RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B44 (2013), 151–164

有限体上の異なる次数の Fermat 多様体の積に対する Tate 予想

By

杉山 倫 (Rin Sugiyama)*

Abstract

This is a research announcement about a result on the Tate conjecture for products of Fermat varieties of different degrees over finite fields. In [24], we prove under some assumptions that the Tate conjecture holds for such varieties, using a combinatorial property of eigenvalues of geometric Frobenius acting on ℓ-adic étale cohomology. In this paper, we outline the above result and its proof.

今回の研究集会において, 発表の場およびこの原稿を書く機会を与えてくださいました諏訪紀幸先生, 志甫淳先生, 佐藤周友先生に心より感謝申し上げます.

本稿は異なる次数の Fermat 多様体の積に対する Tate 予想についての結果 [24] の概要である. §1 では, 有限体上の非特異射影多様体に対する Tate 予想の主張および関連する予想について述べる. §2 では, 主結果とその系を紹介し, §3 で証明の概略を与える.

§1. Tate 予想

p を素数とする. $\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる有限体とし, $\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}_p$ の代数閉包とする. 有限部分体 $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}$ に対して, $G_{\mathbb{F}_q}$ で $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ の Galois 群を表す. ℓ を p と異なる素数とする. $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影多様体 X に対する次の予想が Tate 予想である ([25]):

予想 1 ($\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, i)$). サイクル写像

$$\rho_X^i : \mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}} \tag{1.1}$$

は全射である.

Received March 31, 2012. Revised December 20, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 14G15, 11G25, 14H52.
本研究は特別研究員奨励費の助成を受けたものである.

*Fakultät Mathemtik, Universität Duisburg-Essen, Thea-Leymann-Strasse 9, 45127 Essen, Germany.
e-mail: `sugiyamarin@gmail.com`

ここで, $\mathrm{CH}^i(X)$ は X 上の余次元 i の代数的サイクルの有理同値類のなす Chow 群である ([9]). $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}$ は $\overline{X} := X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ の ℓ 進エタールコホモロジー $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))$ の $G_{\mathbb{F}_q}$ 固定部分を表す (cf. 記号 (3)).

Tate 予想について, $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, 0)$ と $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, \dim X)$ は自明である. Tate [26] は $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, 1)$ の成立を X がアーベル多様体および曲線の積の場合に示した. X が曲線の積の場合には, Soulé [22] によって $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, i)$ が $i = 1, \dim X - 1$ に対して成り立つことが示されている. また, 楕円曲線の積に対しては, Spiess [23] により Tate 予想成立が証明されている. 他の知られている結果については [27] を参照せよ.

Beilinson [2] はさらにサイクル写像 (1.1) は全単射であると予想した. そこで, 次の予想を Tate-Beilinson 予想と呼ぶ:

予想 2 ($\boldsymbol{TB}(X/\mathbb{F}_q, i)$). サイクル写像 ρ_X^i は全単射である.

Tate 予想は X のゼータ関数 $\zeta(X,s)$(cf. 記号 (4)) の研究に動機付けをもつ. 実際, $\zeta(X,s)$ の整数点での極の位数, より正確には, 次の等式（これも予想）と関係がある:

$$\mathrm{ord}_{s=i}\zeta(X,s) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^i_{\mathrm{num}}(X) \otimes \mathbb{Q} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \tag{1.2}$$

ここで, $\mathrm{CH}^i_{\mathrm{num}}(X)$ は X 上の余次元 i の代数的サイクルの数値的同値類のなす群である (cf. [9]). 上記の予想との関係を見るために, いくつかの予想を紹介する:

予想 3 ($\boldsymbol{S}(X/\mathbb{F}_q, i)$). Frobenius 元 $\varphi \in G_{\mathbb{F}_q}$ が $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))$ の固有値 1 の一般固有空間に半単純に作用する.

Weil [28] の結果により, アーベル多様体 X に対して $\boldsymbol{S}(X/\mathbb{F}_q, i)$ が成り立つ.

予想 4 ($\boldsymbol{E}(X/\mathbb{F}_q, i)$). X 上の余次元 i の代数的サイクルに対して, ℓ 進ホモロジー的同値と数値的同値が有理数係数で一致する.

ℓ 進ホモロジー同値の定義については [17] 参照. すべての X に対して, $\boldsymbol{E}(X/\mathbb{F}_q, 1)$ が成り立つ ([27, §5]). X が $\mathbb{F}$ 上のアーベル多様体であるとき, ℓ 進ホモロジー同値と数値的同値が一致するような素数 ℓ の集合で正の密度を持つようなものが存在する (Clozel [4]). さらに, この結果は Deligne [8] により精密化されている.

予想 5 ($\boldsymbol{B}(X/\mathbb{F}_q, i)$). X 上の余次元 i の代数的サイクルに対して, 有理同値と ℓ 進ホモロジー的同値が有理数係数で一致する.

$\boldsymbol{B}(X/\mathbb{F}_q, i)$ は ρ_X^i の単射性を導く. 従って, $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, i)$ と $\boldsymbol{B}(X/\mathbb{F}_q, i)$ から $\boldsymbol{TB}(X/\mathbb{F}_q, i)$ が従う.

今, Tate 予想と等式 (1.2) との関係について述べることができる. 上記の予想たちについて, 次は同値である ([27, Theorem 2.9]):

(1) $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, i) + \boldsymbol{E}(X/\mathbb{F}_q, i)$.
(2) $\boldsymbol{T}(X/\mathbb{F}_q, i) + \boldsymbol{S}(X/\mathbb{F}_q, i) + \boldsymbol{E}(X/\mathbb{F}_q, i) + \boldsymbol{B}(X/\mathbb{F}_q, i)$.
(3) 等式 (1.2).

