RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B41 (2013), 147–160

粒子セルオートマトンの非自励化および確率化について (On Deautonomization and Randomization of Particle Cellular Automata)

By

高橋大輔 (Daisuke Takahashi)*, 桑原英樹 (Hideki Kuwabara)*,
池上貴俊 (Takatoshi Ikegami)*, 松木平淳太 (Junta Matsukidaira)**

Abstract

We propose a specific type of deautonomization of some particle cellular automata. The particle cellular automata are described by max-plus expression and their initial value problem is solvable through the transformation of variable. Deautonomization is introduced by preserving the form of this transformation. Moreover, we introduce stochastic variables into the external force terms of nonautonomous particle cellular automata. The fundamental diagram, that is, the relation between the density and the mean flux of particles, is derived theoretically under some stochastic assumptions.

§1. はじめに — 自励粒子セルオートマトン

セルオートマトン（Cellular Automaton，以降 CA）は独立変数と従属変数がすべて離散的なデジタル系のうち，特に従属変数の値域が有限集合となるものを指す [1]．本稿では時間については 1 階で，従属変数が 0 か 1 の値を取る $(1+1)$ 次元 2 値 CA のうち以下の時間発展方程式に従うものを考える [2].

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \qquad q_j^n = q(u_{j+r_1+1}^n, u_{j+r_1+2}^n, \dots, u_{j+r_2}^n) \tag{1.1}$$

ここで n は整数時刻，j は整数の空間座標（以降サイトと呼ぶ）とし，状態変数 u は実数値をとるとする．r_1, r_2 は $r_1 \le 0 \le r_2$ を満たす整定数であり，q は $r_2 - r_1$ 個の引数をもつ関数である．上式は u_j^{n+1} の値が時刻 n でのサイト $j+r_1$ から $j+r_2$ までの u の値に依存する時間発展方程式であり，それらを（u_j^{n+1} に対する）近傍，$r = r_2 - r_1 + 1$ を近傍数と呼ぶことにする．

Received January 12, 2013.
*早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
**龍谷大学理工学部数理情報学科

サイトに関して周期 K の周期境界条件を設けると，

$$\sum_{j=1}^{K} u_j^n$$

は時間によらない定数すなわち保存量となることが (1.1) よりただちにわかる．以降ではこの周期境界条件を想定する．u を質量とみなし q を流束とみなすと，(1.1) は

$$\underbrace{u_j^{n+1}}_{\substack{\text{次の時刻の}\\ j\text{ における質量}}} = \underbrace{u_j^n}_{\substack{\text{現在の}\\ j\text{ における質量}}} + \underbrace{q_{j-1}^n}_{\substack{j-1\text{ から }j\text{ への}\\ \text{流入量}}} - \underbrace{q_j^n}_{\substack{j\text{ から }j+1\text{ への}\\ \text{流出量}}}$$

と解釈できる．この解釈にもとづいて関数 q を流束あるいは流量と呼ぶことにする．

さらに，$u_{j+r_1}^n, \ldots, u_{j+r_2}^n$ の値が 0, 1 のどちらかとなるあらゆる組み合わせに対して，(1.1) の右辺は常に 0 か 1 の値しか返さないとしよう．これは関数 $q(x_1, x_2, \ldots, x_{r_2-r_1})$ をうまく設定することで実現可能である．この仮定より，初期値の u が 0, 1 だけで成り立っているとき，任意の時刻の u も 0, 1 で閉じることになり，(1.1) は時間 1 階 r 近傍 2 値 CA の時間発展ルールを与える．

u_j^n を時刻 n，サイト j での粒子数とみなせば，上記の保存量によりサイト全体での粒子の総数は時刻によらず一定となるので，この CA は粒子が移動する系と等価になる．このような系を粒子 CA（Particle CA）と呼ぶことにし，近傍数が r のものは PCA r というラベルを付けることにする [3]．PCA3 の場合，座標変換，変数変換によって同値なものを同一視すると，ルール番号 184 の初等的 CA（Elementary CA）が唯一のものとなり，時間発展規則は以下のように与えられる．

(1.2) $$u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \qquad q_j^n = q(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

(x,y)	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$
$q(x,y)$	0	1	0	0

この q から，

> サイト j に存在する粒子 $(u_j^n = 1)$ は，サイト $j+1$ に粒子が存在しなければ $(u_{j+1}^n = 0)$ $j+1$ に移動し，そうでなければ j にとどまる．

という粒子の移動規則がわかる．

さらに，この系には相転移現象が存在することが知られている．密度 ρ，平均流束 Q を次式で定義すると，

(1.3) $$\rho = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} u_j^n, \qquad Q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} q_j^n$$

