

離散 mKdV および離散サイン・ゴールドン方程式による
空間離散曲線の変形

**Deformation of Space Discrete Curves by Discrete mKdV and
Discrete Sine-Gordon Equations**

By

井ノ口 順一 (Jun-ichi INOBUCHI)*
梶原 健司 (Kenji KAJIWARA)**
松浦 望 (NOZOMU MATSUURA)***
太田 泰広 (Yasuhiro OHTA)†

Abstract

In this paper, we consider the discrete deformation of the discrete space curves with constant torsion described by the discrete mKdV or the discrete sine-Gordon equations, and show that it is formulated as the torsion-preserving equidistant deformation on the osculating plane which satisfies the isoperimetric condition. The curve is reconstructed from the deformation data by using the Sym-Tafel formula. The isoperimetric equidistant deformation of the space curves does not preserve the torsion in general. However, it is possible to construct the torsion-preserving deformation by tuning the deformation parameters. Further, it is also possible to make an arbitrary choice of the deformation described by the discrete mKdV equation or by the discrete sine-Gordon equation at each step.

Received November 16, 2013. Revised March 27, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 53A04, 37K25, 37K10, 35Q10, 65D17

Key Words: discrete curve, discrete motion, discrete mKdV equation, discrete sine-Gordon equation, discrete integrable systems, discrete differential geometry

Supported by JSPS KAKENHI No. 22656026, 23340037, 24340029, 24540063, 24540103

*990-8560 山形市小白川町 1-4-12 山形大学理学部数理科学科

Department of Mathematical Sciences, Yamagata University, Yamagata 990-8560, Japan

e-mail: inoguchi@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

**819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan

e-mail: kaji@imi.kyushu-u.ac.jp

***814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1 福岡大学理学部応用数学科

Department of Applied Mathematics, Fukuoka University, Nanakuma 8-19-1, Fukuoka 814-0180, Japan

e-mail: nozomu@fukuoka-u.ac.jp

†657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科

Department of Mathematics, Kobe University, Rokko, Kobe 657-8501, Japan

e-mail: ohta@math.sci.kobe-u.ac.jp

§1. はじめに

微分幾何と可積分系の理論の間には深いつながりがあることはよく知られており、多くの可積分な微分方程式や差分方程式が幾何学的オブジェクトの両立条件として現れる。典型的な例として、チェビシェフ網による径数付けの下でユークリッド空間内の負の定曲率曲面 (K -曲面) がサイン・ゴールドン方程式で記述されることが挙げられる。このようなつながりについての詳細は [26] を参照していただきたい。

連続系の可積分系理論がいろいろの場面で微分幾何学と結びついていることを受けて、その離散的類似を展開すべく 1990 年代の半ばころから離散微分幾何と呼ばれる研究が活発に行われるようになった。この分野の研究課題の一つとして、離散可積分系理論に適合するような幾何学的枠組みを構築することがある。離散微分幾何を研究することの動機は、例えば、可積分系の理論で明らかになったように、離散系のほうが連続系よりも根源的で豊富な数学的構造を持つであろうことへの期待、また、幾何学的オブジェクトの可視化や大変形のシミュレーションを支える理論的基盤の整備が挙げられるだろう。離散微分幾何の文献としては、萌芽的なものはサウエル [27] があり、現代的な問題意識ではポベンコとスリスによる教科書 [2] がある。

さて、空間または平面曲線の変形理論においては、曲線のフルネ枠とその変形は線形偏微分方程式系で記述され、その両立条件として、例えばラムや橋本を始めとする多くの研究者によって提示されたように、modified KdV (mKdV) 方程式や非線形シュレディンガー (NLS) 方程式、およびその階層が自然に現れることが知られている [4, 8, 9, 19, 20, 23]。その後、離散微分幾何の研究の流れを受けて、離散化された曲線の連続変形が多く考察されてきた。例えば平面離散曲線の連続変形は [5, 11, 14, 15, 17]、空間離散曲線の連続変形は [5, 12, 22, 24] などが挙げられ、ここでは mKdV 方程式や NLS 方程式の微分差分類似によって記述される離散曲線の変形が定式化されている。ところが、離散曲線の離散的な変形についてはあまり研究がなされておらず、平面離散曲線については [16, 21] で離散 mKdV 方程式で記述される等周変形が、また、空間離散曲線については [6] で離散サイン・ゴールドン方程式による変形が、さらに [13, 25] では離散 NLS 方程式による変形が議論されている程度である。

本論文の目的は、もっとも基本的な空間曲線の変形である mKdV 方程式による等周変形の離散類似の定式化を提示することである。上で言及した離散曲線の離散変形に関する研究のほとんどは、曲線の変形をフルネ枠、すなわち曲線に付随した接ベクトル、法線ベクトル (および陪法線ベクトル) からなる正規直交枠によって記述している。それはフルネ枠に対するフルネ・セレの公式と変形方程式が可積分系の理論における補助線形問題に他ならないからである。しかし本来、曲線の変形は曲線の位置ベクトルそのものの変形を記述するべきである。それにはフルネ枠に対する変形方程式を一度「積分」する必要があるが、その手続きは、特に離散曲線の離散変形については非自明であって、ほとんど実行されていない。[16, 21] においては平面離散曲線の離散 mKdV 方程式で記述される離散変形が、曲線の等周変形として定式化された。本論文では振率一定の空間離散曲線に対する、振率保存かつ等周変形が離散 mKdV 方程式および離散サイン・ゴールドン方

程式で記述されることを示す。さらに、各ステップ毎にどちらによる変形かを任意に選択することも可能である。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では本論文で頻繁に用いられる $SO(3)$ - $SU(2)$ 対応とそれらのリー環 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ の対応について、記号の導入と読者の便宜を兼ねてまとめておく。第3章では、空間離散曲線とそのフルネ枠を導入し、フルネ枠の満たす離散フルネ・セレの公式と、シム・タフェルの公式によるフルネ枠からの曲線の再構成について述べる。第4章では本論文の主結果である振率一定の空間離散曲線に対する振率保存等周変形を提示し、第5章では主結果の証明を与える。