$K_i(X)$ を X 上のベクトル束の圏に付随する Quillen の高次 K-群とする. $K_i(X)_{\mathbb{Q}} = K_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ とおく. このとき Tate 予想 (Tate-Beilinson 予想) は, 次の同型により, K-群を用いて定式化できる:

$$K_0(X)^{(i)}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

ここで, $K_0(X)^{(i)}_{\mathbb{Q}}$ は $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ の部分空間であって, Adams 作用素 ψ^m がすべての $m \in \mathbb{N}$ に対して m^i で作用するものである. 有限体上の非特異射影多様体の高次 K-群について, Parshin によって提起された予想がある:

予想 6. 有限体上の非特異射影多様体 X とすべての整数 $i > 0$ に対して, $K_i(X)_{\mathbb{Q}} = 0$.

K-群の有限生成性についての Bass 予想 [1] により, $K_i(X)(i > 0)$ は有限群であると予想されている. Geisser [11] は Tate 予想の成立および有理同値と数値的同値が一致するとき, Parshin 予想が成り立つことを示した. Kahn [14] は Tate 予想が成り立つアーベルタイプの非特異射影多様体のなすクラス $\mathcal{B}_{tate}(\mathbb{F}_q)$ を導入し, Geisser[11] と木村 [16] の結果を用いて, $\mathcal{B}_{tate}(\mathbb{F}_q)$ に属する多様体 X に対して, 有理同値と数値的同値の一致および Parshin 予想の成立を証明した. ここで, 非特異射影多様体 X がアーベルタイプであるとは, X の Chow モチーフが Artin モチーフとアーベル多様体のモチーフで生成された Chow モチーフの圏の部分圏に含まれるときをいう.

次に, Bloch の高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^n(X, i)$ を導入し ([3]), $\mathrm{CH}^n(X, i)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{CH}^n(X, i) \otimes \mathbb{Q}$ とおく. このとき, 同型 $K_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{CH}^n(X, i)_{\mathbb{Q}}$ が存在する ([3]). よって, Parshin 予想はすべての $n \geq 0$ と $i > 0$ に対して, $\mathrm{CH}^n(X, i)_{\mathbb{Q}} = 0$ を導く. Weil 予想の Deligne による証明 [6] より, $H^{2i-j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}} = 0$ が $j \neq 0$ に対して成り立つ. それゆえ, Tate-Beilinson 予想と Parshin 予想を次の一つの予想にまとめることができる.

予想 7. すべての整数 $i, j \geq 0$ に対して, サイクル写像

$$\mathrm{CH}^i(X, j) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2i-j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}$$

は全単射である.

上で述べた Geisser と Kahn の結果は, $\mathcal{B}_{tate}(\mathbb{F}_q)$ に含まれる任意の多様体 X に対して予想 7 が成り立つことを導く.

記号

(1) 整数 $m > 1$ に対して, $\mathbb{Z}/m$ は m 倍写像 $\mathbb{Z} \stackrel{\times m}{\to} \mathbb{Z}$ の余核を表し, $(\mathbb{Z}/m)^\times$ は $\mathbb{Z}/m$ の可逆元のなす群を表す.

(2) k を体とし, X を k-スキームとする. 体の拡大 F/k に対して, $X \times_k F$ は $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(F)$ を表す. 特に, 分離閉包 k^{sep}/k に対して, $\overline{X}$ で $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k^{\mathrm{sep}})$ を表す.

(3) 特に明言しない限り, スキームのコホモロジーはすべてエタールコホモロジーとする. X をスキームとする. X 上で可逆な素数 ℓ と整数 $i, j \geq 0$ に対して,

$$H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) := H^i_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(j)),$$
$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) := H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

と定義する. ここで $H^i_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(j))$ は Jannsen [13] の定義した連続 ℓ 進エタールコホモロジーである. $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(0))$ を $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ とかく.

(4) 有限体 $k = \mathbb{F}_q$ 上の非特異射影多様体 X に対して, X のゼータ関数を次のように定義する:

$$\zeta(X, s) := Z(X/k, q^{-s}) \text{ ただし } Z(X/k, t) := \exp\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n\Big).$$

ここで, $\sharp$ は有限集合の濃度を表す.

(5) m と r を自然数とし, 集合 $\mathfrak{D}_{m,r}$ を次で定義する:

$$\mathfrak{D}_{m,r} = \big\{(\gamma_0, \ldots, \gamma_{r+1}) \mid \gamma_i \in \mathbb{Z}/m,\ \gamma_i \not\equiv 0,\ \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{r+1} \equiv 0\big\}.$$

$\mathbb{F}_q$ を有限体とし, $q \equiv 1 \mod m$ をみたすとする. χ を $\mathbb{F}_q^\times$ の位数 m の指標とする. このとき, $\gamma \in \mathfrak{D}_{m,r}$ に対して, Jacobi 和 $j(\gamma)$ は次で定義される:

$$j(\gamma) = (-1)^r \sum_{\substack{1 + v_1 + \cdots + v_{r+1} = 0 \\ v_i \in \mathbb{F}_q^\times}} \chi(v_1)^{\gamma_1} \cdots \chi(v_{r+1})^{\gamma_{r+1}}.$$

