RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B41 (2013), 073–084

格子路の組合せ論から見た可積分系とその周辺 (Integrable Systems from the Viewpoint of Lattice Path Combinatorics)

By

上岡修平 (Shuhei KAMIOKA)*

Abstract

Combinatorial aspects of discrete and ultradiscrete integrable systems are discussed for the discrete Toda equation and the ultradiscrete Toda equation. Solutions to the equations are investigated from a combinatorial viewpoint, in which weighted paths are utilized as combinatorial tools. In particular, an initial value problem is exactly solved in terms of non-intersecting paths and shortest paths on a specific graph.

§1. はじめに

本研究では可積分系に対する組合せ論的なアプローチとして, 組合せ論の手法を用いて可積分系の解構造を調べる. そこでは組合せ論的な道具立てとして重み付き径路を用いる. 特に可積分系として離散戸田方程式と超離散戸田方程式を取り上げ, それぞれの初期値問題の解に対して, 非交叉径路とグラフ上の最短路による組合せ論的な表示を与える.

本研究の契機となったのは組合せ論における Viennot [19] の研究である. 彼は Padé 近似の計算法である qd アルゴリズムに着目し, その構造を径路 (Dyck 路) を用いて組合せ論的に調べた. 特に qd アルゴリズムに現れる行列式に対して, 非交叉径路の重み付き数え上げによる組合せ論的な解釈を与えた (いわゆる Gessel–Viennot [6] 流の解釈). さらに数え上げ組合せ論への応用として, 非交叉径路の数え上げ問題 (または等価な Young 盤の問題 [4]) を厳密に解いた. よく知られている通り qd アルゴリズムと離散戸田方程式は, 離散力学系として全く同じものである [12]. そして qd アルゴリズムに現れる行列式は, 離散戸田方程式では行列式解 (分子解) におけるタウ関数に相当する. この見方から, Viennot

Received Octber 31, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 37K10, 41A21
本研究は JSPS 科研費 70543297 の助成を受けたものです.
*京都大学大学院情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan)
e-mail: `kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp`

の研究 (の一部) は「離散戸田方程式の初期値問題を, 非交叉径路を用いて組合せ論的に解いた」ものと見なせる.

離散戸田方程式に対する Viennot の解 (後述の定理 3.1) は次の特徴的な構造を持っている: **解は組合せ論的に *(*非交叉径路の重み和の形で*)* 書かれており, 減算を全く含まない. 行列式として与えられているタウ関数に対して, 減算を含まない組合せ論的な表示を与えている.** 組合せ論において, この構造は数え上げ問題への応用の際に重要である. 一方, 可積分系の観点からは, これは**超離散化**が可能であることを意味する. 一般に行列式の超離散化は**負の問題**をはらむため自明ではない. しかしこの解にはそれが無い. 超離散化の結果として, 対応する超離散系, 今の場合は超離散戸田方程式の解が得られると期待される.

以上を睨んで, 本稿では次の二点について議論する:

(i) **離散戸田方程式の初期値問題の解の組合せ論的な導出** *(3* **節***)*. これは Viennot [19] の結果に対する可積分系の観点からのレビューである.

(ii) **超離散戸田方程式の初期値問題の解の組合せ論的な導出** *(4* **節***)*. 離散戸田方程式の解の超離散化を出発点として, 解の表示を簡潔にしていく.

§2. 離散戸田方程式と超離散戸田方程式

離散戸田方程式および超離散戸田方程式の解を組合せ論的に構成するにあたって, 全ての下敷きになるのは離散戸田方程式の行列式解 (分子解) である. ここでは離散戸田方程式と超離散戸田方程式とその解について基礎的な事柄を復習する.

離散戸田方程式 (discrete Toda eq.) は次の差分方程式により記述される:

$$q_n^{(t+1)} + e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)}, \tag{2.1a}$$

$$q_n^{(t+1)} e_{n+1}^{(t+1)} = q_{n+1}^{(t)} e_{n+1}^{(t)}. \tag{2.1b}$$

独立変数 t および n はそれぞれ整数の上を動く. 本稿では離散戸田方程式 (2.1) を半無限格子 $n \geq 0$ 上で考え, 境界条件として次を課す:

$$e_0^{(t)} = 0. \tag{2.2}$$

離散戸田方程式は戸田格子の時間離散類似として解釈できる [7] (境界条件 (2.2) は片側自由端の条件に対応する). 境界条件 (2.2) の下での離散戸田方程式は, Padé 近似のための qd アルゴリズム (例えば [3] を参照) と等価である (時間発展式 (2.1) は, 関数の Stieltjes 連分数展開のための漸化式として用いられる). また境界条件 $e_N^{(t)} = 0$ $(N \geq 1)$ を加えて有限格子上で考えるとき, 離散戸田方程式は行列の固有値計算のための qd アルゴリズム [15] と等価である.