ρ を定めれば初期値によらず Q が一意的に定まり，ρ-Q 依存性は次式で与えられる．

(1.4) $$Q = \begin{cases} \rho & (0 \le \rho \le 1/2) \\ 1-\rho & (1/2 < \rho \le 1) \end{cases}$$

この ρ-Q 依存性をグラフで表したものを交通流分野では基本図と呼んでいる [4]．そこで以降では，（依存性を図と呼ぶのはやや語弊があるが）ρ-Q 依存性のことを基本図と呼ぶことにする．

西成と高橋は，以下の手続きによって初期値問題を解き，相転移現象を説明した [5, 6]．まず，0, 1 でのルール表で与えられていた q を次式の max-plus 表現に書き改める．

$$q(x,y) = \min(x, 1-y) \tag{1.5}$$

そして超離散 Cole-Hopf 変換

$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

を通じて (1.2) を f_j^n に関する方程式

$$f_j^{n+1} = \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n) \tag{1.7}$$

に書き換え，(1.2) の初期値問題を解く代わりに (1.7) の初期値問題を解く．たとえば初期時刻を $n=0$ とすると，(1.7) を再帰的に用い，表現を簡約化すれば

$$f_j^n = \max(f_{j-n}^0, f_{j-n+2}^0, \ldots, f_{j+n-2}^0, f_{j+n}^0) \tag{1.8}$$

となる．この一般解から $n \to \infty$ での u の漸近挙動を求めることはたやすい．

一般に，(1.1) に対して (1.6) 型の変換

$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + A$$

を適用すると，

$$f_j^{n+1} = f_j^n - q_j^n + B$$

という形の，流束 q がひとつ減った形に還元できる．そして q の形式によっては，(1.1) の u についての初期値問題が，より単純な f についての初期値問題に帰着できる場合がある．上述の PCA3 においては，元々は 2 値のルール表であった関数 q を max-plus 表現に置き換えることにより，このことに成功している．

2 値 CA を max-plus 表現で書き換えることのもうひとつの特徴は，実数系への拡張である．(1.7) から一般解 (1.8) を求める際に，u を 0 か 1 の値に限定するという条件は用いていない．さらに，流束 (1.5) で表した (1.2) を u が任意の実数値をとる方程式として扱い，変換 (1.6) を通じて f の初期値問題 (1.7) を解いても，(1.4) は変わらないことが示せる．つまり，今まで 0, 1 の 2 値 CA であった粒子 CA が，漸近挙動を保ったまま実数系に拡張できる．以下で述べる 4 近傍粒子 CA でも同様に 2 値 CA から実数系への拡張が成功しており，2 値のルール表の代わりに max-plus 表現を用いることで自然な拡張系が得られる．なお，図 1 に実数値を初期値とした場合の解の挙動を示す．$\rho > 1/2$ の場合であり，十分大きい n で渋滞相と呼ばれる左ずれパターンが実数値でも観察できる．

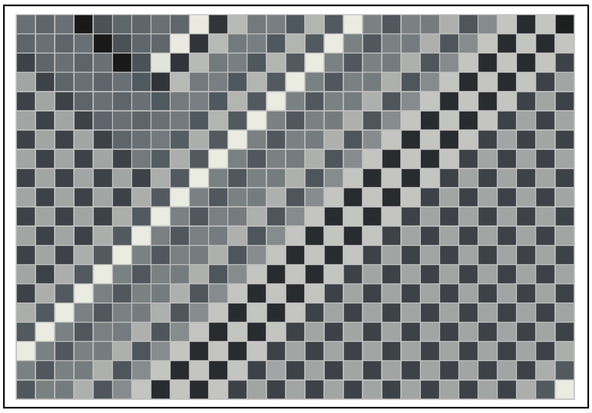

図 1. 実数を初期値とする PCA3 の時間発展 ($\rho = 0.701\ldots$)

より発展した問題である 4 近傍粒子 CA (PCA4) は，独立なものが 4 つ存在する．そのうちの 3 つ (PCA4-1, 4-2, 4-3) は，PCA3 と同様に流束を max-plus 表現でうまく表すことで f の初期値問題が解け，基本図を導くことができる [3]．以下にそれらの方程式を示す.

$$\text{PCA4:}\quad u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \qquad q_j^n = q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