§ 2. 主結果

p と素な整数 $m > 0$ と整数 $r \geq 0$ に対して, 次数 m の r 次元多様体 $X^r_m = X^r_m(a_0, \ldots, a_{r+1}) \subset \mathbb{P}^{r+1}_{\mathbb{F}_q}$ を次の方程式によって定義する:

$$a_0 x_0^m + a_1 x_1^m + \cdots + a_{r+1} x_{r+1}^m = 0.$$

ここで, a_i は $\mathbb{F}_q$ の零でない元である. $a_0 = \cdots = a_{r+1} \neq 0$ のとき, X^r_m を Fermat 多様体と呼び, V^r_m で表す. 塩田と桂 [19, 20] は同じ次数の Fermat 多様体の積 $V^{r_1}_m \times \cdots \times V^{r_s}_m$ に対する Tate 予想をある数論的な仮定のもとで証明した (例えば, m が素数で $p \equiv 1 \mod m$). 本稿では, 異なる次数の X^r_m の積について考え, 次の定理を紹介する:

定理 2.1 ([24, Theorem 1.1])**.**　k を標数 p の有限体とする．$m_1, \dots, m_d$ を p と素な正の整数とする．$r_1, \dots, r_d$ を正の整数とする．このとき，$X^{r_j}_{m_j} = X^{r_j}_{m_j}(\mathbf{a}_j)$ とし ($\mathbf{a}_j \in (k^\times)^{r_j+2}$), X を積 $X^{r_1}_{m_1} \times \cdots \times X^{r_d}_{m_d}$ とする．このとき以下の (1)–(4) の各々の場合に, すべての i に対して $\boldsymbol{T}(X/k, i)$ が成り立つ:

(1) r_j がすべて 1 に等しい場合, 次の (a),(b) のいずれかを仮定する:

  (a) 各 $1 \leq j \leq d$ に対して, 高々一つ $j' \neq j$ が存在して, $\gcd(m_j, m_{j'}) > 2$ が成り立つ．

  (b) すべての $4 \leq j \leq d$ なる偶数 j とすべての $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j \leq d$ に対して, 次をみたす整数 a ($1 \leq a \leq j$) が存在する:

    (i) すべての $r \neq a$ 対して $\gcd(m_{n_a}, m_{n_r}) \leq 2$ が成り立つ,

    (ii) p の $(\mathbb{Z}/m_{n_a})^\times$ における位数が奇数である．

(2) r_j がすべて奇数の場合, 次の条件を仮定する:

  (i) $j \neq j'$ に対して, $\gcd(m_j, m_{j'}) \leq 2$,

  (ii) すべての j に対して, p の $(\mathbb{Z}/m_j)^\times$ における位数が奇数である．

(3) r_j がすべて偶数の場合, 次の条件を仮定する:

  (i) $j \neq j'$ に対して, $\gcd(m_j, m_{j'}) \leq 2$,

  (ii) $\boldsymbol{T}(X^{r_j}_{m_j}/L, r_j/2)$ がすべての j と十分大きな有限次拡大 L/k に対して成り立つ．

(4) 一般の場合, 次の条件を仮定する:

  (i) $j \neq j'$ に対して, $\gcd(m_j, m_{j'}) \leq 2$,

  (ii) r_j が奇数となる j に対して, p の $(\mathbb{Z}/m_j)^\times$ における位数が奇数である,

  (iii) r_j が偶数となる j に対して, $\boldsymbol{T}(X^{r_j}_{m_j}/L, r_j/2)$ がすべての j と十分大きな有限次拡大 L/k に対して成り立つ．

定理 2.1 の証明では, Spiess [23] の議論と Soulé の結果 [22, Théorèm 3] を用いる．その鍵は X の ℓ 進エタールコホモロジーに作用する Frobenius の固有値の組み合わせ論的な性質である．

註記.　定理 2.1 の条件 (1)–(4) のいずれかをみたす多様体 X に対して，ベクトル空間 $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}$ は消えていない．さらに，X が条件 (2)–(4) のいずれかをみたす多様体の時には，$H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}$ の $\mathbb{Q}_\ell$ 上の次元を記述することができる．例えば, $X = X^{r_1}_{m_1} \times \cdots \times X^{r_d}_{m_d}$ を条件 (2) をみたすものとする．このとき,

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}\\ &\qquad = \sharp\{(i_1, \dots, i_d) \mid i_1 + \cdots + i_d = i \text{ and } 0 \leq i_j \leq \min\{r_j, i\} \text{ for all } j\}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで, $\sharp$ は有限集合の濃度を表す．

定理 2.1 (3) と X_m^2 に対する Tate 予想が正しいという事実から, 次を得る:

系 2.2. 記号は定理 2.1 のものとする. すべての $j \neq j'$ に対して, $\gcd(m_j, m_{j'}) \leq 2$ を仮定する. このとき, $X_{m_1}^2 \times X_{m_2}^2 \times \cdots \times X_{m_d}^2/k$ に対して Tate 予想が成り立つ.

この系は定理 2.1 (1) と塩田と桂 [19] によって与えられた Fermat 多様体の "帰納構造" からも証明できる ([24, §3.2]).

系 2.3. 多様体 X を定理 2.1 の条件 (1)–(4) のいずれかをみたすものとする. このとき, 予想 7 が X に対して成り立つ.

さらに, X が条件 (1) (b) をみたすものであるとき, 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{CH}^i(X)$ は有限階数の自由アーベル群と有限指数の群との直和である. 特に, $\mathrm{CH}^2(X)$ は有限生成である.