離散戸田方程式の解は双線形化により導出することができる. 離散戸田方程式のタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ を従属変数変換

$$q_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(t+1)} \tau_n^{(t)}}{\tau_n^{(t+1)} \tau_{n+1}^{(t)}}, \qquad e_n^{(t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(t+1)} \tau_{n+1}^{(t)}}{\tau_n^{(t+1)} \tau_n^{(t)}}. \tag{2.3}$$

により導入する．このとき (2.1) は次の双線形方程式に帰着する:

$$\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_{n+1}^{(t-1)} - \tau_n^{(t+1)}\tau_n^{(t-1)} + \tau_n^{(t)}\tau_n^{(t)} = 0 \qquad (n \geq 1). \tag{2.4}$$

ただし境界条件として $\tau_0^{(t)} = 1$ を要請する．双線形方程式 (2.4) の解は Hankel 行列式の形で見つけることができる: 任意関数 $f_n^{(t)}$ で分散関係式

$$f_n^{(t+1)} = f_{n+1}^{(t)} \tag{2.5}$$

を満たすものを用いて

$$\tau_n^{(t)} = \det(f_{i+j}^{(t)})_{i,j=0}^{n-1} = \begin{vmatrix} f_0^{(t)} & f_1^{(t)} & \cdots & f_{n-1}^{(t)} \\ f_1^{(t)} & f_2^{(t)} & \cdots & f_n^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}^{(t)} & f_n^{(t)} & \cdots & f_{2n-2}^{(t)} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

(証明には Sylvester の行列式恒等式を用いる)．行列式 $\tau_n^{(t)}$ が任意の t および n に対して非零ならば, それを (2.3) に代入したものは離散戸田方程式 (2.1) の解である．

超離散戸田方程式 (ultradiscrete Toda eq.) は次の差分方程式により記述される:

$$Q_n^{(t+1)} = \min\left\{\sum_{k=0}^{n} Q_k^{(t)} - \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^{(t+1)}, E_{n+1}^{(t)}\right\}, \tag{2.7a}$$

$$E_{n+1}^{(t+1)} = Q_{n+1}^{(t)} - Q_n^{(t+1)} + E_{n+1}^{(t)}. \tag{2.7b}$$

ただし $n \geq 0$ (境界条件無し)．超離散戸田方程式は箱玉系の時間発展を記述する [10]．超離散戸田方程式は, 離散戸田方程式 (2.1) (に境界条件 (2.2) を加えたもの) の**超離散極限**をとることにより導出することができる [10]．その意味で (2.7) は (2.1) の超離散類似として解釈できる．対応する双線形方程式も同様に得られる: タウ関数 $T_n^{(t)}$ を従属変数変換

$$Q_n^{(t)} = T_{n+1}^{(t+1)} + T_n^{(t)} - T_n^{(t+1)} - T_{n+1}^{(t)}, \tag{2.8a}$$

$$E_n^{(t)} = T_{n-1}^{(t+1)} + T_{n+1}^{(t)} - T_n^{(t+1)} - T_n^{(t)} \tag{2.8b}$$

により導入するとき

$$T_n^{(t+1)} + T_n^{(t+1)} = \min\{T_{n-1}^{(t+1)} + T_{n+1}^{(t+1)}, 2T_n^{(t)}\} \qquad (n \geq 1). \tag{2.9}$$

ただし $T_0^{(t)} = 0$.

超離散戸田方程式の解も, 対応する双線形方程式 (2.9) を解くことにより求めることができる．特に離散戸田方程式の方で双線形方程式 (2.4) の解を知っていれば, それを超離散化することにより (2.9) の解が得られる (例えば [11] にある解はそのようにして作られ

ている). ただし**超離散化可能であるならば**. 離散戸田方程式の行列式解 (2.6) は, いわゆる**負の問題**のためそのままの姿では超離散化できない. 例えば一般に行列式の置換展開は減算を含む. また関数 $f_n^{(t)}$ の選び方によってはタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ は負の値をとり得る. 離散系の行列式解 (2.6) から超離散系のタウ関数 $T_n^{(t)}$ を導くためには, こういった負の問題を上手く回避する必要がある.

§ 3. 離散戸田方程式の初期値問題

$\mathbb{K}$ を任意の体とする. 離散戸田方程式 (2.1) の初期値問題として次の問題を考える: **$\mathbb{K} \setminus \{0\}$ 上の列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を任意にとり, 時刻 $t = 0$ における従属変数の値を次で定める:**

$$q_n^{(0)} = a_{2n}, \qquad e_n^{(0)} = a_{2n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{3.1}$$

このとき任意の $t \geq 0$ および $n \geq 0$ に対して, タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ の値を初期値 a_n の関数として書き下せ. 離散戸田方程式は時間 t に関して正方向に一意的に発展する. 従ってタウ関数の定義 (2.3) (および規格化 $\tau_0^{(t)} = 1$) から, $\tau_n^{(t)}$ の値は初期値 a_n の有理関数として一意に定まる. これを求めよという問題である.