- PCA4-1

(x,y,z)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$q(x,y,z)$	0	1	0	1	0	1	0	0

$$q(x,y,z) = \min(x+y, 1-z),$$

$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{3},$$

$$f_j^{n+1} = \max(f_{j-2}^n, f_{j+1}^n)$$

- PCA4-2

(x,y,z)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$q(x,y,z)$	0	1	0	0	0	0	-1	0

$$q(x,y,z) = \min(\max(-z, x+y-1), 1-z),$$

$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2},$$

$$f_j^{n+1} = \max\Big(\min\Big(f_{j-2}^n, f_{j+1}^n + \frac{1}{2}\Big), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\Big)$$

- PCA4-3

(x,y,z)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$q(x,y,z)$	0	1	0	0	0	0	0	0

$$q(x,y,z) = \min(\max(0, x+y-1), 1-z),$$
$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2},$$
$$f_j^{n+1} = \max\Big(\min(f_{j-2}^n, f_j^n), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\Big)$$

初期値問題が解けるための重要な鍵は当然ながら f の時間発展方程式の形にある．PCA3, PCA4-1, 4-2, 4-3 の f の時間発展方程式の右辺に共通の形式は

> f の単項あるいは f の単項と定数の和をいくつか並べ，それらを max, min 演算により大小比較を行っている．

というものである．この形式にしたがって f_j^n を初期時刻 $n=0$ の f で表現すると，たとえば PCA4-2 では

$$f_j^n = \max_{0\le k\le n}\Big(\min\Big(f_{j-2n+3k}^0 - \frac{k}{2}, \min_{k+1\le i\le n} f_{j-2n+3i}^0 + \frac{i}{2}\Big)\Big)$$

となる．時間発展方程式を再帰的に用いて得られる形式解では，f_j^n を表すのに必要な f_i^0 の項の数は $n\to\infty$ で $O(2^n)$ や $O(3^n)$ など指数オーダーである．これに対し，max や min の公式を用いて項の数を減らすことによって PCA3 では $O(n)$, PCA4-2 では $O(n^2)$ と多項式オーダーで済んでいる．時間発展とともにどのようなオーダーの初期値によって解が表されるかは，可積分系分野の代数的エントロピーと同等の指標である．このことから PCA3 や PCA4 は可積分あるいは可解な系に近いと考えることができる．ただし，解のオーダーと可積分性，可解性の関係についての厳密な定義や解析はまだなされておらず，今後の課題である．

§2. 非自励粒子セルオートマトン

前節で述べた粒子セルオートマトンは外力項が入らず，自らの状態によって時間発展をする自励系となっている．そこで，これら自励型の粒子セルオートマトンを非自励化する，すなわち外力項を導入することを考えよう．ただし，一口に非自励化と言っても様々な方法が考えられる．そこで本稿では，前節で述べた自励粒子系の初期値問題に対する可解性に注目し，それをなるべく損なわない形で外力項を導入する．この際にポイントとなるのは，(1.6) 型の変換によって得られる f の時間発展方程式であり，自励型の場合と同様，f の時間発展方程式の右辺が

> f の単項あるいは f の単項と定数・外力項の和をいくつか並べ，それらを max, min 演算により大小比較を行っている．

という形式を保持することにする [7]．PCA3 をこの方針で非自励化すると，

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \qquad q_j^n = \min(a_j^n, u_j^n, 1 - u_{j+1}^n) \tag{2.9}$$

となる．a_j^n は外力項である．PCA3 と同じ変換

$$u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2}$$

を用いると，f に関する時間発展方程式は

$$f_j^{n+1} = \max\Big(f_{j-1}^n, f_j^n + \frac{1}{2} - a_j^n, f_{j+1}^n\Big) \tag{2.10}$$

となり，上の形式に従う．

たとえば u を再び 0, 1 の 2 値 CA とし，a_j^n を 0 か 1 の値をとる外部変数であると仮定しよう．流束 q より，この粒子系の移動規則は

> サイト j にいる粒子 ($u_j^n = 1$) は $j+1$ に粒子が存在せず ($u_{j+1}^n = 0$)，さらに $a_j^n = 1$ ならば $j+1$ に移動し，そうでなければ j にとどまる．

となる．すなわち a_j^n は粒子の移動を制御する信号機の役割を果たしている．このとき (2.10) の初期値問題を考えよう．初期時刻を $n = 0$ とし，$c_j^n = \frac{1}{2} - a_j^n$ と表すと，(2.10) を再帰的に用いて

$$\begin{aligned}
&f_j^1 = \max(f_{j+1}^0, f_j^0 + c_j^0, f_{j-1}^0),\\
&f_j^2 = \max(f_{j+2}^0, f_{j+1}^0 + \max(c_{j+1}^0, c_j^1), f_j^0 + \max(0, c_j^0 + c_j^1), f_{j-1}^0 + \max(c_{j-1}^0, c_j^1), f_{j-2}^0),\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