(2) $K_0(X)$ は有限階数の自由アーベル群と有限指数の群との直和である.

系 2.3 の最初の主張は定理 2.1 と Geisser [11] および Kahn [14] の結果より直ちに従う (系 3.8). 系 2.3 (1) は Soulé の結果 [22, Théorèm 3] と次の定理から従う:

定理 2.4 (Colliot-Thélène−Sansuc−Soulé [5])**.** 有限体上幾何的に連結な非特異射影多様体 X に対して, $\mathrm{CH}^2(X)$ のねじれ元のなす部分群 $\mathrm{CH}^2(X)_{\mathrm{tor}}$ は有限である.

系 2.3 (2) は (1) および次の高次 Chow 群から代数的 K-理論へのスペクトル系列 [10] から従う:

$$E_2^{p,q} = \mathrm{CH}^{-q}(X, -p-q) \Longrightarrow K_{-p-q}(X).$$

§ 3. 主結果の証明

定理 2.1 の証明の概略を与える. §3.1 で証明の鍵となる補題について述べ, §3.2 で補題を用いた証明の概略を述べる. §3.3 ではサイクル写像の行き先である ℓ 進エタールコホモロジーの次元を計算する.

§ 3.1. 補題

ここでは, ℓ 進エタールコホモロジーに作用する Frobenius の固有値に関する補題について述べる.

k を有限体 $\mathbb{F}_q$ とする. k 上の多様体 X_m^r について考える. $F \in G_k$ を幾何的 Frobenius とする. 本稿において, $H^i(\overline{X_m^r}, \mathbb{Q}_\ell)$ に作用する F の固有値 α を, X_m^r/k に対する重さ i の *Weil number* と呼ぶ. Deligne の定理 (Weil 予想) [6] により, α は代数的整数であり, すべての埋め込み $\sigma : \mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して, 複素絶対値 $|\sigma\alpha|$ は $q^{i/2}$ である. 任意の $i \neq r$, $0 \leq i \leq 2r$ に対して,

$$H^i(\overline{X_m^r}, \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} 0 & i: \text{奇数} \\ \mathbb{Q}_\ell(-i) & i: \text{偶数} \end{cases} \tag{3.1}$$

が成り立つ．この事実については, [12, Expose VII, Corollaire 7.5.] を参照せよ．i が偶数 $(\neq r)$ のとき, $H^i(\overline{X^r_m}, \mathbb{Q}_\ell)$ は代数的サイクルのクラスによって生成される, すなわち, Tate 予想が成り立つ．(3.1) より, X^r_m/k に対する重さ $i \neq r$ の Weil number は $q^{i/2}$ であり, 重さが奇数 $i \neq r$ のものはないことがわかる．

一方, X^r_m/k に対する重さ r の Weil number については, Weil [29] による Jacobi 和 (cf. 記号 (5)) を用いた記述がある: $q = p^f$ は $q \equiv 1 \mod m$ となる最小の p の冪とする．χ を $k^\times$ の位数 m の指標とする．このとき, X^r_m/k に対する重さ r の Weil number α に対して, ある $\gamma \in \mathfrak{D}_{m,r}$ (cf. 記号 (5)) が存在して,

$$\alpha = \bar{\chi}(a_0)^{\gamma_0} \cdots \bar{\chi}(a_{r+1})^{\gamma_{r+1}} j(\gamma)$$

が成り立つ．

逆に, 任意の $\gamma \in \mathfrak{D}_{m,r}$ に対して, $\bar{\chi}(a_0)^{\gamma_0} \cdots \bar{\chi}(a_{r+1})^{\gamma_{r+1}} j(\gamma)$ は X^r_m/k に対する重さ r の Weil number である．

上記の Weil の結果を用いることで, 次の補題 3.1 が証明できる．さらに, Jacobi 和の性質を用いることで補題 3.2 が従う．これらの補題の証明は省略する．

補題 3.1 ([24, Lemma 2.1])**.** α を X^r_m/k に対する重さ r の Weil number とする．このとき, 整数 $e > 0$ が存在して, α^e は $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ に含まれる．ここで, ζ_m は 1 の原始 m 乗根である．

補題 3.2 (Shioda-Katsura [19, Lemma 3.1.])**.** f を p の $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ における剰余次数とする．α を $X^r_m/\mathbb{F}_{p^f}$ に対する重さ r の Weil number とする．このとき, 以下は同値である:

(i) α のある冪は p の冪である;

(ii) α の付値 $v_\mathfrak{p}(\alpha)$ は, $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の p を割る素点 $\mathfrak{p}$ によらず, $\frac{fr}{2}$ に等しい．

次の補題が定理 2.1(1)(a) の証明の鍵となる:

補題 3.3. $m_1, m_2, \ldots, m_{2i}$ を p と素な正の整数とする．α_j を $X^1_{m_j}/k$ に対する重さ 1 の Weil number とする．各 $1 \leq j \leq 2i$ に対して, 高々一つ $j' \neq j$ が存在し, $\gcd(m_j, m_{j'}) > 2$ が成り立つと仮定する．このとき, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2i} = q^i$ であれば, 必要があれば α_j の番号を付け替えて, 整数 N が存在し,

$$(\alpha_1\alpha_2)^N = \cdots = (\alpha_{2i-1}\alpha_{2i})^N = q^N$$

が成り立つ．

Proof. 仮定より, 必要があれば m_j の番号を付け替えることで, 次をみたすような組 $(m_1, m_2), \ldots, (m_{2i-1}, m_{2i})$ を得る:

$$(*) \quad \gcd(\operatorname{lcm}(m_{2j-1}, m_{2j}), \operatorname{lcm}(m_{2j'-1}, m_{2j'})) \leq 2 \quad \text{for all} \quad j \neq j'.$$