§2. $SO(3)$ – $SU(2)$ 対応

\mathbb{R}^3 内の曲線の正規直交枠は $SO(3)$ の行列となるが、これをしばしば $SU(2)$ の行列に変換したり、その逆の変換を行った上で議論することがある。本章ではその変換の方法についてまとめておく [26]。まず $\mathfrak{su}(2)$ の基底を

$$(2.1) \quad e_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と選ぶ。 e_i ($i = 1, 2, 3$) は交換関係

$$(2.2) \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

を満たしている。

Proposition 2.1 ($\mathfrak{su}(2) - \mathbb{R}^3$ 対応). 線型写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ を $x = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(2.3) \quad f(x) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

と定める。このとき、 f は $\mathfrak{su}(2)$ と \mathbb{R}^3 のベクトル空間としての同型写像を与える。また、 $\mathfrak{su}(2)$ における内積と外積を、勝手な $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ に対して

$$(2.4) \quad \langle X, Y \rangle = -2 \operatorname{tr}(XY), \quad X \times Y = [X, Y]$$

と定めれば、 $\mathfrak{su}(2)$ は計量ベクトル空間として \mathbb{R}^3 と同型である。

Proof. 前半は定義より明らかである。後半について、すべての $x, y \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(2.5) \quad f(x)f(y) + f(y)f(x) = -\frac{\langle x, y \rangle}{2} I,$$

$$(2.6) \quad f(x)f(y) - f(y)f(x) = f(x \times y)$$

が成り立つことが直接計算によってわかる。ただし I は単位行列、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準的なユークリッド内積、 \times は外積である。したがって $\mathfrak{su}(2)$ の内積と外積を (2.4) で定めれば、向きの指定された計量ベクトル空間として \mathbb{R}^3 と同型となる。 \square

次に、 $SO(3)$ と $SU(2)$ の間に以下のような対応が成り立つ。

Proposition 2.2 (SU(2) – SO(3) 対応).

(1) 各 $\phi \in \text{SU}(2)$ に対して

$$(2.7) \quad \phi f(x) \phi^{-1} = f(\Phi x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

により行列 Φ を定めると, $\Phi \in \text{SO}(3)$ である.

(2) 行列 $\phi \in \text{SU}(2)$ を

$$(2.8) \quad \phi = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

と表示すると (ただし $*$ は複素共役), (1) で定義された $\Phi \in \text{SO}(3)$ は次のように表される.

$$(2.9) \quad \Phi = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\Re(\alpha\beta^*) & -2\Im(\alpha\beta^*) \\ -2\Re(\alpha\beta) & \Re(\alpha^2 - \beta^2) & -\Im(\alpha^2 + \beta^2) \\ -2\Im(\alpha\beta) & \Im(\alpha^2 - \beta^2) & \Re(\alpha^2 + \beta^2) \end{bmatrix}.$$

(3) 逆に, $\Phi = [\Phi_{ij}] \in \text{SO}(3)$ を与えると, 対応する $\phi \in \text{SU}(2)$ は符号を除いて次のように定まる.

$$(2.10) \quad \phi = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr } \Phi}} \begin{bmatrix} 1 + \text{tr } \Phi + \sqrt{-1}(\Phi_{32} - \Phi_{23}) \\ \Phi_{12} - \Phi_{21} + \sqrt{-1}(\Phi_{13} - \Phi_{31}) \end{bmatrix}.$$

Proof. (1): (2.7) により行列 Φ を定めると (2.5) より

$$|\Phi x|^2 I = -4(f(\Phi x))^2 = -4\phi(f(x))^2 \phi^{-1} = |x|^2 I$$

が成り立つから Φ は直交行列である. さらに, 次のような考察で $\Phi \in \text{SO}(3)$ となることもわかる. すなわち, (2.4) より $e_1 \times e_2 = e_3$ および $(\phi e_1 \phi^{-1}) \times (\phi e_2 \phi^{-1}) = \phi e_3 \phi^{-1}$, $\phi \in \text{SU}(2)$ が成り立つ. $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]$ とおくと, (2.7) より $f(\Phi_1) \times f(\Phi_2) = f(\Phi_3)$, (2.4) より左辺は $[f(\Phi_1), f(\Phi_2)] = f(\Phi_3)$ と書き直され, さらに (2.6) より $f(\Phi_1 \times \Phi_2) = f(\Phi_3)$ となる. f が全単射であることに注意すると, $\det \Phi = \langle \Phi_1 \times \Phi_2, \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_3, \Phi_3 \rangle = 1$ が従う.

(2): (2.8) を (2.7) の左辺に代入して両辺を比較することで直接検証することができる.

(3): $\Phi = [\Phi_{ij}]$ と書けば, (2.9) より

$$\frac{\Phi_{22} + \sqrt{-1}\Phi_{32}}{1 - \Phi_{12}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^* - \beta^*}, \quad \frac{\Phi_{23} + \sqrt{-1}\Phi_{33}}{1 - \Phi_{13}} = \sqrt{-1} \frac{\alpha - \sqrt{-1}\beta}{\alpha^* - \sqrt{-1}\beta^*}$$

が成り立つことがわかり, これを解いて (2.10) が得られる. □

リー環 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{so}(3)$ の間には, Proposition 2.2 で与えられたリー群 $\text{SU}(2)$ と $\text{SO}(3)$ の対応関係と整合的な同型対応が存在する.

Proposition 2.3 ($\mathfrak{su}(2) - \mathfrak{so}(3)$ 対応). $\mathfrak{so}(3)$ の基底 E_i ($i = 1, 2, 3$) を

$$(2.11) \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする. このとき, 対応 $e_i \leftrightarrow E_i$ ($i = 1, 2, 3$) によって $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{so}(3)$ は同型となる.

Proof. $\phi \in \mathrm{SU}(2)$ に対して $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \in \mathrm{SO}(3)$ を Proposition 2.2 の対応関係で得られる行列とする. ϕ の微分を $\phi' = \phi \sum_{i=1}^3 X_i e_i$ と書いたとき, $\Phi' = \Phi \sum_{i=1}^3 X_i E_i$ となることを示せばよい. (2.7) で $x = {}^t[1, 0, 0]$, $f(x) = e_1$ と選ぶと, $\Phi_1 = f^{-1}(\phi e_1 \phi^{-1})$. 両辺微分して交換関係 (2.2) を用い, さらに (2.7) に注意すると

$$\Phi'_1 = f^{-1}(\phi(X_2[e_2, e_1] + X_3[e_3, e_1])\phi^{-1}) = \Phi(-X_2 f^{-1}(e_3) + X_3 f^{-1}(e_2))$$

を得る. これより

$$\Phi^{-1} \Phi'_1 = -X_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

これで Φ' の第 1 列がわかったことになるが, 他の列も $x = {}^t[0, 1, 0]$, $f(x) = e_2$, さらに $x = {}^t[0, 0, 1]$, $f(x) = e_3$ と選ぶことで計算でき, それぞれ

$$\Phi^{-1} \Phi'_2 = X_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi^{-1} \Phi'_3 = -X_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. これからただちに

$$\Phi' = \Phi \sum_{i=1}^3 X_i E_i$$

が得られる. □

§ 3. 空間離散曲線

本章では空間離散曲線とそのフルネ枠を導入し, フルネ・セレの公式とシム・タフェルの公式について議論する.