この初期値問題は Viennot [19] により厳密に解かれている. Viennot は非交叉径路に関する数え上げ問題を解くために (具体的には Catalan 数を成分とする行列式の値を計算するために), Padé 近似のための qd アルゴリズムを利用した. その過程で qd アルゴリズムとその漸化式に対して組合せ論的な解釈を与えた. 特に qd アルゴリズムに現れる行列式に対して, その値が非交叉径路の重み和として解釈可能であることを示した. Viennot によるこの組合せ論的な結果は, 可積分系の観点からは次のように解釈することができる: qd アルゴリズムの漸化式は離散戸田方程式の発展式 (2.1) と全く同じものであるそしてそこに現れる行列式は離散戸田方程式のタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ そのものである. 従って Viennot の導いた非交叉径路による組合せ論的解釈は, タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ に対しても適用可能である. つまりタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ の値は非交叉径路の言葉で書き下すことができ, これが初期値問題の解を与える. 3 節の内容は qd アルゴリズムに関する Viennot の研究 [19] に対する, 可積分系の視点からのレビューである.

離散戸田方程式の初期値問題の解を組合せ論的に書き下すために, ここでは (重み付き) 径路 (path) を用いる. まずはその定義を与える. 二次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上の径路 P で上ステップ $(1, 1)$ と下ステップ $(1, -1)$ により構成されるものを考える. 径路 P は x 軸 (水平直線 $y = 0$) より下に進まないとき**正**であるという (x 軸に触れてもよい). また P の始点と終点がともに x 軸上にあるとき**接地**されているという. 接地された正径路の例を図 1 に示す.

離散戸田方程式の初期値問題の解は接地された正径路を用いて記述される. そこで鍵を握るのは径路の重みであり, それは初期値 a_n の単項式として次のように定義される. 径路 P の各ステップ s に次の規則で重み (ラベル) を付ける: s が水平直線 $y = n$ からの上ステップならば重み a_n, 下ステップならば重み 1. このとき径路 P の**重み** $w(P)$ を P を構成する全てのステップの重みの積として定義する. 例えば図 1 の径路の重みは $w(P) = a_0^2 a_1^3 a_2$ である.

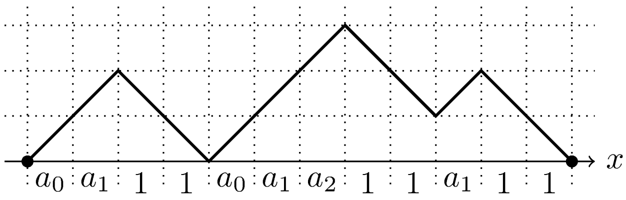

図 1. 接地された正径路 (a_n または 1 はそれぞれ真上にあるステップの重み).

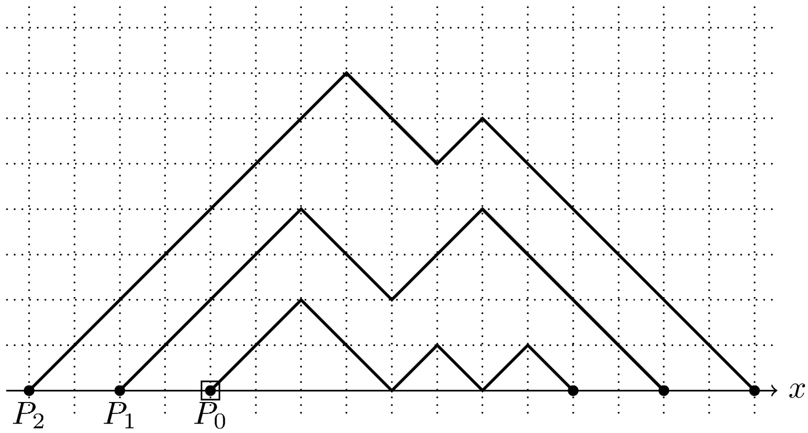

図 2. 非交叉径路 $\boldsymbol{P} = \{P_0, P_1, P_2\} \in \boldsymbol{P}(4,3)$ (x 軸上の小四角は原点 $(0,0)$ を指す).