$1 \le j \le i$ に対して, $L_j := \mathrm{lcm}(m_{2j-1}, m_{2j})$ とおく．等式 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2i} = q^i$ と補題 3.1 より, 正の整数 M が存在し,

$$(\alpha_1\alpha_2)^M = q^{Mi}(\alpha_3 \cdots \alpha_{2i})^{-M} \in \mathbb{Q}(\zeta_{L_1}) \cap \mathbb{Q}(\{\zeta_{L_j}, j \neq 1\})$$

が成り立つ．さらに次が成り立つ:

$$\mathbb{Q}(\zeta_{L_1}) \cap \mathbb{Q}(\{\zeta_{L_j}, j \neq 1\}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{L_1}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_L) = \mathbb{Q}$$

ここで, $L = \mathrm{lcm}(L_j, j \neq 1)$. 従って, $(\alpha_1\alpha_2)^M$ は $\mathbb{Q}$ に含まれ, α が重さ 1 の Weil number であることから, $(\alpha_1\alpha_2)^{2M} = |(\alpha_1\alpha_2)^M|^2 = q^{2M}$ を得る．同様の議論により, $(\alpha_{2i-1}\alpha_{2i})^{2M} = q^{2M}$ を $2 \le i \le d$ に対して得る． □

次の補題は定理 2.1 の (1)(b) および (2) の証明の鍵となる．

補題 3.4. $m_1, \ldots, m_d$ を p と素な正の整数とする．$r_1, \ldots, r_d$ を正の奇数とする．$j = 1, \ldots, d$ に対して, α_j を $X_{m_j}^{r_j}/k$ に対する重さ i_j の Weil number とする．整数 j_0 が存在し, 次をみたすと仮定する:

(1) $\gcd(m_{j_0}, m_j) \le 2$（$j \neq j_0$）,

(2) $i_{j_0} = r_{j_0}$,

(3) 群 $(\mathbb{Z}/m_{j_0})^\times$ において, p の位数は奇数である．

このとき, 積 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_d$ は $\mathbb{Q}$ に含まれない．

Proof. $j_0 = 1$ と仮定してよい．積 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_d$ が $\mathbb{Q}$ に含まれると仮定する．補題 3.3 の証明と同様の議論により, α_1 のある冪が p の冪となることがわかる．

一方, 初等的な線形代数により, α_1 のある冪は $X_{m_1}^{r_1}/\mathbb{F}_{p^f}$ に対する重さ r_1 の Weil number α の冪であることがわかる．ここで, f は p の $(\mathbb{Z}/m_1)^\times$ における位数であり, 仮定 (3) より奇数である．$\frac{fr_1}{2}$ は整数でないから, $\mathbb{Q}(\zeta_{m_1})$ の p を割る素点 $\mathfrak{p}$ に対して, 付値 $v_\mathfrak{p}(\alpha)$ は $\frac{fr_1}{2}$ と一致しない．補題 3.2 より, α のどんな冪も p 冪とならない．それゆえ α_1 も p 冪とならない．これは矛盾である． □

上と同様の議論により, 定理 2.1(3) の証明の鍵である次の補題を得る．

補題 3.5. $m_1, \ldots, m_d$ を p と素な正の整数とする．$r_1, \ldots, r_d$ を正の整数とする．$j \neq j'$ に対して, $\gcd(m_j, m_{j'}) \le 2$ と仮定する．$j = 1, \ldots, d$ に対して, α_j を $X_{m_j}^{2r_j}/k$ に対する重さ $2r_j$ の Weil number とする．$r := r_1 + \cdots + r_d$ とおく．$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_d = q^r$ のとき, 整数 N が存在して,

$$\alpha_1^N = q^{Nr_1}, \cdots, \alpha_d^N = q^{Nr_d}$$

が成り立つ．

§ 3.2. 証明の概略

ここでは, §3.1 の X^r_m/k に対する Weil number に関する補題を用いて, 定理 2.1(1)–(3) の証明の概略を与える. (4) の証明は省略する. 証明の詳細は [24] 参照.

Tate 予想の主張は Chow モチーフに対して定式化でき, それにより議論を簡潔にすることができる. Chow モチーフの定義や基本的な性質は [22] 参照. Soulé [22] や Spiess [23] は曲線の積に対する Tate 予想について Chow モチーフを用いて議論している. 以下で述べる定理 2.1 の証明では, Spiess の議論と同様の議論を用いる.

補題 3.6. X を k 上の非特異射影多様体とし, L/k を有限次拡大とする. このとき, $\boldsymbol{T}(X\times_k L/L,i)$ は $\boldsymbol{T}(X/k,i)$ を導く.

この補題の証明は [23, Lemma 1] 参照. この補題により, Tate 予想を証明する際, 基礎体を必要に応じて大きな有限次拡大で置き換えてよいことになる.