と時間発展が定まる．そして任意の j, n における f_j^n を $\{f_i^0\}$ より決定する問題は以下の数え上げの問題に帰着する．まず，横軸 j，縦軸 n の整数格子平面を考える．そして座標 $(i, 0)$ から座標 (j, n) に至る図 2 のような経路をすべて考える．任意の経路は縦，斜め右，斜め左の部分経路から成り立っている（したがって $j - n \le i \le j + n$）．そして，ある経路 p の縦の部分経路が m 個あり，それぞれの下端が (i_1, n_1), …, (i_m, n_m) であるとするとき，その経路の重みを

$$w_p = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k}^{n_k}$$

と定義する．このとき (2.10) の f_j^n は f_j^0 と a_j^n を用いて

$$f_j^n = \max_{j-n \le i \le j+n}\Big(f_i^0 + \max_{\substack{(i,0)\text{ から }(j,n)\text{ に}\\ \text{至る任意の経路 } p}} w_p\Big)$$

と表すことができる．$n \to \infty$ における f_j^n の漸近評価は，a_j^n の具体的な定義に依存した経路数え上げの問題に帰着し，PCA3 のときの (1.7) の初期値問題よりは一般に難しい．

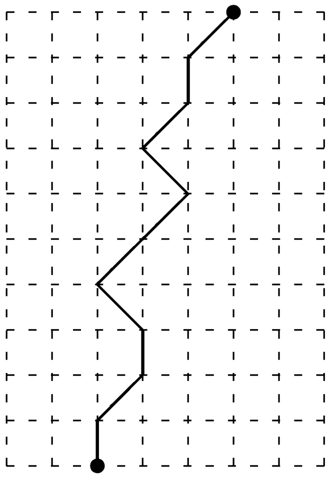

図 2. $(i,0)$ から (j,n) へ至る経路の例

しかしながら，それでも時間発展方程式 (2.10) の右辺の max の中の項がどれも f の単項で成り立っていることが問題の難しさをずっと易しくしている．もし単項でなくたとえば $2f_j^n$ や $f_{j-1}^n \pm f_j^n$ などの項を含むなら，はるかに難しい数え上げの問題になるであろう．本稿では，この経路数え上げ問題には直接取り組まないが，自励系の可解性になるべく近い非自励化は，変換後の f の方程式が上述の形式に従うという予想のもとに，PCA4 についても以下のように外力項を導入する [7].

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n$$

- PCA4-1 の非自励化

$$\begin{aligned}
q_j^n &= \min(a_{j-1}^n + u_j^n, a_j^n + b_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n, 1 - u_{j+1}^n),\\
u_j^n &= f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{3},\\
f_j^{n+1} &= \max\Big(f_{j-2}^n, f_{j-1}^n - a_{j-1}^n + \frac{1}{3}, f_j^n - a_j^n - b_j^n + \frac{2}{3}, f_{j+1}^n\Big)
\end{aligned}$$

- PCA4-2 の非自励化

$$\begin{aligned}
q_j^n &= \min(\max(-\min(b_j^n, u_{j+1}^n), \min(a_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n),\\
u_j^n &= f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2},\\
f_j^{n+1} &= \max\Big(\min\Big(f_j^n + b_j^n, f_{j+1}^n + \frac{1}{2}, \max(f_j^n - a_j^n, f_{j-2}^n)\Big), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}$$

- PCA4-3 の非自励化

$$
\begin{aligned}
q_j^n &= \min(\max(0, \min(a_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n),\\
u_j^n &= f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2},\\
f_j^{n+1} &= \max\Big(\min(f_j^n, \max(f_j^n - a_j^n, f_{j-2}^n)), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

どの系も a_j^n, b_j^n が外力項であり（PCA4-3 は a_j^n のみ），$u \in \{0,1\}$ の CA の場合に $a_j^n \equiv b_j^n \equiv 1$ とすると元の自励系に一致する．