最後にタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ の値を具体的に記述するために非交叉径路の集合を用意する．任意の $t \geq 0$ および $n \geq 0$ に対して集合 $\boldsymbol{P}(t,n)$ を次のように定義する: $\boldsymbol{P}(t,n)$ の元 $\boldsymbol{P} = \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ は径路の n-集合 (位数 n の集合) で次の二条件を満たすものである:

(i) 各 P_j は接地された正径路であり, 始点と終点をそれぞれ x 軸上の二点 $(-2j, 0)$ と $(2t+2j, 0)$ に持つ ($t = 0$ のとき P_0 は始点と終点をともに原点 $(0,0)$ に持ち, ステップをひとつも含まない).

(ii) $P_0, \ldots, P_{n-1}$ は**非交叉**的である．つまりどの相異なる二本 P_j と P_k ($j \neq k$) も同じ点を通らない: $P_j \cap P_k = \emptyset$ (空集合).

例えば $t = 4$ かつ $n = 3$ のとき, 集合 $\boldsymbol{P}(4,3)$ の元 $\boldsymbol{P} = \{P_0, P_1, P_2\}$ は図 2 のような三本の非交叉的径路として図示できる.

定理 3.1 (Viennot [19])**.** 離散戸田方程式の初期値問題の解は次のタウ関数により与えられる*:*

$$\tau_n^{(t)} = \sum_{\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{P}(t,n)} w(\boldsymbol{P}). \tag{3.2}$$

ただし $\boldsymbol{P} = \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ に対して $w(\boldsymbol{P}) = w(P_0) \cdots w(P_{n-1})$ *(*$n = 0$ のとき $\boldsymbol{P}$ は空集合であり $w(\emptyset) = 1$*))*.

定理 3.1 の導出にあたって, 念頭にあるのは次の意味での離散戸田方程式の線形化である. 離散戸田方程式の時間発展則は非線形な差分方程式 (2.1) により記述される. これは行列式 (2.6) により定義されるタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ を通して, 行列式の成分 $f_n^{(t)}$ に対する線形な分散関係式 (2.5) に置き換わる. つまり離散戸田方程式は, タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ とその成分 $f_n^{(t)}$ を通して線形化される. 線形方程式による時間発展を追うのは簡単で, 今の場合 $f_n^{(t)}$ に関する初期値問題は厳密に解くことができる:

$$f_n^{(t)} = f_{t+n}^{(0)} \qquad (t \geq 0,\ n \geq 0). \tag{3.3}$$

時間発展に関する問題は解決されたから, 残る問題は次の二点に絞られる:

(a) $f_n^{(t)}$ の初期値 $f_n^{(0)}$ をいかに求めるか.

(b) $f_n^{(t)}$ の具体値を知った上で, タウ関数 $\tau_n^{(t)} = \det(f_{i+j}^{(t)})_{i,j=0}^{n-1}$ の値をいかに求めるか.

この二つの問題を解決するために組合せ論における二つの結果を利用する. つまり Flajolet による連分数の組合せ論的解釈 [5] と, 行列式の組合せ論的解釈である Gessel–Viennot の補題 [6] である.

問題 (a) の解決には連分数に関する Flajolet の結果 [5] を用いる. まず Padé 近似における qd アルゴリズムの議論 (例えば [3, 4.3 節] に詳しい) から, 離散戸田方程式の初期値 a_n と変数 $f_n^{(t)}$ の初期値 $f_n^{(0)}$ の間に, Stieltjes 型の連分数 (S-連分数) による次の等式が成り立つことが分かる: 規格化 $f_0^{(0)} = 1$ の下で

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(0)} z^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_0 z}{1 - \cfrac{a_1 z}{1 - \cfrac{a_2 z}{1 - \cdots}}}} \tag{3.4}$$

(不定元 z の形式的冪級数としての等式). Flajolet の結果は右辺の S-連分数に対して (重み付き) 径路による組合せ論的な解釈を与える. その帰結として $f_n^{(0)}$ に対する次の表示を得る:

$$f_n^{(0)} = \sum_P w(P) \qquad (n \geq 0). \tag{3.5}$$

ただし右辺の和において P は接地された正径路で, 始点と終点がそれぞれ x 軸上の二点 $(0,0)$ と $(2n,0)$ にあるものである. 例えば

$$\begin{aligned} f_0^{(0)} &= 1, \\ f_1^{(0)} &= a_0, \\ f_2^{(0)} &= a_0^2 + a_0 a_1, \\ f_3^{(0)} &= a_0^3 + 2a_0^2 a_1 + a_0 a_1^2 + a_0 a_1 a_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

径路の重み $w(P)$ の定義から (3.5) の右辺は初期値 a_n に関する斉 n 次多項式である．実際, 次のようにも書ける [5]:

$$f_n^{(0)} = \sum_{k_1=0} \sum_{k_2=0}^{k_1+1} \cdots \sum_{k_n=0}^{k_{n-1}+1} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_n} \tag{3.7}$$