定理 2.1 (1) の証明. (a) Chow モチーフの分解 $\widetilde{X^1_m}=1\oplus X^+_m\oplus\mathbb{L}$ ([22] 参照) を用いることで, 示すべきは $\boldsymbol{T}(X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_s}/k,i)$ がすべての s と i に対して成り立つことに帰着される. Soulé は $s\neq 2i$ に対して, $H^{2i}(X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_s},\mathbb{Q}_\ell(i))=0$ を示している. 従って, $s=2i$ としてよい. このとき, 次が成り立つ:

$$H^{2i}(\overline{X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_s}},\mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}\simeq\bigl(H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_{2i}\bigr)^{F=q^i}.$$

ここで, $H_s=H^1(\overline{X^1_{m_s}},\mathbb{Q}_\ell)$ であり, $F\in G_k$ は幾何的 Frobenius である.

$\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間 $\bigl(H_1\otimes H_{,2}\otimes\cdots\otimes H_{2i}\bigr)^{F=q^i}$ の基底は, 組 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2i})$ であって, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2i}=q^i$ を満たすものと対応する. ここで, α_s は $X^1_{m_s}/k$ に対する重さ 1 の Weil number である.

定理の仮定と補題 3.3 により, 正の整数 N が存在して, 上記のようなすべての組 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2i})$ に対して, 必要ならば番号を付け替えることによって, 次を得る:

$$(\alpha_1\alpha_2)^N=\cdots=(\alpha_{2i-1}\alpha_{2i})^N=q^N.$$

この等式から, 全射

$$\bigoplus_\sigma\bigotimes_{j=1}^{i}H^2(\overline{X^+_{m_{\sigma(2j-1)}}\otimes X^+_{m_{\sigma(2j)}}},\mathbb{Q}_\ell(1))^{G_L}\longrightarrow H^{2i}(\overline{X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_{2i}}},\mathbb{Q}_\ell(i))^{G_L}$$

を得る. ここで, σ は $\{1,2,\ldots,2i\}$ の置換すべてをわたり, L は k の N 次の拡大体である.

補題 3.6, Tate 予想 $\boldsymbol{T}(X^1_m\times X^1_{m'}\times_k L/L,1)$(これは正しい) および次の可換図式よ

り, 定理の主張が従う:

$$\begin{CD}
\bigoplus_{\sigma}\bigotimes_{j=1}^{i}\mathrm{CH}^1(X^+_{m_{\sigma(2j-1)}}\otimes X^+_{m_{\sigma(2j)}}\otimes L)\otimes\mathbb{Q}_\ell @>>> \bigoplus_{\sigma}\bigotimes_{j=1}^{i} H^2(\overline{X^+_{m_{\sigma(2j-1)}}\otimes X^+_{m_{\sigma(2j)}}},\mathbb{Q}_\ell(1))^{G_L}\\
@VVV @VVV\\
\mathrm{CH}^i(X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_{2i}}\otimes L)\otimes\mathbb{Q}_\ell @>>> H^{2i}(\overline{X^+_{m_1}\otimes X^+_{m_2}\otimes\cdots\otimes X^+_{m_{2i}}},\mathbb{Q}_\ell(i))^{G_L}.
\end{CD}$$

(b) の証明の証明は省略する. □

定理 2.1 (2) の証明の概略. i を $0\le i\le r$ なる整数とする（$r=r_1+\cdots+r_d$）. Künneth 公式から,

$$H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}\simeq\bigoplus_{i_1+\cdots+i_d=2i}W(i_1,\ldots,i_d)$$

を得る. ここで,

$$W(i_1,\ldots,i_d):=\left(H^{i_1}(\overline{X^{r_1}_{m_1}},\mathbb{Q}_\ell)\otimes\cdots\otimes H^{i_d}(\overline{X^{r_d}_{m_d}},\mathbb{Q}_\ell)\right)^{F=q^i}.$$

(3.1) および定理の仮定と補題 3.4 から, ある j に対して i_j が奇数であるとき, $W(i_1,\ldots,i_d)=0$.

すべての i_j が偶数である場合は, (3.1) より, 次の同型を得る:

$$\bigotimes_{j=1}^{d}H^{i_j}(\overline{X^{r_j}_{m_j}},\mathbb{Q}_\ell(i_j/2))^{G_k}\simeq W(i_1,\ldots,i_d).$$

r が奇数のとき, X^r_m に対する Tate 予想は正しいことが知られている. それゆえ, 主張は定理 2.1 (1) の証明と同様の可換図式から従う. □

定理 2.1 (3) の証明の概略. i を $0\le i\le r$ なる整数とする ($r=r_1+\cdots+r_d$). Künneth 公式と (3.1) より,

$$H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}\simeq\bigoplus_{i_1+\cdots+i_d=i}V(i_1,\ldots,i_d)^{G_k},$$

ここで,

$$V(i_1,\ldots,i_d):=\left(H^{2i_1}(\overline{X^{r_1}_{m_1}},\mathbb{Q}_\ell(i_1))\otimes\cdots\otimes H^{2i_d}(\overline{X^{r_d}_{m_d}},\mathbb{Q}_\ell(i_d))\right).$$

$V(i_1,\ldots,i_d)^{G_k}$ の基底は, 組 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d)$ であって, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d=q^i$ となるものと対応する (ここで, α_j は $X^{r_j}_{m_j}/k$ に対する重さ $2i_j$ の Weil number である). よって, (1) (a) の証明と同様の議論により, 定理の仮定と補題 3.5 および (3.1) から証明することができる. □

最後に, Soulé [22] の議論を用いて, 定理 2.1 の多様体からある多様体のクラス $\mathcal{A}(k)$ を定義し, 予想 7 が $\mathcal{A}(k)$ に含まれる多様体に対して成り立つことを紹介する.