Definition 3.1 ([7, 27]).

- (1) 写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ に対し, すべての整数 n についてどの連続する 3 点 $\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ も同一直線上にないとき, γ を空間離散曲線という.

(2) 空間離散曲線 γ に対して

$$(3.1) \quad \epsilon_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$$

とおき

$$(3.2) \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\epsilon_n}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}$$

と定め、それぞれ接ベクトル、主法線ベクトル、および陪法線ベクトルと呼ぶ。また、行列値関数 $\Phi = [T, N, B] : \mathbb{Z} \rightarrow \text{SO}(3)$ を γ のフルネ枠と呼ぶ。

定義より、フルネ枠 $\Phi_n = [T_n, N_n, B_n]$ は次の差分方程式をみたすことがただちにわかる。

$$(3.3) \quad \Phi_{n+1} = \Phi_n R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1}).$$

ただし R_1, R_3 は回転行列

$$(3.4) \quad R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、 $\kappa : \mathbb{Z} \rightarrow (0, \pi)$ と $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$ はつぎの式で定義される角度である。

$$(3.5) \quad \langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos \kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \nu_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \nu_n.$$

(3.3)–(3.5) を連続曲線と同様にフルネ・セレの公式と呼ぶ。

フルネ枠 Φ を Proposition 2.2 にしたがって $\text{SU}(2)$ 値の関数 ϕ に変換すると、 ϕ は

$$(3.6) \quad \phi_{n+1} = \phi_n L_n,$$

$$(3.7) \quad L_n = \pm \begin{bmatrix} e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}\nu_{n+1}} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} & -e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}\nu_{n+1}} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\nu_{n+1}} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} & e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\nu_{n+1}} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} \end{bmatrix}$$

をみたす。

Definition 3.2. 関数

$$(3.8) \quad \lambda_n = \frac{\sin \nu_{n+1}}{\epsilon_n}$$

を空間離散曲線の振率と呼ぶ。

以後、振率が一定値

$$(3.9) \quad \lambda_n = \lambda$$

の曲線を考えることにする。このとき、次の命題が成り立つ。

Proposition 3.3 (シム・タフェルの公式 [28]). 実数 λ と関数 $\nu_n \in [-\pi, \pi)$, $\kappa_n \in (0, \pi)$ に対して, 差分方程式 (3.6)–(3.9) の解を $\phi_n \in \text{SU}(2)$ とする. このとき f を (2.3) で定義されている同型写像とし,

$$(3.10) \quad \gamma_n = f^{-1}(S_n), \quad S_n = -\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_n\right) \phi_n^{-1}$$

とおくと, γ はフルネ・セレの公式 (3.3)–(3.5) をみたす. すなわち, γ は隣接する γ_n, γ_{n+1} 間の距離が ϵ_n であるような定振率 λ の空間離散曲線であり, その隣接する接ベクトル T_{n-1}, T_n のなす角は κ_n , 隣接する陪法線ベクトル B_{n-1}, B_n のなす角は ν_n となる.

Proof. S の差分は (3.7)–(3.10) より $S_{n+1} - S_n = -\phi_n(L_n)_\lambda L_n^{-1} \phi_n^{-1} = \epsilon_n \phi_n e_1 \phi_n^{-1}$ となるから

$$(3.11) \quad T_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{\epsilon_n} = \phi_n e_1 \phi_n^{-1}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \phi_{n+1} e_1 \phi_{n+1}^{-1} = \phi_n L_n e_1 L_n^{-1} \phi_n^{-1} \\ &= \cos \kappa_{n+1} T_n + \cos \nu_{n+1} \sin \kappa_{n+1} \phi_n e_2 \phi_n^{-1} - \sin \nu_{n+1} \sin \kappa_{n+1} \phi_n e_3 \phi_n^{-1} \end{aligned}$$

となるから

$$(3.12) \quad N_n = \phi_n e_2 \phi_n^{-1}, \quad B_n = \phi_n e_3 \phi_n^{-1}$$

とおく. さらに N_{n+1}, B_{n+1} も同様の計算で

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= -\sin \kappa_{n+1} T_n + \cos \nu_{n+1} \cos \kappa_{n+1} N_n - \sin \nu_{n+1} \cos \kappa_{n+1} B_n, \\ B_{n+1} &= \sin \nu_{n+1} N_n + \cos \nu_{n+1} B_n, \end{aligned}$$

となるので, 組 $[T_n, N_n, B_n]$ はフルネ・セレの公式を満たす. □

なお, 後の記号の便利のために

$$(3.13) \quad a_n = \left(1 + \tan^2 \frac{\nu_{n+1}}{2}\right) \epsilon_n$$

とおく. すると,

$$(3.14) \quad \epsilon_n = \frac{a_n}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}},$$

$$(3.15) \quad \nu_{n+1} = 2 \arctan \frac{a_n \lambda}{2}$$

が成り立つ.

§ 4. 空間離散曲線の離散的等周変形

本章では空間離散曲線 γ の離散的な等周変形を議論する. 変形された曲線を $\bar{\gamma}$ とし, $\bar{\gamma}$ に付随するフルネ枠や振率などのデータには $\bar{\quad}$ をつけて表すこととする. 例えば γ に付随する $\epsilon_n, \nu_n, \kappa_n, \lambda_n, a_n$ に対して, $\bar{\gamma}$ の対応するデータをそれぞれ $\bar{\epsilon}_n, \bar{\nu}_n, \bar{\kappa}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{a}_n$ と記す. いま, 空間離散曲線 γ の振率は一定, すなわち

$$(4.1) \quad \frac{2}{a_n} \tan \frac{\nu_{n+1}}{2} = \lambda \quad (\text{定数})$$

とする. このとき, 次の命題が成り立つ.