(このような形の和は genetic sum と呼ばれ, 直交関数や Padé 近似の研究においてしばしば現れる [2])．こうして $f_n^{(t)}$ の初期値 $f_n^{(0)}$ は, 離散戸田方程式の初期値 a_n の斉次多項式として具体的に求まる．

問題 (b) の解決には行列式と非交叉径路に関する Gessel–Viennot の補題 [6] を用いる (これに関しては Aigner による解説 [1, 5.4 節] が読み易い)．任意時刻 $t \geq 0$ において変数 $f_n^{(t)}$ の具体値は (3.3) と (3.5) から定まる．特にそれは**径路の重み和**の形をとる．今, タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ は $f_n^{(t)}$ を成分とする行列式であり, 特にその (i,j) 成分 $f_{i+j}^{(t)}$ は次のように読むことができる: $f_{i+j}^{(t)} = f_{t+i+j}^{(0)}$ の値は, 始点と終点がそれぞれ $(-2i, 0)$ と $(2t+2j, 0)$ にある接地された正径路の重みの総和に等しい．このような行列式に対して組合せ論的な解釈を与えるのが Gessel–Viennot の補題である．その直接的な帰結として定理 3.1 の主張を得る．

以上, 離散戸田方程式の初期値問題に対する Viennot [19] による組合せ論的な解法の解説であった．なお初期値問題の解に関する定理 3.1 は, 以上の議論に依ることなく非交叉径路のみを用いて直接的に証明できる [17]．続く話題として [19] では非交叉径路の数え上げ, つまり集合 $\boldsymbol{P}(t,n)$ の位数の計算を行なっている (これは初期値 $a_n = 1$ に対応する特殊解の導出に相当する)．本稿における次の話題は超離散可積分系である．端的に言えば, 定理 3.1 で得られた離散戸田方程式の解を超離散化する．

§ 4.　超離散戸田方程式の初期値問題

超離散化を議論するので $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．超離散戸田方程式の初期値問題として, 離散戸田方程式の場合と類似の問題を考える: **実数列** $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ **を任意にとり, 時刻** $t = 0$ **における従属変数の値を次で定める**:

$$Q_n^{(0)} = A_{2n}, \qquad E_{n+1}^{(0)} = A_{2n+1} \qquad (n \geq 0). \tag{4.1}$$

このとき任意の $t \geq 0$ **および** $n \geq 0$ **に対して, タウ関数** $T_n^{(t)}$ **の値を初期値** A_n **の関数として書き下せ**.

超離散戸田方程式の初期値問題の解は, 離散戸田方程式に対する解, つまり定理 3.1 のタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ を超離散化することにより自動的に得られる．実際タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ は減算を含まず, 超離散化における負の問題とは無縁である．非交叉径路の言葉で組合せ論的に記述されたタウ関数 (3.2) は, 元々離散戸田方程式の行列式解 (2.6) を基にしてつくられたものである．離散戸田方程式の初期値問題に関する 3 節の議論は, 行列式解に含まれる負の問題を克服するための組合せ論的な工夫とも捉えることができる．

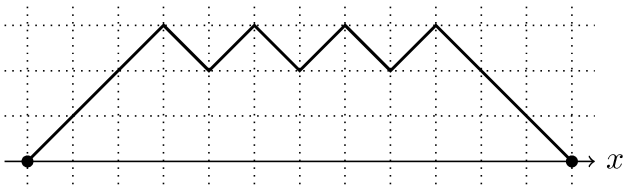

図 3. 台形路.

定理 3.1 のタウ関数 $\tau_n^{(t)}$ を超離散化するために, まず準備として径路の重み $w(P)$ を超離散化する. 径路 P の各ステップ s に対して, 次の規則で重み (ラベル) を付ける: ステップ s が水平直線 $y=n$ からの上ステップならば A_n, 下ステップならば 0. このとき径路 P の**重み** $W(P)$ を P を構成する全てのステップの重みの**和**として定義する (重み $w(P)$ はステップの重みの**積**として定義されていた). 例えば図 1 の径路は重み $w(P)=a_0^2a_1^3a_2$ を持つが, これを超離散化して $W(P)=2A_0+3A_1+A_2$ である. 超離散戸田方程式の初期値問題の解は, 次のタウ関数により与えられる:

$$T_n^{(t)}=\min_{\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{P}(t,n)}W(\boldsymbol{P})\qquad(t\geq 0,\ n\geq 0). \tag{4.2}$$

ただし $\boldsymbol{P}=\{P_0,\ldots,P_{n-1}\}$ に対して $W(\boldsymbol{P})=W(P_0)+\cdots+W(P_{n-1})$.