§3.　非自励粒子セルオートマトンの確率化

§3.1.　3 近傍の場合

PCA3 を非自励化した方程式 (2.9) に対して，0 以上 1 以下の定数 α を用いて外力項 a_j^n の値を (j,n) 毎に

$$
a_j^n = \begin{cases} 1 & （確率\ \alpha） \\ 0 & （確率\ 1-\alpha） \end{cases}
$$

より確率的に定める．非自励化 PCA の外力項をこのように確率化して得られる系を SPCA (Stochastic PCA) と呼ぶことにする．上の a_j^n で定義される系は PCA3 の確率化なので SPCA3 である．さらに，上の確率変数にしたがって粒子を移動させて得られる平均流束 Q を，(2.9) の q_j^n より以下のように定める．

$$
Q = \lim_{n,K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} q_j^n
$$

決定論的移動の (1.3) と異なり，確率的移動なのでサイト数 K も無限大の極限をとる．しかしながら，試行平均をとらなくとも一度限りの試行によって Q は ρ と α から初期値によらず一意的に定まることがこの系の特徴となっている．このことは数値実験の結果と理論値が一致することから確かめられている．図 3 に $\alpha = 0.25$, 0.5, 0.75, 1 の場合の基本図をプロットする．サイト K を 10000 として時刻 n が 100000 での Q を数値実験において測定した結果を黒丸で示している．実線は以下に述べる理論曲線である．

この基本図の理論曲線はどのように導出できるであろうか．この種の理論曲線の導出は非対称単純排他過程 (ASEP) や交通流の分野でも盛んに研究されているが [8, 9]，本稿で後に述べる 4 近傍確率粒子系にまで通じる導出手法はまだ開発されていない．そこで，SPCA3 については既に ASEP でも結果が得られているが，いくつかの確率的仮定を置くことによって，より多近傍でも理論曲線を導出できる我々の導出方法について SPCA3 に沿って説明しよう．

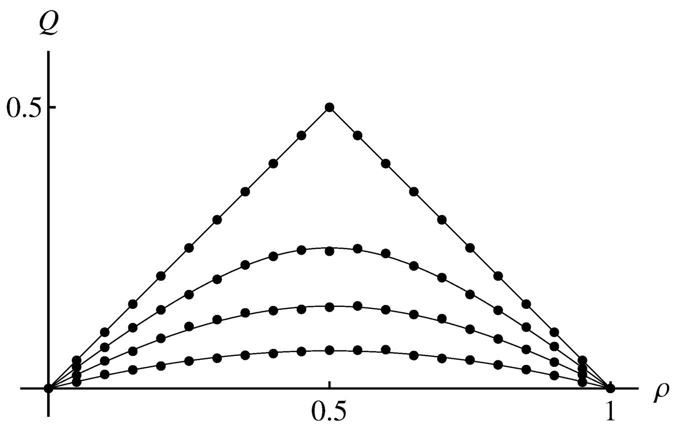

図 3. SPCA3 の基本図

まず，$x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ を 0 か 1 の値であるとして以下の量を定義する．

$$P_{x_1x_2\ldots x_\ell} = \lim_{K,n\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} \delta_{u^n_{j+1},x_1}\delta_{u^n_{j+2},x_2}\cdots\delta_{u^n_{j+\ell},x_\ell}$$

$\delta_{x,y}$ はクロネッカーのデルタであり，$P_{x_1x_2\ldots x_\ell}$ はサイト数 K および時刻 n が無限大の極限での 0, 1 パターン $x_1x_2\cdots x_\ell$ の密度を与えている．ここで第一の仮定として，SPCA3 では上式の右辺の値は $K, n\to\infty$ で一定値に収束し，その値は粒子密度 ρ および確率パラメータ α にのみ依存するとする．また P の定義より

$$P_1 = \rho, \qquad P_0 = 1-\rho,$$
$$P_{0x_1\ldots x_\ell} + P_{1x_1\ldots x_\ell} = P_{x_1\ldots x_\ell}, \qquad P_{x_1\ldots x_\ell 0} + P_{x_1\ldots x_\ell 1} = P_{x_1\ldots x_\ell}$$

や

$$P_{01} = P_{10}, \qquad P_{11} = \rho - P_{10}, \qquad P_{00} = 1-\rho-P_{10}$$

などの法則が常に成り立つ．さらに粒子の移動規則より

(3.1.1) $$P_{10} = \alpha P_{110} + (1-\alpha)P_{10} + \alpha^2 P_{1010} + \alpha P_{100}$$

が成立する．

次に，第二の仮定として任意の x_k に対して

(3.1.2) $$P_{x_1x_2x_3} = \frac{P_{x_1x_2}P_{x_2x_3}}{P_{x_2}}, \qquad P_{x_1x_2x_3x_4} = \frac{P_{x_1x_2x_3}P_{x_2x_3x_4}}{P_{x_2x_3}}, \qquad \ldots$$

が成り立つとしよう．条件付き確率に似たこれら等式については，証明されていないものの数値実験では十分な精度で成立することが確かめられている．これらを用いることにより (3.1.1) から

$$\alpha P_{10}^2 - P_{10} + \rho(1-\rho) = 0$$

という P_{10} についてのみ閉じた方程式が得られ，これを解くことにより

$$P_{10} = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha\rho(1-\rho)}}{2\alpha}$$