Proposition 4.1. 定振率の空間離散曲線 γ に対して, 新しい空間離散曲線 $\bar{\gamma}$ を

$$(4.2) \quad \bar{\gamma}_n = \gamma_n + \delta (\cos w_n T_n + \sin w_n N_n),$$

$$(4.3) \quad \delta = \frac{b}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}},$$

$$(4.4) \quad w_{n+1} = -\kappa_{n+1} + 2 \arctan \frac{b + a_n}{b - a_n} \tan \frac{w_n}{2}$$

によって定める. ただし, 定数 b と w_0 は $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})$ が全ての n について定符号であるように取るものとする. このとき, 次のことが成り立つ.

(1) (等周性) $\bar{\gamma}$ は

$$(4.5) \quad \bar{\epsilon}_n = |\bar{\gamma}_{n+1} - \bar{\gamma}_n| = |\gamma_{n+1} - \gamma_n| = \epsilon_n$$

をみたし, したがって (4.2) で定義される変形 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ は等周変形である.

(2) (振率保存性) 次のことが成り立つ.

$$(4.6) \quad \bar{\nu}_n = \nu_n.$$

したがって (1) と合わせて $\bar{a}_n = a_n$ が成り立ち, かつ $\bar{\gamma}$ の振率 $\bar{\lambda}_n = \frac{\sin \bar{\nu}_{n+1}}{\bar{\epsilon}_n}$ は n について定数で, その値は λ に等しい. すなわち変形 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ は振率を保つ.

(3) (フルネ枠の変形) 空間離散曲線 $\bar{\gamma}$ のフルネ枠 $\bar{\Phi} = [\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}]$ は次のいずれかをみたす. $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) > 0$ のとき

$$(4.7) \quad \bar{\Phi}_n = \Phi_n R_3(w_n) R_1(\mu) R_3(w_{n+1} + \kappa_{n+1}), \quad \mu = -2 \arctan \frac{b\lambda}{2},$$

または $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) < 0$ のとき

$$(4.8) \quad \bar{\Phi}_n = \Phi_n R_3(w_n) R_1(\mu) R_3(-w_{n+1} - \kappa_{n+1}), \quad \mu = 2 \arctan \frac{2}{b\lambda}.$$

Proposition 4.1 の証明は次節で行う．なお， γ から $\bar{\gamma}$ を得る手続きは次のように述べることもできる (Figure 1)．(1) γ の任意の一点，例えば γ_0 を T_0 と N_0 (もしくは T_{-1} と T_0) の張る平面 (接触平面) 上の勝手な点 $\bar{\gamma}_0$ に移動し，移動した距離を δ とする．ただし， δ は γ の振率 λ に対して $0 < \delta < 1/\lambda$ となるようにする．(2) δ を半径とする円周を各点の接触平面に描く．(3) 他の点は次の 3 条件をみたす位置に動かす．(a) 円周上にある (等距離条件) (b) 弧長を保つ (等周条件) (c) 接触平面の下半平面 (T に関して N と反対側) にある．さらに， $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})$ が全ての n について定符号であるという条件

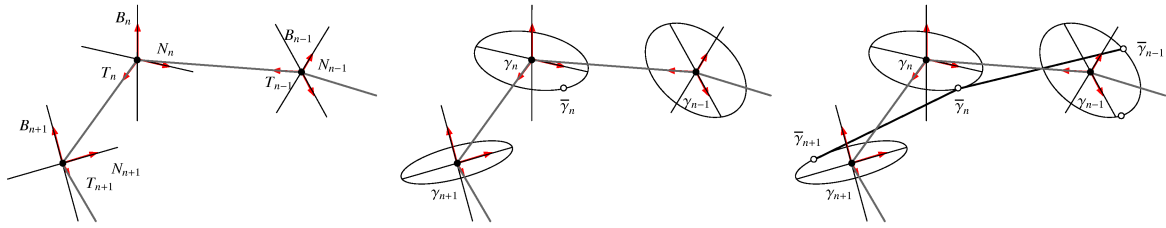


Figure 1. 曲線の変形．左：離散曲線とフルネ枠，中：ステップ (1),(2)，右：ステップ (3)

は，全ての n について \bar{B}_n が $\bar{\gamma}_n - \gamma_n$ と B_n の張る平面に関して同じ向きであることと等価であり (Figure 2)，これが変形が振率保存であるための必要十分条件となっている．これについては 5.1.2 節で議論する．

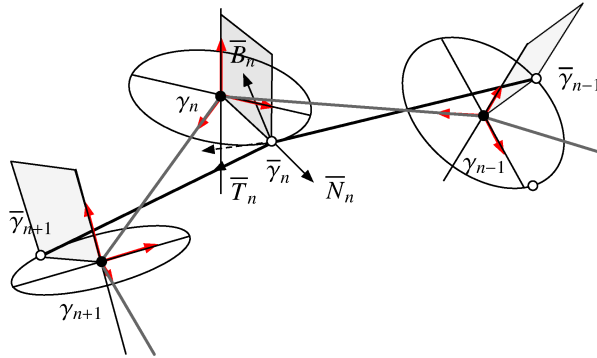


Figure 2. 振率保存の必要十分条件． \bar{B} が $\bar{\gamma} - \gamma$ と B の張る平面 (灰色の平面) に対して同じ向きになければならない．

Proposition 4.1 の構成を繰り返すと，定振率な空間離散曲線の列 $\gamma^0 = \gamma, \gamma^1 = \bar{\gamma}, \gamma^2 = \overline{\gamma^1}, \dots, \gamma^m = \overline{\gamma^{m-1}}, \dots$ ができる．それに対応して離散曲線に付随するデータ κ, T, N, B をそれぞれ κ^m, T^m, N^m, B^m とし，また変形のデータ δ, b, μ もそれぞれ δ_m, b_m, μ_m とする．次の定理は Proposition 4.1 を繰り返し適用することでただちに得られる．

Theorem 4.2. γ^0 を定振率 λ の空間離散曲線とし, 空間離散曲線の列 γ^m を

$$(4.9) \quad \gamma_n^{m+1} = \gamma_n^m + \delta_m (\cos w_n^m T_n^m + \sin w_n^m N_n^m),$$

$$(4.10) \quad \delta_m = \frac{b_m}{1 + \frac{b_m^2 \lambda^2}{4}},$$

$$(4.11) \quad w_{n+1}^m = -\kappa_{n+1}^m + 2 \arctan \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{w_n^m}{2}$$

によって定める. ただし, a_n は初期曲線 γ^0 のデータ ϵ, ν から (3.13) で定められる数列である. また, 数列 b_m と初期値の列 w_0^m は $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m)$ が全ての n について定符号であるように取るものとする. このとき, 以下のことが成り立つ.