非交叉な台形路による解　タウ関数 $T_n^{(t)}$ を (4.2) により非交叉径路の言葉で定めるとき, これは超離散戸田方程式の初期値問題の解を与える. ただし, この解の表示は次の意味で冗長である: 部分集合 $\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)\subseteq\boldsymbol{P}(t,n)$ が存在して

$$\min_{\bar{\boldsymbol{P}}\in\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)}W(\bar{\boldsymbol{P}})=\min_{\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{P}(t,n)}W(\boldsymbol{P}). \tag{4.3}$$

つまり $T_n^{(t)}$ の値を最小値として決定するとき, (4.2) のように集合 $\boldsymbol{P}(t,n)$ 全体を探し回る必要はなく, より小さな部分集合 $\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)$ の中を探せば十分である.

そのような部分集合 $\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)$ とは具体的には次のようなものである. 接地された正径路 P を次の条件を満たすとき**台形路**と呼ぶ: 非負整数 n が存在して, P の峰 (peak, 連続する上下の二ステップ) と谷 (valley, 連続する下上の二ステップ) は (存在するならば) 二つの水平直線 $y=n$ と $y=n+1$ を境界とする幅 1 の領域に全て含まれる. 例えば図 3 の径路は台形路であるが, 図 1 の径路や図 2 の三本の径路はそれぞれ台形路でない. 今, 部分集合 $\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)\subseteq\boldsymbol{P}(t,n)$ を次のように定義する: 径路の n-集合 $\{\bar{P}_0,\ldots,\bar{P}_{n-1}\}\in\boldsymbol{P}(t,n)$ (つまり非交叉径路) で, 各 $\bar{P}_j$ が台形路であるものの全体. 例えば $t=4$ かつ $n=3$ のとき $\bar{\boldsymbol{P}}(4,3)$ の元は図 4 のような非交叉な台形路として図示される. このように定義された部分集合 $\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)$ は (4.3) を満たす. 実際, 次の補題を示すことができる.

補題 4.1.　*任意の $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{P}(t,n)$ に対して $\bar{\boldsymbol{P}}\in\bar{\boldsymbol{P}}(t,n)$ が存在して, 不等式 $W(\bar{\boldsymbol{P}})\leq W(\boldsymbol{P})$ が成り立つ.*

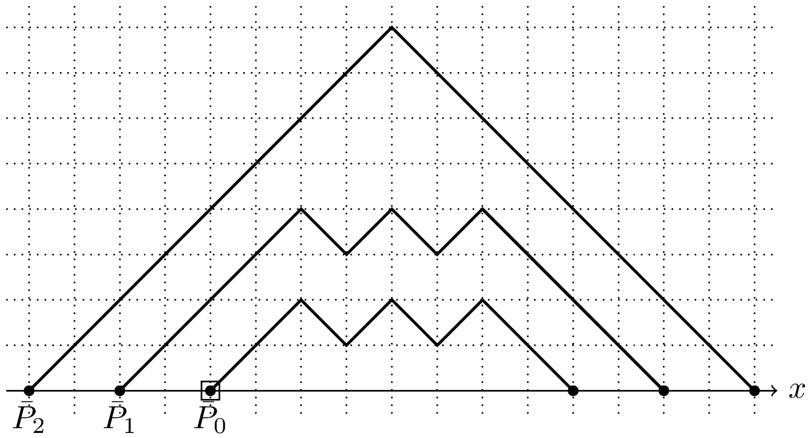

図 4. 非交叉な台形路 $\bar{\boldsymbol{P}} = \{\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2\} \in \bar{\boldsymbol{P}}(4,3)$.

結局タウ関数 (4.2) による解は次の通りに書き換えられる:

定理 4.2. 超離散戸田方程式の初期値問題の解は, 次のタウ関数により与えられる*:*

$$T_n^{(t)} = \min_{\bar{\boldsymbol{P}} \in \bar{\boldsymbol{P}}(t,n)} W(\bar{\boldsymbol{P}}) \qquad (t \geq 0,\ n \geq 0). \tag{4.4}$$

定理 4.2 のタウ関数 $T_n^{(t)}$ の表示 (4.4) は, 元々の表示 (4.2) に比べてずっと簡潔である. 実際 (4.4) の最小値において, 集合 $\bar{P}(t,n)$ の位数は二項係数 $\binom{t+n-1}{n} = \prod_{1 \leq j < t} \frac{n+j}{j}$ に等しいが, (4.2) の $\boldsymbol{P}(t,n)$ の位数は Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ [14, A000108] を成分とする Hankel 行列式 $\det(C_{t+i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ に等しい. その値は厳密に $\prod_{1 \leq i \leq j < t} \frac{2n+i+j}{i+j}$ に等しく [19], $\bar{P}(t,n)$ の位数よりはるかに大きい.