が導かれ，最終的に

$$Q = \alpha P_{10} = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha\rho(1-\rho)}}{2}$$

が得られる．図 3 の実線はこの式をプロットしたものであり，黒丸で示した数値計算結果とよく一致していることが確認できる．

§3.2. 4 近傍の場合

SPCA3 と同様に，非自励化した PCA4-1, 4-2, 4-3 の外力項を定数 α, β を用いて

$$a_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \alpha) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\alpha) \end{cases}, \qquad b_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \beta) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\beta) \end{cases}$$

という確率変数に置き換えれば，確率粒子系 SPCA4-1, 4-2, 4-3 が得られる．たとえば SPCA4-2 の場合，粒子の移動規則は

> サイト j に存在する粒子 $(u_j^n = 1)$ は，$j-1$ に粒子が存在し $(u_{j-1}^n = 1)$，$j+1$ に粒子が存在せず $(u_{j+1}^n = 0)$，さらに $a_j^n = 1$ ならば $j+1$ に移動する．また，$j-2$ と $j-1$ のどちらにも粒子が存在せず $(u_{j-2}^n = u_{j-1}^n = 0)$，さらに $b_j^n = 1$ ならば $j-1$ に移動する．どちらの場合にもあてはまらなければ j にとどまる．

となる．この移動規則より $K, n \to \infty$ で

$$\begin{aligned} P_{10} &= \alpha P_{11000} + \alpha(1-\beta)P_{11001} + \beta P_{001} + (1-\alpha)P_{110} + P_{1010} \\ &\quad + (1-\beta)P_{0010} + \alpha P_{1110} + \alpha P_{10110} + \alpha(1-\beta)P_{00110} \\ &= P_{10} + \alpha P_{11000} + \alpha(1-\beta)P_{11001} + \beta P_{00111} + \beta(1-\alpha)P_{00110} \end{aligned}$$

が成立し，

$$\alpha P_{11000} + \alpha(1-\beta)P_{11001} + \beta P_{00111} + \alpha(1-\beta)P_{00110} = 0$$

となる．よって $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ の場合，

$$P_{11000} = P_{11001} = P_{00111} = P_{00110} = 0$$

が導かれ，よって

$$P_{1100} = P_{0011} = 0$$

となる．したがって SPCA4-2 ではパターン 11 と 00 は $K, n \to \infty$ で隣り合わない．さらに上の粒子の移動規則から 11 と 00 が共存できないことが示せる．以上より，

$$\begin{cases} P_{11} = 0, \qquad P_{01} = P_{10} = \rho, \qquad P_{00} = 1-2\rho \qquad (\rho \le 1/2) \\ P_{00} = 0, \qquad P_{01} = P_{10} = 1-\rho, \qquad P_{11} = 2\rho - 1 \qquad (\rho > 1/2) \end{cases}$$

となる．また粒子の移動規則より平均流束は

$$Q = \alpha P_{110} - \beta P_{001}$$

となるので，上のことから

$$Q = \begin{cases} -\beta P_{001} & (\rho \le 1/2) \\ \alpha P_{110} & (\rho > 1/2) \end{cases}$$

となる．したがって $\rho \le 1/2$ では P_{001} を，$\rho > 1/2$ では P_{110} を ρ, α, β で表せれば Q を求めることができる．たとえば $\rho \le 1/2$ では $P_{11} = 0$ を考慮して

$$P_{001} = P_{0001} + (1-\beta)P_{01001} + \beta P_{00101} + \beta^2 P_{001001} \tag{3.2.1}$$

が得られるが，ここで SPCA3 の第二の仮定のように

$$P_{x_1x_2x_3x_4} = \frac{P_{x_1x_2x_3}P_{x_2x_3x_4}}{P_{x_2x_3}}, \qquad P_{x_1x_2x_3x_4x_5} = \frac{P_{x_1x_2x_3x_4}P_{x_2x_3x_4x_5}}{P_{x_2x_3x_4}}, \qquad \ldots \tag{3.2.2}$$

が成り立つとする．興味深いのは，SPCA3 では

$$P_{x_1x_2x_3} = \frac{P_{x_1x_2}P_{x_2x_3}}{P_{x_2}} \tag{3.2.3}$$

が成り立ったが，SPCA4-2 では成り立たないという点である．このことを確認する数値実験として，図 4 (a) に $P_{00}P_{0001}$ と $P_{000}P_{001}$ の比較を，(b) に P_1P_{110} と $P_{11}P_{10}$ の比較を示す．なお，サイト数 K を 1000 として時刻 n が 9001 から 10000 までの平均値を用いている.（時間平均を取る理由は，サイト数が小さい系でも $K \to \infty$ に近い良好な計算結果が得られ，計算時間の節約ができるからである.）図の (a) は (3.2.2)，(b) は (3.2.3) のあ