(1) (等周性・振率保存性) すべての m について γ^m は

$$(4.12) \quad |\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = \epsilon_n$$

をみたし, γ^m の振率は λ である. すなわち (4.9) は振率を保存する等周変形である.

(2) (フルネ枠の変形) フルネ枠 $\Phi_n^m = [T_n^m, N_n^m, B_n^m]$ は

$$(4.13) \quad \Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m, \quad \Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m$$

をみたす. ただし

$$(4.14) \quad L_n^m = R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1}^m), \quad \nu_{n+1} = 2 \arctan \frac{a_n \lambda}{2}$$

であり, 各 m について M_n^m は次のいずれかで与えられる. $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) > 0$ のとき

$$(4.15) \quad M_n^m = R_3(w_n^m) R_1(\mu_m) R_3(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m), \quad \mu_m = -2 \arctan \frac{b_m \lambda}{2}$$

または $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) < 0$ のとき

$$(4.16) \quad M_n^m = R_3(w_n^m) R_1(\mu_m) R_3(-w_{n+1}^m - \kappa_{n+1}^m), \quad \mu_m = 2 \arctan \frac{2}{b_m \lambda}.$$

行列 M を (4.15) と選ぶと, L, M は離散 mKdV 方程式のラックス行列である. すなわち, Φ_n^m についての差分方程式系 (4.13) の両立条件 $L_n^m M_{n+1}^m = M_n^m L_n^{m+1}$ より

$$(4.17) \quad w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = \kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m$$

が得られ, これと (4.11) から離散 mKdV 方程式

$$(4.18) \quad \frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} - \frac{w_n^m}{2} = \arctan \left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{w_n^{m+1}}{2} \right) - \arctan \left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{w_{n+1}^m}{2} \right)$$

が従う。また、行列 M を (4.16) と選ぶと、 L, M は離散サイン・ゴールドン方程式のラックス行列となる。すなわち、(4.13) の両立条件より

$$(4.19) \quad w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = -\kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m$$

が得られ、これと (4.11) から離散サイン・ゴールドン方程式

$$(4.20) \quad \frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} + \frac{w_n^m}{2} = \arctan\left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{w_n^{m+1}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{w_{n+1}^m}{2}\right)$$

が従う。

Remark 4.3.

- (1) (4.9), (4.10) の形の変形は、[3] において定振率の空間曲線のベックルント変換として得られている。
- (2) 離散サイン・ゴールドン方程式 (4.20) は変数変換

$$(4.21) \quad w_n^m = -\frac{\theta_n^{m+1} + \theta_{n+1}^m}{2}$$

によってよく知られた形 [10]

$$(4.22) \quad \sin \frac{\theta_{n+1}^{m+1} - \theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{4} = \frac{a_n}{b_m} \sin \frac{\theta_{n+1}^{m+1} + \theta_n^{m+1} + \theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{4}$$

に帰着する。

この場合もシム・タフェルの公式によってフルネ枠から離散曲線を再構成することができる。Proposition 2.2 を用いてフルネ枠 $\Phi = [T, N, B] \in \text{SO}(3)$ を $\text{SU}(2)$ 値の函数 ϕ に変換すると、 ϕ は

$$(4.23) \quad \phi_{n+1}^m = \phi_n^m L_n^m, \quad L_n^m = \pm \begin{bmatrix} e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}v_{n+1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}v_{n+1}} \end{bmatrix} R\left(\frac{\kappa_{n+1}^m}{2}\right), \quad v_{n+1} = 2 \arctan \frac{a_n \lambda}{2}$$

および

$$(4.24) \quad \phi_n^{m+1} = \phi_n^m M_n^m, \quad M_n^m = \pm R\left(\frac{w_n^m}{2}\right) \begin{bmatrix} e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_m} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_m} \end{bmatrix} R\left(\frac{w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m}{2}\right),$$

$$\mu_m = -2 \arctan \frac{b_m \lambda}{2}$$

または

$$(4.25) \quad \phi_n^{m+1} = \phi_n^m M_n^m, \quad M_n^m = \pm R\left(\frac{w_n^m}{2}\right) \begin{bmatrix} e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_m} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_m} \end{bmatrix} R\left(-\frac{w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m}{2}\right),$$

$$\mu_m = 2 \arctan \frac{2}{b_m \lambda}$$

をみます。ただし,

$$(4.26) \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

である.

Theorem 4.4. 定数 λ と数列 a_n, b_m, w_n^0, w_n^m に対して, 函数 w, κ をそれぞれ (4.18), (4.11) で定め, 差分方程式系 (4.23), (4.24) の解を ϕ とする. このとき, f を (2.3) で定義されている同型写像とし

$$(4.27) \quad \gamma_n^m = f^{-1}(S_n^m), \quad S_n^m = -\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_n^m\right)(\phi_n^m)^{-1}$$

とおくと, 各 m に対して, γ は隣接する頂点間の距離がそれぞれ

$$(4.28) \quad |\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = \epsilon_n = \frac{a_n}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}}, \quad |\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m| = \delta_m = \frac{b_m}{1 + \frac{b_m^2 \lambda^2}{4}}$$

であるような空間離散曲線であり, その隣接する接ベクトルのなす角は κ_n^m , 隣接する陪法線ベクトルのなす角は ν_m , さらに $\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m$ と $\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m$ のなす角は w_n^m となる. すなわち γ は離散 mKdV 方程式によって記述される定振率の空間離散曲線に対する振率保存等周変形である. 同様に, 函数 w, κ をそれぞれ (4.20), (4.11) で定め, 差分方程式系 (4.23), (4.25) の解を ϕ とするとき, (4.27) は離散サイン・ゴルドン方程式によって記述される定振率の空間離散曲線に対する振率保存等周変形である.