定義 3.7. 有限体 k に対して, $\mathcal{A}(k)$ を k 上の非特異射影多様体のクラスで以下の性質をみたす最小のものと定義する:

(1) 定理 2.1 の条件をみたす多様体は $\mathcal{A}(k)$ に属する.

(2) X および Y が $\mathcal{A}(k)$ に属する多様体のとき, X と Y の非交和 $X \amalg Y$ は $\mathcal{A}(k)$ に属する.

(3) X が $\mathcal{A}(k)$ に属する多様体, Y は $\dim Y = \dim X$ なる非特異射影多様体とする. ある $n \geq 1$ に対して, Y が $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 係数の Chow モチーフとして X の直和因子であるとき, Y は $\mathcal{A}(k)$ に属する.

(4) X を k 上の非特異射影多様体, k' を k の有限次拡大とする. $X \otimes k'$ が $\mathcal{A}(k')$ に属するとき, X は $\mathcal{A}(k)$ に属する.

(5) X が $\mathcal{A}(k)$ に属する多様体とし, E を X 上のベクトル束とする. このとき, E に付随いた X 上の射影束 $P(E)$ は $\mathcal{A}(k)$ に属する.

(6) X を k 上の非特異射影多様体とし, Y を X の非特異閉部分多様体とする. W を X の Y にそったブローアップとする. このとき, W が $\mathcal{A}(k)$ に属する必要十分条件は X および Y が $\mathcal{A}(k)$ に属することである.

系 3.8. $\mathcal{A}(k)$ に属する多様体 X に対して, 予想 *7* が成り立つ.

証明の概略. Kahn [14] および Geisser [11] の結果より, $\boldsymbol{TB}(X/k, i)$ がすべての i に対して成り立つことを示せばよい (cf. §1).

$\mathcal{A}'(k)$ を Tate-Beilinson 予想をみたす k 上の非特異射影多様体のなすクラスとする. このとき, $\mathcal{A}(k)$ の最小性から, $\mathcal{A}'(k)$ が上記の性質 (1)–(6) をみたすことを示せばよい. (1) は定理 2.1 より従う. 性質 (2)–(6) については Chow モチーフの分解等により示せる. 例えば, (6) については, 分解 $\widetilde{W} \simeq \widetilde{X} \oplus \big(\bigoplus_{j=1}^{c-1} \widetilde{Y} \otimes \mathbb{L}^j\big)$ を用いることで証明される (cf. [22, Théorème 4.]). □

§ 3.3. ℓ 進コホモロジーの次元

定理 2.1 の条件 (2)–(4) のいずれかをみたす多様体 X に対して, $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間 $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}}$ の次元を計算することができる. ここでは, (2) と (3) の場合を紹介する. (4) の場合については [24, §3.1] 参照.

$X = X_{m_1}^{r_1} \times \cdots \times X_{m_d}^{r_d}$ を定理 2.1 (2) の多様体とする. 定理の証明より, 次が成り立つ:

$$H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}} = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_d)\in I(i)} H^{2i_1}(\overline{X_{m_1}^{r_1}}, \mathbb{Q}_\ell(i_1))^{G_{\mathbb{F}_q}} \otimes \cdots \otimes H^{2i_d}(\overline{X_{m_d}^{r_d}}, \mathbb{Q}_\ell(i_d))^{G_{\mathbb{F}_q}}.$$

ただし,

$$I(i) = \{(i_1, \ldots, i_d) \mid i_1 + \cdots + i_d = i \text{ and } 0 \leq i_j \leq \min\{r_j, i\} \text{ for all } j\}.$$

右辺の各直和因子は Lefschetz モチーフからくるものであり, $\mathbb{Q}_\ell$ と同型である (cf. (3.1)). 従って,

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_{\mathbb{F}_q}} = \sharp I(i).$$

次に, $X = X_{m_1}^{r_1} \times \cdots \times X_{m_d}^{r_d}$ を定理 2.1 (3) の多様体とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k} \\ = & \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_d)\in I'(i)} H^{2i_1}(\overline{X_{m_1}^{r_1}}, \mathbb{Q}_\ell(i_1))^{G_k} \otimes \cdots \otimes H^{2i_d}(\overline{X_{m_d}^{r_d}}, \mathbb{Q}_\ell(i_d))^{G_k} \\ & \oplus \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_d)\in I''(i)} H^{2i_1}(\overline{X_{m_1}^{r_1}}, \mathbb{Q}_\ell(i_1))^{G_k} \otimes \cdots \otimes H^{2i_d}(\overline{X_{m_d}^{r_d}}, \mathbb{Q}_\ell(i_d))^{G_k} \end{aligned}$$

ここで,

$$I'(i) = \left\{(i_1, \ldots, i_d) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{d} i_j = i,\ 0 \leq i_j \leq \min\{r_j, i\} \text{ and } 2i_j \neq r_j \text{ for all } j\right\},$$

$$I^{''}(i) = \left\{(i_1, \ldots, i_d) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{d} i_j = i,\ 0 \leq i_j \leq \min\{r_j, i\} \text{ for all } j, \\ 2i_j = r_j \text{ for some } j \end{array}\right\}.$$

右辺の最初の各直和因子は $\mathbb{Q}_\ell$ と同型であり, 次の式を得る:

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k} = \sharp I'(i) + \sum_{(i_1,\ldots,i_{d'})\in I''(i)} \prod_{2i_j = r_j} \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{r_j}(\overline{X_{m_j}^{r_j}}, \mathbb{Q}_\ell(i_j))^{G_k}.$$

