}, p(i))(s_{l_n}, p(j))]\ \rho(i)\rho(j)\end{aligned} \tag{52}$$

となるが、この式と式 (51) を使うと

$$\begin{aligned}&E(\ (i, j)\ , k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_m})\\ &= (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, i, j)/(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}).\end{aligned} \tag{53}$$

と表現される。

この式に加法公式を適用すると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&E(\tau_N,\ k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_m})\\ &= (s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, 1, 2, \cdots, 2N)/(s_0, s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}).\end{aligned} \tag{54}$$

ただし、$\tau_N = (1, 2, \cdots, 2N)$ である。

式（54）は 初めに仮定した式 (40),(41),(42) がすべて成立することを証明している。すなわち、τ_N が BKP 差分方程式を満たしていることが示された。 証明終り。

§10. 4 次 BKP 差分方程式

独立変数が 3 個 $(l, m, n \text{ or } k_1, k_2, k_3)$ の BKP 差分方程式 (32) を今後は 3 次の BKP 差分方程式と呼ぶ。3 次の BKP 差分方程式はパフィアンの展開式 $(s_0, s_1, s_2, s_3) = (s_0, s_1)(s_2, s_3) - (s_0, s_2)(s_1, s_3) + (s_0, s_3)(s_1, s_2)$ に文字列 $\{1, 2, \cdots, 2N\}$ を同次的に追加して得られた恒等式 A に帰着することを示した。以下で高次 BKP 差分方程式を構築する。

§10.1. 4 次 BKP 差分方程式 A

独立変数が 4 個 (k_1, k_2, k_3, k_4) の BKP 差分方程式を構築する。

文字列 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ を含むパフィアンの展開式を考える。

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = (s_1, s_2)(s_3, s_4) - (s_1, s_3)(s_2, s_4) + (s_1, s_4)(s_2, s_3).$$

この展開式に文字列 $\{1, 2, \cdots, 2N\}$ を同時的に追加して得られた A 型の恒等式を考える。

$$\begin{aligned}
&(s_1, s_2, s_3, s_4, 1, 2, \cdots, 2N)(1, 2, \cdots, 2N) \\
&= (s_1, s_2, 1, 2, \cdots, 2N)(s_3, s_4, 1, 2, \cdots, 2N) \\
&-(s_1, s_3, 1, 2, \cdots, 2N)(s_2, s_4, 1, 2, \cdots, 2N) \\
&+(s_1, s_4, 1, 2, \cdots, 2N)(s_2, s_3, 1, 2, \cdots, 2N).
\end{aligned}$$

この恒等式は Appendix A で求めた τ'_N 関数のパフィアン表現式 (m が偶数）を適用すると次式になる。

$$\begin{aligned}
&(s_1, s_2, s_3, s_4)\tau_N(\bar{k})\tau_N(k) \\
&= (s_1, s_2)(s_3, s_4)E(\tau_N, k_1, k_2)E(\tau_N, k_3, k_4) \\
&-(s_1, s_3)(s_2, s_4)E(\tau_N, k_1, k_3)E(\tau_N, k_2, k_4) \\
&+(s_1, s_4)(s_2, s_3)E(\tau_N, k_1, k_4)E(\tau_N, k_2, k_3).
\end{aligned}$$

これが 4 次 BKP 差分方程式 A である。

§10.2. 4 次 BKP 差分方程式 B

全く同様にして B 型の恒等式

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^j(s_0, s_j)(s_0, s_1, \hat{s}_j, \ldots, s_4) = 0.$$

から出発して表現式 (54) を使うと 4 次 BKP 差分方程式 B

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^j(s_0, s_1, \ldots, \hat{s}_j, s_4)\tau_N(k_j)\tau_N(\hat{k}_j) = 0.$$

が得られる。

§11. Non-autonomous BKP 差分方程式

定数 s_j を変数 k_j の関数とする。

$$s_j = s_j(k_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

この変換によって今まで議論してきたパフィアンの性質は不変である。したがって Non-autonomous BKP 差分方程式は自動的に生成される。ただし、non-autonomous になると s_j が変数 k_j の関数になるので、

$$\rho(i) \equiv \prod_{j=1}^{m}(s_j, p(i))^{k_j}$$

を変数 k_j でシフトした公式 (46) が一般には成立しない。この場合はべき関数 $(s_l, p(i))^{k_l}$ を次式の階乗べき関数 $g(k_l, p(i))$,

$$g(k_l, p(i)) \equiv \prod_{k=0}^{k_l-1}(s_l(k), p(i)).$$

で置き換える必要がある。この定義により

$$\begin{aligned} g(k_l+1, p(i)) &= \prod_{k=0}^{k_l}(s_l(k), p(i)) \\ &= [\prod_{k=0}^{k_l-1}(s_l(k), p(i))] \times (s_l(k_l), p(i)) \\ &= g(k_l, p(i))\ (s_l(k), p(i)). \end{aligned}$$

となり、式 (46) が成り立つ。

References

[1] Miwa T.“On Hirota’s difference equations”, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. **58** (1982) 9-12.

[2] 広田 良吾「直接法によるソリトンの数理」岩波書店 (1992).