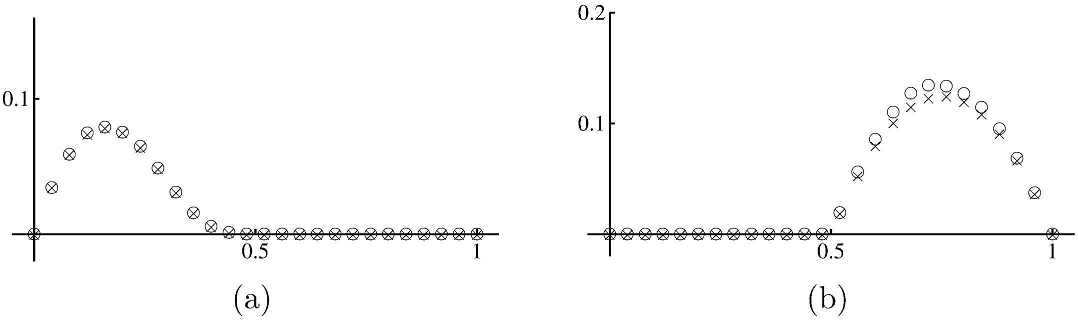

図 4. SPCA4-2 の確率等式を確認する数値実験．(a) $P_{00}P_{0001}$ と $P_{000}P_{001}$ の比較，(b) P_1P_{110} と $P_{11}P_{10}$ の比較

る等式の左右辺を比較しており，これらについては (3.2.2) が成り立ち (3.2.3) が成り立たないことが確かめられる．SPCA3 よりも近傍数がひとつ多い SPCA4-2 では，近接する

0, 1 パターンの相関がより強くなるので，(3.2.3) のように長さが 2 サイトの近接パターンの独立性が必要な等式は成り立ちにくくなるであろうことは予想できる．

(3.2.2) の等式を用いると (3.2.1) から P_{001} で閉じた方程式を導くことができ，結局

$$Q = -\frac{1-\rho-\sqrt{(1-\rho)^2-4\beta\rho(1-2\rho)}}{2}$$

が得られる．同様にして $\rho > 1/2$ では

$$Q = \frac{\rho-\sqrt{\rho^2-4\alpha(1-\rho)(2\rho-1)}}{2}$$

となる．以上の結果を元に，基本図の数値実験結果（黒丸）と理論曲線（実線）を比較したものを図 5 に示す．β を 0.7 に固定し，α を 0.25, 0.5, 0.75, 1 のそれぞれの場合でプロットしている．なお，この図の数値実験ではサイト数 K を 1000 として時刻 n が 9001 から 10000 までの平均値を用いている．両者がよく一致していることは図から明らかである．

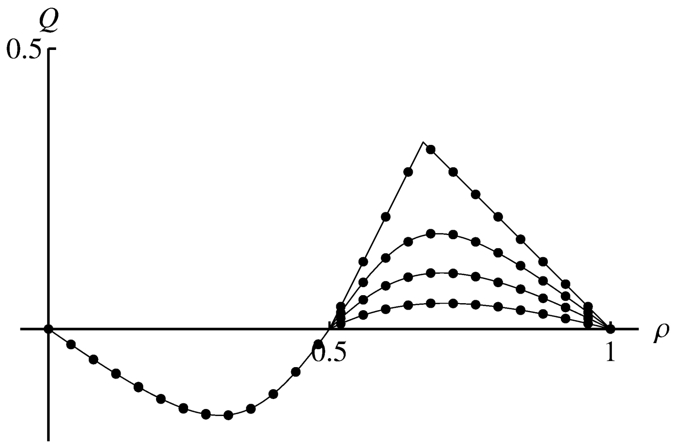

図 5. SPCA4-2 の基本図の数値実験結果（黒丸）と理論曲線（実線）の比較．β を 0.7 に固定し, α を 0.25, 0.5, 0.75, 1 のそれぞれの場合でプロットしている．

SPCA4-1 と 4-3 についても同様の解析を行うことで基本図の理論曲線を求めることができる．結果のみ記すと，まず SPCA4-3 は

$$Q = \begin{cases} 0 & (\rho \le 1/2) \\ \dfrac{\rho-\sqrt{\rho^2-4\alpha(1-\rho)(2\rho-1)}}{2} & (\rho > 1/2) \end{cases}$$