最短路による解 任意の $t \geq 0$ および $n \geq 0$ に対して次のような (有向) グラフ $G = G(t,n)$ を考える: $(t+1) \times (n+1)$ 個の節点 $(j,k) \in \mathbb{R}^2$ $(0 \leq j \leq n$ かつ $0 \leq k \leq t)$ からなり, 隣接する二節点は東枝 $(1,0)$ と北枝 $(0,1)$ の二種類の有向枝により結ばれる. 例えば $t=4$ かつ $n=3$ の場合グラフ $G = G(4,3)$ は図 5 のように図示される. グラフ G の各枝 e に対して枝の**長さ** $W(e)$ を次の規則で定める: 枝 e が節点 (j,k) を始点とする東枝 $E_{j,k}$ ならば

$$W(E_{j,k}) = \sum_{\nu=0}^{2j+k-1} A_\nu + (t-k) A_{2j+k}, \tag{4.5}$$

北枝 $N_{j,k}$ ならば $W(N_{j,k}) = 0$. ここで A_n は超離散戸田方程式の初期値である (A_n は任意の実数として選ぶので, 枝の長さ $W(e)$ は負の値をとってもよい). 二本の水平直線 $y = t-1$ および $y = t$ 上の東枝について

$$W(E_{j,t-1}) = W(E_{j,t}) \qquad (0 \leq j < n) \tag{4.6}$$

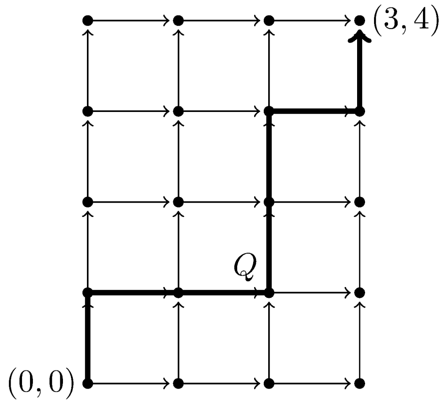

図 5. グラフ $G = G(4,3)$ と G-径路 Q.

が成り立つことに注意する. 任意の G-径路 Q に対して, 径路の**長さ** $W(Q)$ を Q の通る枝の長さの総和として定義する. 例えば図 5 の G 径路 Q の場合

$$\begin{aligned} W(Q) &= W(E_{0,1}) + W(E_{1,1}) + W(E_{2,3}) \\ &= 3A_0 + 5A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7. \end{aligned} \tag{4.7}$$

今 $t \geq 1$ を仮定する. このとき G-径路 Q で二節点 $(0,0)$ と $(t-1,n)$ を結ぶものを考えると, Q は非交叉な台形路 $\bar{\boldsymbol{P}} = \{\bar{P}_0, \ldots, \bar{P}_{n-1}\} \in \bar{\boldsymbol{P}}(t,n)$ と一対一に対応する. ここでは Q と $\bar{\boldsymbol{P}} = \{\bar{P}_0, \ldots, \bar{P}_{n-1}\}$ を次のように対応付ける: Q が東枝 $E_{j,k}$ を通るならば, またそのときに限り $\bar{P}_j$ は峰と谷を全て二本の水平直線 $y = 2j + k$ と $y = 2j + k + 1$ の間に持つ. 例えば図 5 の Q (から終点 $(3,4)$ に至る最後の北ステップを除いたもの) は図 4 の $\bar{\boldsymbol{P}} = \{\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2\}$ に対応するように描いている. 実は G の枝の長さは, この一対一の対応の下で等式

$$W(Q) = W(\bar{\boldsymbol{P}}) \tag{4.8}$$

が成り立つように定めている. ゆえに

$$\min_{Q} W(Q) = \min_{\bar{\boldsymbol{P}} \in \bar{\boldsymbol{P}}(t,n)} W(\bar{\boldsymbol{P}}). \tag{4.9}$$

等式 (4.9) の左辺が表すのは, グラフ G 上で二節点 $(0,0)$ と $(t-1,n)$ を結ぶ最短路の長さに相当する. 実は (4.6) より, 等式 (4.9) は G-径路 Q の終点を $(t-1,n)$ から (t,n) に取り替えてもそのまま成り立つ (この場合は $t = 0$ でもよい).

以上の考察から, 超離散戸田方程式に対する定理 4.2 の解は次のように書き換えられる:

定理 4.3. *超離散戸田方程式の初期値問題の解は, 次のタウ関数により与えられる: グラフ $G = G(t,n)$ 上において, 二節点 $(0,0)$ と (t,n) を結ぶ最短路 (の一つ) を $Q^*(t,n)$ と書くとき,*

$$T_n^{(t)} = W(Q^*(t,n)) \qquad (t \geq 0,\ n \geq 0). \tag{4.10}$$

ただし G の各枝の長さは (4.5) (および $W(N_{j,k})=0$) により与えられているものとする.