[3] Hirota;“The Direct Method in Soliton Theory”,Cambridge Univ.Press(2004).
[4] 広田 良吾「行列式とパフィアン (1),(2),(3),(4)」応用数理 **14** (2004) 62-66,178-184,259-266,381-389.
[5] Satoshi TSUJIMOTO and Ryogo HIROTA;“Pfaffian Representation of Solutions to the Discrete BKP Hierarchy in Bilinear Form”, JPSJ **65**(1996) 2797.

§ Appendix A. τ'_{ij} のパフィアン表示 (m が偶数)

いままで m を奇数と仮定してきたが、m が偶数のときは恒等式 (25) を使うと表示

$$\begin{aligned}
&E(\ (i,j)\ , k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_m}) \\
&= c_0(i,j) + (p(i),p(j))[\prod_{n=1}^{m}(s_{l_n},p(i))(s_{l_n},p(j))]\ \rho(i)\rho(j) \\
&= (s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}, i, j)/(s_{l_1}, s_{l_2}, \cdots, s_{l_m}).
\end{aligned}$$

が得られる。

§ Appendix B. Miwa による 2 ソリトン解の再現

我々が求めた 2 ソリトン解は次式で与えられている。

$$\begin{aligned}
&\tau_2(k_1,k_2,k_3) = (1,2,3,4), \\
&(i,j) = c_0(i,j) + (p(i),p(j))\ \rho(i)\rho(j), \\
&\rho(i) = \prod_{l=1}^{3}(s_l,p(i))^{k_l}, \quad i = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

一方、Miwa による 2 ソリトン解は記号 $(s_l,p_i),(p_i,q_j),\cdots$ を使うと

$$\begin{aligned}
&\tau_2 = 1 + c_1 e^{\eta_1} + c_2 e^{\eta_2} + c_1 c_2 b_{12} e^{\eta_1+\eta_2}, \\
&e^{\eta_i} = \prod_{l=1}^{3}[(s_l,p_i)(s_l,q_i)]^{k_l}, \quad i = 1,2. \\
&b_{12} = (p_1,p_2)(p_1,q_2)(q_1,p_2)(q_1,q_2)
\end{aligned}$$

と表される。

まず、文字リストの記号を変換する。

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3,4\} \to \{\mu(1),\nu(1),\mu(2),\nu(2)\}, \\
&\{p(1),p(2),p(3),p(4)\} \to \{p_1,q_1,p_2,q_2\}, \\
&\{\rho(1),\rho(2),\rho(3),\rho(4)\} \to \{\rho_p(1),\rho_q(1),\rho_p(2),\rho_q(2)\}.
\end{aligned}$$

ここで、$\rho_p(i), \rho_q(i)$ は次式で与えられている。

$$\rho_p(i) = \prod_{l=1}^{3}(s_l, p_i)^{k_l}, \quad \rho_q(i) = \prod_{l=1}^{3}(s_l, q_i)^{k_l}, \quad i = 1, 2.$$

$c_0(i,j)$ は任意であるが Miwa による解に一致するように

$$\begin{aligned}(\mu(i), \mu(j)) &= (p_i, p_j)\ \rho_p(i)\rho_p(j),\\ (\mu(i), \nu(j)) &= \delta_{i,j} + (p_i, q_j)\ \rho_p(i)\rho_q(j),\\ (\nu(i), \nu(j)) &= (q_i, q_j)\ \rho_q(i)\rho_q(j).\end{aligned}$$

を選ぶ。したがって

$$\begin{aligned}&\tau_2(k_1, k_2, k_3) = (\mu(1), \nu(1), \mu(2), \nu(2))\\ &= (\mu(1), \nu(1))(\mu(2), \nu(2)) - (\mu(1), \mu(2))(\nu(1), \nu(2))\\ &+(\mu(1), \nu(2))(\nu(1), \mu(2)),\\ &= [1 + (p_1, q_1)\rho_p(1)\rho_q(1)][1 + (p_2, q_2)\rho_p(2)\rho_q(2)]\\ &-(p_1, p_2)\rho_p(1)\rho_p(2)(q_1, q_2)\rho_q(1)\rho_q(2)\\ &+(p_1, q_2)\rho_p(1)\rho_q(2)(q_1, p_2)\rho_q(1)\rho_p(2)\\ &= 1 + (p_1, q_1)\rho_p(1)\rho_q(1) + (p_2, q_2)\rho_p(2)\rho_q(2)\\ &+(p_1, q_1, p_2, q_2)\rho_p(1)\rho_q(1)\rho_p(2)\rho_q(2).\end{aligned}$$

ここで L_p に属する文字 p_1, q_1, p_2, q_2 の恒等式 (25)、

$$(p_1, q_1, p_2, q_2) = (p_1, q_1)(p_1, p_2)(p_1, q_2)(q_1, p_2)(q_1, q_2)(p_2, q_2)$$

を使うと、Miwa による解

$$\tau_2 = 1 + c_1 e^{\eta_1} + c_2 e^{\eta_1} + c_1 c_2 b_{12} e^{\eta_1} e^{\eta_2}$$

が得られる。ただし、$c_1 = (p_1, q_1), c_2 = (p_2, q_2)$。