さらに, $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{r_j}(\overline{X_{m_j}^{r_j}}, \mathbb{Q}_\ell(r_j/2))^{G_k}$ については以下のような記述が知られている ([21, p. 125] 参照). m を p と素な正の整数とし r を正の整数とする. k の位数を q で表す. 集合 $\mathfrak{D}_{m,r}$ (cf. 記号 (5)) の部分集合 $\mathfrak{B}_{m,r,q}$ を次で定義する:

$$\mathfrak{B}_{m,r,q} = \left\{\gamma \in \mathfrak{D}_{m,r} \mid j(\gamma) = q^{r/2}\right\}.$$

ここで, $j(\gamma)$ は Jacobi 和である (cf. 記号 (5)). このとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^r(\overline{X_m^r}, \mathbb{Q}_\ell(r/2))^{G_k} = 1 + \sharp\mathfrak{B}_{m,r,q}.$$

最後に, 集合 $\mathfrak{B}_{m,r,q}$ の別の記述を与える. まず, いくつか記号を導入する. $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{r+1}) \in \mathfrak{D}_{m,r}$ に対して,

$$\| \gamma \| = \sum_{i=1}^{r+1} \langle \frac{\gamma_i}{m} \rangle - 1$$

と定義する. ただし, $\langle x \rangle$ は $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の分数部分を表す. H を p で生成される $(\mathbb{Z}/m)^\times$ の部分群とし, その位数を f で表す. このとき, 十分大きな q に対して, 集合 $\mathfrak{B}_{m,r,q}$ は次の集合と等しい:

$$\Big\{ \gamma \in \mathfrak{D}_{m,r} \;\Big|\; \sum_{h \in H} \| ht\gamma \| = rf/2, \ {}^\forall t \in (\mathbb{Z}/m)^\times \Big\}.$$

謝辞. 多くの有益なコメントを下さった査読者に感謝致します.

References

[1] H. Bass, Some Problems in "classical" algebraic K-theory, In: "Classical" Algebraic K-Theory, and Connections with Arithmetic, Proc. Conf. , Seattle, Battelle Memorial Inst., 1972, Lecture Notes in Math., **342**, Springer, Berlin (1973) 1–73.

[2] A. A. Beilinson, Height pairings between algebraic cycles, In: Yu. I. Manin (ed.), K-theory, Arithmetic and Geometry, Lecture Notes in Math., **1289**, Springer, Berlin (1987), 1–27.

[3] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. Math., **64** (1986), 267–304

[4] L. Clozel, Equivalence numérique et équivalence cohomologique pour les variétés abéliennes sur les corps finis, Ann. of Math., **150** (1999), 151–163.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J., **50** (1983), 763–801.

[6] P. Deligne, La conjecture de Weil I, Publ. Math. Inst. Hautes Étude Sci., **43** (1974), 273–308.

[7] P. Deligne, J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie and J.-L. Verdier, Cohomologie Étale, Lecture Notes in Math. **569**, Berlin, Springer (1977)

[8] P. Deligne, Equivalence numérique, équivalence cohomologique et théorie de Lefschetz des variétés abéliennes sur les corps finis, Pure Appl. Math. Q., **5**, (2009), 495–506.

[9] W. Fulton, Intersection Theory, 2nd ed., Ergeb. Math. Grenzgeb. 3 Folge, **2**, Springer, Berlin (1998).

[10] E. M. Friedlander and A. Suslin, The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology, Ann. Sci. École Norm. Supér. (4), **35**, (2002), 773–875.

[11] T. Geisser, Tate's conjecture, algebraic cycles and rational K-theory in characteristic p, J. K-theory **13** (1998), 109–122.

[12] A. Grothendieck, Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L, Lecture Notes in Math., **589**, Springer, Berlin (1977).

[13] U. Jannsen, Continuous étale cohomology, Math. Ann., **280** (1988), 207–245.

[14] B. Kahn, Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type Abélien sur un corps fini, Ann. Sci. École. Norm. Supér. (4), **36** (2003), 977–1002.

[15] K. Kato and S. Saito, Unramified class field theory for arithmetic surfaces, Ann. of Math., **118** (1983) 241–274.

[16] S. Kimura, Chow groups are finite dimensional, in some sense, Math. Ann., **331** (2005), 173–201.

[17] S. L. Kleiman, Motives, In: Algebraic geometry, Wolters-Noordhoff, Oslo (1970) 53–82.

[18] J. S. Milne, Étale cohomology, Princeton Univ. Press, Princeton (1980).

[19] T. Shioda and T. Katsura, On Fermat varieties, Tôhoku J. Math., **31** (1979), 97–115.

[20] T. Shioda, The Hodge conjecture and the Tate conjecture for Fermat varieties, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 111–114.

[21] T. Shioda, Some observations on Jacobi sums, Advanced Studies in Pure Math., **12**, North Holland-Kinokuniya (1987), 119–135.

[22] C. Soulé, Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini, Math. Ann., **268** (1984), 317–345.

[23] M. Spiess, Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields, Math. Ann., **314** (1999), 285–290.

[24] R. Sugiyama, Tate conjecture for products of Fermat varieties over finite fields, arXiv:1201.4207.

[25] J. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta-functions, Arithmetical Algebraic Geometry, Harper and Row, New York (1965) 93–110.

[26] J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., **2** (1966), 134–144.

[27] J. Tate, Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology, Proc. Symp. Pure Math. **55.1** (1994), 71–83.

[28] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris (1948)

[29] A. Weil, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 497–508.