以上, 離散戸田方程式の解の超離散化から始まって, 超離散戸田方程式の初期値問題の解まで辿り着いた. 最終的に定理 4.3 において, 超離散戸田方程式の解はグラフ上の最短路の言葉で組合せ論的に表示できることが分かった. 超離散戸田方程式の組合せ論的な解については, 他にも Nakata [13] による最短路の表示があることを注意しておく.

§ 5. おわりに

本研究では離散戸田方程式と超離散戸田方程式の初期値問題を扱い, その解に対して (特にタウ関数) に対して径路による組合せ論的な表示を与えた. 離散系である離散戸田方程式の場合, タウ関数 $\tau_n^{(t)}$ は非交叉径路の重み和として記述された. また超離散系である超離散戸田方程式の場合, タウ関数 $T_n^{(t)}$ は非交叉な台形路の重み和, もしくはそれと (ほぼ) 等価なものとして, あるグラフ上の最短路の長さとして表示された.

組合せ論的な議論の基礎をなすのは Flajolet [5] による連分数の組合せ論的解釈と, 非交叉径路と行列式の間を繋ぐ Gessel–Viennot の補題 [6] である. これらを利用することにより, 離散戸田方程式の行列式解に対して減算を含まない表示を書き下すことができた. さらにはそれを超離散化することにより, 対応する超離散系である超離散戸田方程式の解を導いた.

この離散戸田方程式と超離散戸田方程式に対する組合せ論的なアプローチは, 他の可積分系に対しても有効であると期待する. 例えば Padé 補間のための一般化 qd アルゴリズム [3, 7.1 節] は行列式解を持つ離散可積分系として理解できるが, それに付随する Frobenius–Stickelberger–Thiele 連分数 (FST 連分数, 単に Thiele 連分数とも呼ばれる) は径路による組合せ論的な解釈が可能である [8]. 他にも離散 Lotka–Volterra 方程式, 離散相対論戸田方程式 (discrete relativistic Toda eq.) [9], R_{I} 格子 [20], R_{II} 格子 [16] 等, 行列式解を持ち, かつ連分数や Padé 近似, Padé 補間問題に関連付けられる離散可積分系は数多い. こういった離散可積分系やその超離散類似に対しても, 本研究の組合せ論的な手法は有効であろう.

References

[1] M. Aigner, A Course in Enumeration, Graduate Texts in Mathematics 238, Springer, 2007.

[2] A. Aptekarev, V. Kaliaguine and J. van Iseghem, *The genetic sums' representation for the moments of a system of Stieltjes functions and its application*, Constr. Approx. **16** (2000), 487–524.

[3] G. A. Baker Jr. and P. Graves-Morris, Padé Approximants, 2nd ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications 59, Cambridge, 1996.

[4] M. de Sainte-Catherine and G. Viennot, *Enumeration of certain Young tableaux with bounded height*, Combinatoire Énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), 58–67, Lecture Notes in Math. 1234, Springer, 1986.

[5] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980), 125–161.

[6] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

[7] 広田良吾, 辻本諭, 今井達也, *Difference scheme of soliton equations*, 京都大学数理解析研究所講究録 822 (1993), 144–152.

[8] 上岡修平, Frobenius–Stickelberger–Thiele 連分数とグラフ上の歩道の数え上げ, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」, Article No. 32.

[9] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, *Faces of relativistic Toda chain*, Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997), 2675–2724.

[10] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999), 265–271.

[11] A. Nagai, T. Tokihiro and J. Satsuma, *Ultra-discrete Toda molecule equation*, Phys. Lett. A **244** (1998), 383–388.

[12] 中村佳正, 可積分系の機能数理, 共立出版, 2006.

[13] Y. Nakata, *Solutions to the ultradiscrete Toda molecule equation expressed as minimum weight flows of planar graphs*, J. Phys. A **44** (2011), no. 29, 295204, 15 pp.

[14] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at `http://oeis.org`.

[15] H. Rutishauser, Lectures on Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1990.

[16] V. Spiridonov, L. Vinet and A. Zhedanov, *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*, J. Phys. A **30** (1997), no. 21, 7621–7637.

[17] 高垣知哲, 上岡修平, 超離散戸田方程式の解のグラフによる構成, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」, Article No. 38.

[18] G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes de conférences données à l'UQAM, Montréal, 1983.

[19] X. G. Viennot, *A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm*, Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow, 2000), 379–390, Springer, 2000.

[20] L. Vinet and A. Zhedanov, *An integrable chain and bi-orthogonal polynomials*, Lett. Math. Phys. **46** (1998), 233–245.