Theorem 4.2 (2) において, 各 m について $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m)$ が n の函数として定符号であることは, 次章で示されるように, 離散曲線の変形 $\gamma^m \mapsto \gamma^{m+1}$ が振率保存であるための必要十分条件である. 一方, 初期曲線 γ_n^0 (それに伴って a_n, κ_n^0, λ) を与えたとき, 曲線の変形は w_0^m と b_m を指定すれば一意的に定まる. したがって, 曲線の変形が振率保存であるための必要十分条件は, 与えられた a_n, κ_n^0, λ に対する w_0^m と b_m の条件として記述されるはずであるが, 実際にその条件を書き下すことは困難である. しかし, 一つの十分条件として, 例えば以下の命題を示すことができる.

Proposition 4.5.

(1) Theorem 4.4 の離散曲線の離散的変形において, 各 m について $b_m > 0$ を以下の条件を満たすように選べば, 変形は振率保存である.

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & b_m > \max \left\{ \frac{a_{\max}}{\tan \frac{\kappa_{\min}^m}{4}}, \frac{\Delta a}{2 \cos \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_{\min} a_{\max}}{(\Delta a)^2} \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \right) \right\} \\ & \text{または} \\ \text{(ii)} \quad & b_m < \min \left\{ a_{\min} \tan \frac{\kappa_{\min}^m}{4}, \frac{\Delta a}{2 \cos \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4a_{\min} a_{\max}}{(\Delta a)^2} \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

ただし,

$$(4.30) \quad \kappa_{\min}^m = \min_n \kappa_n^m, \quad \kappa_{\max}^m = \max_n \kappa_n^m, \quad a_{\max} = \max_n a_n, \quad a_{\min} = \min_n a_n, \quad \Delta a = a_{\max} - a_{\min}$$

である.

- (2) (1)において, (i) の場合, フルネ粹 Φ は (4.13), (4.14), (4.16) にしたがって, また (ii) の場合は (4.13), (4.14), (4.15) にしたがってそれぞれ変形される. すなわち, (i) は離散サイン・ゴールドン方程式 (4.20) に, (ii) は離散 mKdV 方程式 (4.18) に対応する変形を与える.

Remark 4.6.

- (1) ドリーヴァ・サンティニ [4, 5, 6] は \mathbb{R}^N 内の半径 r の球面 $S^{N-1}(r)$ 上に拘束された曲線の変形を議論し, 特に $N = 3$ の場合に離散曲線の等周変形として半離散 mKdV 方程式や離散サイン・ゴールドン方程式で記述される変形を導出している. $S^2(\frac{1}{|\lambda|})$ 上の連続曲線は \mathbb{R}^3 内の定振率 λ の曲線と等価であることが知られており, それらの明示的な対応関係は次のように与えられる. x を弧長径数, $\Gamma(x)$ を $S^2(\frac{1}{|\lambda|})$ 上の曲線とするとき, $\gamma(x) = \lambda \int \Gamma(x) \times \Gamma'(x) dx$ は \mathbb{R}^3 内の振率 λ の曲線となる. 逆に, $\gamma(x)$ を \mathbb{R}^3 内の振率 λ の曲線, $B(x)$ を $\gamma(x)$ の陪法線ベクトルとするとき, $\Gamma(x) = \pm \frac{1}{\lambda} B(x)$ は $S^2(\frac{1}{|\lambda|})$ 上の曲線となる [1, 18]. 離散曲線の場合も同様の対応関係が存在する. 実際, Γ_n を $S^2(\frac{1}{|\lambda|})$ 上のある条件をみたす離散曲線とするとき¹

$$(4.31) \quad \gamma_n = \lambda \sum_k^n \Gamma_{k-1} \times \Gamma_k$$

は \mathbb{R}^3 内の定振率 λ の離散曲線となり, 逆に γ_n を \mathbb{R}^3 内の定振率 λ の離散曲線, B_n を γ_n の陪法線ベクトルとするとき,

$$(4.32) \quad \Gamma_n = \pm \frac{1}{\lambda} B_n$$

は $S^2(\frac{1}{|\lambda|})$ 上の離散曲線となる. なお, Γ_n の等周変形から γ_n に対する等周変形を得るためには, (4.31) からわかるように和分を実行する必要がある.

§ 5. 主結果の証明

§ 5.1. Proposition 4.1 の証明

5.1.1. 等周性 曲線の変形を (4.2) で与え, $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = \epsilon_n$ のとき, $|\bar{\gamma}_{n+1} - \bar{\gamma}_n| = \epsilon_n$ が成り立つことを示す. 直接計算により

$$\begin{aligned} |\bar{\gamma}_{n+1} - \bar{\gamma}_n|^2 &= \epsilon_n^2 + 2\delta^2 [1 - \cos(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) \cos w_n - \cos v_{n+1} \sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) \sin w_n] \\ &\quad + 2\epsilon_n \delta [\cos(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) - \cos w_n] \end{aligned}$$

¹sgn($\langle \Gamma_{n-1} \times \Gamma_n, \Gamma_{n+1} \rangle$) が全ての n について一定でなければならない.

であるから,

$$\begin{aligned} & \delta [1 - \cos(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) \cos w_n - \cos \nu_{n+1} \sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) \sin w_n] \\ & + \epsilon_n [\cos(w_{n+1} + \kappa_{n+1}) - \cos w_n] = 0 \end{aligned}$$

を示せばよい.

$$\epsilon_n = \frac{a_n}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}}, \quad \delta = \frac{b}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}}, \quad \lambda = \frac{2}{a_n} \tan \frac{\nu_{n+1}}{2}$$

に注意すると, 上の式は

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{\lambda^2 a_n b}{4} \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} + w_n}{2} - \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_n}{2} \right) \\ & \times \left(a_n \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} + w_n}{2} - b \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_n}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

と書き換えられ, (4.4) によって第 2 因子が 0 となるので成り立つ.

Remark 5.1. (5.1) の第 1 因子を 0 とするような曲線の変形も (4.2), (4.3) と整合的である. これに関しては本章末尾の Remark 5.3 を参照すること.