となり，$\rho \le 1/2$ ではすべての粒子が静止し，$\rho > 1/2$ では SPCA4-2 と基本図が一致することがわかる．このことは粒子の移動規則からも容易に推察することができる．次に SPCA4-1 については，Q を ρ, α, β, P_{10} の有理式で表すことができるが，P_{10} に関する

閉じた方程式が ρ, α, β を係数に含む 6 次方程式となり，初等関数で表すことができない．したがって理論曲線はこの 6 次方程式を数値的に解いて確認することができる．なお，SPCA4-1, 4-2, 4-3 の基本図の理論曲線の導出および数値実験との比較については文献 [7] に詳しく報告しているのでそちらを参照してほしい．

§4.　おわりに

本稿では，粒子が移動する系とみなせる CA (PCA) に関して非自励化さらに確率化を行った．PCA は時間発展則を max-plus 表現で表すことにより初期値問題を解くことができる．その際に重要となる点は，従属変数変換により元の時間発展方程式から初期値問題を解きやすい方程式に変換できることである．この操作は，PCA3 では超離散 Cole-Hopf 変換によって超離散 Burgers 方程式から超離散拡散方程式を得ることに相当する．この形式に従う PCA の時間発展方程式を非自励化する際には，この構造を壊さないように外力項を導入した．またそれら外力項を確率変数とみなすことにより確率粒子 CA (SPCA) を得た．さらに SPCA の解の漸近挙動について，いくつかの仮定をおくことによって基本図の理論曲線を求めることに成功した．

粒子 CA の確率化に対しては，どのような確率変数を導入するかについて自由度がある．本稿においては，非自励化の際の外力項の導入が上で述べた構造を壊さない形式に従っており，それを確率化することで自由度を限定している．得られた SPCA では基本図の理論曲線が粒子密度 (ρ) と確率パラメータ (α, β) にしかよらず，初期の粒子配置や試行によらない系を得ることができた．

本稿で述べた解析や結果から考えられる将来の課題は以下の通りである．

- 非自励系のダイナミクスを max-plus 表現を用いて解析すること．非自励系の初期値問題を max-plus 方程式によって解析できれば，初期値が実数の場合でも解の挙動について情報を得ることができる．可解な非自励の max-plus 方程式はほとんど知られておらず，それらが提供するダイナミクスはたいへん興味深い．また，確率変数の多値化や実数化についても面白い課題であろう．

- 非自励系の外力項を確率変数以外に応用すること．たとえば時間や空間についての周期関数を外力項に導入したり，外力項を通じて連立系を作ったりすることは容易に可能である．このような拡張は，数理モデルとしての応用の可能性を高めるであろう．初期値問題の可解性を壊さないこの種の拡張は数理的問題としても興味深い．

- 基本図の理論曲線の導出の際に用いた仮定を証明すること．$P_{x_1 x_2 \dots x_\ell}$ が密度と確率パラメータのみに依存し初期値によらないことや，(3.1.2) のような等式が成り立つことについては，時間発展方程式や系のダイナミクスを用いれば原理的には証明可能な事柄である．

- 基本図が密度と確率パラメータにしか依存せず，初期値や試行によらないような粒子系を探索すること．確率パラメータを定数にするなど特殊化することで決定論的な自

励粒子系を得ることも可能であり，この課題は自励粒子系についても共通のものである．このような系のダイナミクスは解析しやすく，基本図の理論曲線の導出可能性が大きい．5 近傍以上の系について，このような系となるための一般的条件は何かという問題はたいへん興味深い．

参考文献

[1] S.Wolfram, “A New Kind of Science”, Wolfram Media Inc (2002).

[2] 武末真二, “セルオートマトンの保存量”, 数理解析研究所講究録 **1020** (1997) 103–126.

[3] D.Takahashi, J.Matsukidaira, H.Hara and B.Feng, “Max-plus analysis on some binary particle systems”, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 135102 (21pp).

[4] 杉山雄規, “交通流の物理”, ながれ **22** (2003) 95–108.

[5] K.Nishinari and D.Takahashi, “Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton”, J. Phys. A Math. Gen. **31** (1998) 5439-5450.

[6] 広田良吾, 高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版 (2003).

[7] 桑原英樹, 池上貴俊, 高橋大輔, “確率変数を含む粒子セルオートマトンについて”, 日本応用数理学会論文誌（投稿中）

[8] R.A.Blythe and M.R.Evans, “Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver’s guide”, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) R333–R441.

[9] M.Schreckenberg, A.Schadschneider, K.Nagel, and N.Ito, “Discrete stochastic models for traffic flow”, Phys. Rev. **E51** (1995) 2939–2949.