5.1.2. 振率保存性 次に ν が変形によって不変であることを示す. $\nu_{n+1} \in [-\pi, \pi)$ だから $\cos \bar{\nu}_{n+1} = \cos \nu_{n+1}$, $\sin \bar{\nu}_{n+1} = \sin \nu_{n+1}$ を示せばよい. $\cos \nu_{n+1} = \langle B_n, B_{n+1} \rangle$, $\sin \nu_{n+1} = \langle N_n, B_{n+1} \rangle$ であるから, まず \bar{T}_n の計算から始める. いま, (4.2) に注意して変位ベクトル D_n を

$$(5.2) \quad D_n = \frac{\bar{\gamma}_n - \gamma_n}{\delta} = \Phi_n \begin{bmatrix} \cos w_n \\ \sin w_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定めると, 定義より

$$(5.3) \quad \delta D_n + \epsilon_n \bar{T}_n = \epsilon_n T_n + \delta D_{n+1}$$

が成り立つ。これより、 $\lambda = \frac{2}{a_n} \tan \frac{w_{n+1}}{2}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_n &= \frac{\delta}{\epsilon_n} D_{n+1} - \frac{\delta}{\epsilon_n} D_n + T_n = \frac{\delta}{\epsilon_n} \Phi_{n+1} \begin{bmatrix} \cos w_{n+1} \\ \sin w_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\delta}{\epsilon_n} \Phi_n \begin{bmatrix} \cos w_n \\ \sin w_n \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \Phi_n^m \left\{ \frac{\delta}{\epsilon_n} \left(L_n \begin{bmatrix} \cos w_{n+1} \\ \sin w_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos w_n \\ \sin w_n \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
 (5.4) \quad &= \frac{1}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n \begin{bmatrix} \cos 2U_n + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n \\ \sin 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n \\ -b\lambda \sin(U_n + V_n) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

である。ただし、

$$(5.5) \quad U_n = \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} + w_n}{2}, \quad V_n = \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_n}{2}$$

とおき、(4.4) よりしたがう

$$(5.6) \quad a_n \sin U_n = b \sin V_n$$

を用いた。また、

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{n-1} &= \frac{1}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_{n-1} \begin{bmatrix} \cos 2U_{n-1} + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_{n-1} \\ \sin 2U_{n-1} - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_{n-1} \\ -b\lambda \sin(U_{n-1} + V_{n-1}) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n (L_{n-1})^{-1} \begin{bmatrix} \cos 2U_{n-1} + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_{n-1} \\ \sin 2U_{n-1} - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_{n-1} \\ -b\lambda \sin(U_{n-1} + V_{n-1}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

より、(4.4) を用いると、長い計算の後

$$(5.7) \quad \bar{T}_{n-1} \times \bar{T}_n = \frac{\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin w_n \\ b\lambda \cos w_n \\ 1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \end{bmatrix}$$

したがって

$$(5.8) \quad \bar{B}_n = \frac{\bar{T}_{n-1} \times \bar{T}_n}{|\bar{T}_{n-1} \times \bar{T}_n|} = \frac{\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}))}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin w_n \\ b\lambda \cos w_n \\ 1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \bar{B}_{n+1} &= \frac{\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+2} + \kappa_{n+2} - w_n))}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n L_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin w_{n+1} \\ b\lambda \cos w_{n+1} \\ 1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+2} + \kappa_{n+2} - w_n))}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin(\kappa_{n+1} + w_{n+1}) \\ \frac{\lambda \left\{ b \left(1 - \frac{a_n^2 \lambda^2}{4} \right) \cos(\kappa_{n+1} + w_{n+1}) + a_n \left(1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \right) \right\}}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}} \\ - \frac{a_n b \lambda^2 \cos(\kappa_{n+1} + w_{n+1}) - \left(1 - \frac{a_n^2 \lambda^2}{4} \right) \left(1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \right)}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る. また, $\bar{N}_n = \bar{B}_n \times \bar{T}_n$ より

$$(5.10) \quad \bar{N}_n = \frac{\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}))}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \Phi_n \begin{bmatrix} -\sin 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n \\ \cos 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n \\ -b\lambda \cos(U_n + V_n) \end{bmatrix}$$

が成り立つ. そこで, もし $\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+2} + \kappa_{n+2} - w_n)) = \operatorname{sgn}(\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}))$ であるならば, (4.4) を用いると

$$(5.11) \quad \cos \bar{\nu}_{n+1} = \langle \bar{B}_n, \bar{B}_{n+1} \rangle = \frac{1 - \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\nu_{n+1}}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\nu_{n+1}}{2}} = \cos \nu_{n+1},$$

$$(5.12) \quad \sin \bar{\nu}_{n+1} = \langle \bar{B}_{n+1}, \bar{N}_n \rangle = \frac{a_n \lambda}{1 + \frac{a_n^2 \lambda^2}{4}} = \frac{2 \tan \frac{\nu_{n+1}}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\nu_{n+1}}{2}} = \sin \nu_{n+1}$$

となり, $\bar{\nu}_{n+1} = \nu_{n+1}$, すなわち ν が変形で変化しないことが示される. \square

Remark 5.2. 以上の議論で, $\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}))$ が, n について一定であることは, 変形が振率保存であるための必要十分条件であることがわかる. (5.2), (5.8) より $\operatorname{sgn}(\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})) = \operatorname{sgn}(\langle D_n \times B_n, \bar{B}_n \rangle)$ であるから, この条件の幾何学的な意味は, 全ての n で \bar{B}_n が D_n と B_n の張る平面に対して同じ向きであることである.

5.1.3. フルネ粹の変形 $\Phi_n = [T_n, N_n, B_n] \in \mathrm{SO}(3)$ に対して

$$(5.13) \quad \Phi_{n+1} = \Phi_n L_n, \quad \bar{\Phi}_n = \Phi_n M_n$$

を満たす $M_n \in \text{SO}(3)$ を構成する. 前節の計算で M_n の第 1 列, 第 2 列, 第 3 列はそれぞれ (5.4), (5.10), (5.8) の右辺で与えられることから, $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) > 0$ のとき

$$(5.14) \quad M_n = \frac{1}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \begin{bmatrix} \cos 2U_n + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n & -\sin 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n & -b\lambda \sin w_n \\ \sin 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n & \cos 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n & b\lambda \cos w_n \\ -b\lambda \sin(U_n + V_n) & -b\lambda \cos(U_n + V_n) & 1 - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$(5.15) \quad = R_3(w_n)R_1(\mu)R_3(w_{n+1} + \kappa_{n+1}), \quad \mu = -2 \arctan \frac{b\lambda}{2}$$

また, $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) < 0$ のとき

$$(5.16) \quad M_n = \frac{1}{1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4}} \begin{bmatrix} \cos 2U_n + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n & \sin 2U_n + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n & b\lambda \sin w_n \\ \sin 2U_n - \frac{b^2 \lambda^2}{4} \sin 2V_n & -\cos 2U_n + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \cos 2V_n & -b\lambda \cos w_n \\ -b\lambda \sin(U_n + V_n) & b\lambda \cos(U_n + V_n) & -1 + \frac{b^2 \lambda^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$(5.17) \quad = R_3(w_n)R_1(\mu)R_3(-w_{n+1} - \kappa_{n+1}), \quad \mu = 2 \arctan \frac{2}{b\lambda}$$

を得る. □

§ 5.2. Theorem 4.4 の証明

フルネ枠 $\Phi = [T, N, B] \in \text{SO}(3)$ が (4.13), (4.14), (4.15) をみたすとき, $\text{SU}(2)$ 値に変換された ϕ は (4.23), (4.24) をみたす. 特に, (4.24) は

$$(5.18) \quad \phi_n^{m+1} = \phi_n^m M_n^m, \quad M_n^m = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \frac{b_m^2 \lambda^2}{4}}} \begin{bmatrix} \cos U_n^m - \sqrt{-1} \frac{b_m \lambda}{2} \cos V_n^m & -\sin U_n^m + \sqrt{-1} \frac{b_m \lambda}{2} \sin V_n^m \\ \sin U_n^m + \sqrt{-1} \frac{b_m \lambda}{2} \sin V_n^m & \cos U_n^m + \sqrt{-1} \frac{b_m \lambda}{2} \cos V_n^m \end{bmatrix}$$

と書き直すことができる. ただし, U_n^m, V_n^m は (5.5) で与えられる. このとき,

$$(5.19) \quad T_n^m = \phi_n^m e_1 (\phi_n^m)^{-1}, \quad N_n^m = \phi_n^m e_2 (\phi_n^m)^{-1}, \quad B_n^m = \phi_n^m e_3 (\phi_n^m)^{-1}$$

とおくと, $S_n^m = -(\phi_n^m)_\lambda (\phi_n^m)^{-1}$ は

$$(5.20) \quad \begin{aligned} S_n^{m+1} - S_n^m &= -\phi_n^m (M_n^m)_\lambda (M_n^m)^{-1} (\phi_n^m)^{-1} = -\phi_n^m \left\{ \frac{-b_m}{1 + \frac{b_m^2 \lambda^2}{4}} (\cos w_n^m e_1 + \sin w_n^m e_2) \right\} (\phi_n^m)^{-1} \\ &= \delta_m (\cos w_n^m T_n^m + \sin w_n^m N_n^m) \end{aligned}$$

をみたし, これは変形の定義 (4.9) に一致する. また, Φ が (4.13), (4.14), (4.16) をみたすとき, ϕ は (4.23), (4.25) をみたす. これから上と同様の計算で (5.20) が導かれる. □

Remark 5.3. 等周条件を満たす曲線の変形として, (5.1) の第 1 因子を 0 にするような変形, すなわち

$$(5.21) \quad \frac{\lambda^2 a_n b}{4} \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} + w_n}{2} - \sin \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_n}{2} = 0$$

または

$$(5.22) \quad w_{n+1} = -\kappa_{n+1} + 2 \arctan \frac{\hat{b} + a_n}{\hat{b} - a_n} \tan \frac{w_n}{2}, \quad \hat{b} = \frac{4}{b\lambda^2}$$

も (4.2), (4.3) と整合的である. これは変換 $b \mapsto \hat{b}$ に対する δ の不変性から得られる変形であり, 以上で議論した全ての結果は径数の再定義 $b \mapsto \hat{b}$ によって上の変形に対する結果に書き換えられるので, 特段の議論は行わない.

§ 5.3. Proposition 4.5 の証明

m を一つ固定する. (4.11) に注意すると, $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m)$ は次のように書き換えられる.

$$(5.23) \quad \begin{aligned} & \sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) \\ &= \sin\left(2 \arctan\left(\frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{w_n^m}{2}\right) - 2 \arctan\left(\frac{b_m - a_{n-1}}{b_m + a_{n-1}} \tan \frac{w_n^m + \kappa_n^m}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

簡単のために

$$(5.24) \quad \tan \frac{w_n^m}{2} = W, \quad \tan \frac{\kappa_n^m}{2} = K, \quad c = \frac{b_m - a_n}{b_m + a_n}, \quad \underline{c} = \frac{b_m - a_{n-1}}{b_m + a_{n-1}}$$

とおく. ここで, $0 \leq \kappa_n^m < \pi$, $-\pi \leq w_n^m < \pi$ であること, また $\epsilon_n, \delta_m > 0$ と (3.14), (4.10) より $a_n, b_m > 0$ であることから

$$(5.25) \quad -1 < c < 1, \quad -1 < \underline{c} < 1, \quad K > 0, \quad -\infty < W < \infty$$

が成り立つ.

$$\sin(2 \arctan x - 2 \arctan y) = \frac{2(1 + xy)(x - y)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

に注意すると (5.23) は

$$(5.26) \quad \sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) = \frac{-\{\underline{c}W^2 + K(\underline{c} - c)W + c\} \{KW^2 + (c\underline{c} - 1)W + Kc\underline{c}\}}{\left(1 + \frac{W^2}{c^2}\right) \left[1 + \left(\underline{c} \frac{W+K}{1-WK}\right)^2\right] (1 - KW)^2 c^2}$$

となる. さて, 全ての n に対して (5.26) が任意の W について定符号であることを要請しよう. それには, 右辺の分母は符号に影響しないので, 分子の W に関する 2 つの 2 次式の判別式が負であればよい. したがって

$$(5.27) \quad \begin{aligned} & K^2(c - \underline{c})^2 - 4c\underline{c} < 0, \\ & (c\underline{c} - 1)^2 - 4K^2c\underline{c} < 0 \end{aligned}$$

が同時に成り立つように b_m を定めればよい. 不等式 (5.27) を解くと

$$(5.28) \quad (\sqrt{K^2+1}-K)^2 < c\underline{c} < (\sqrt{K^2+1}+K)^2,$$

$$(5.29) \quad \left(\frac{\sqrt{K^2+1}-1}{K}\right)^2 < \frac{c}{\underline{c}} < \left(\frac{\sqrt{K^2+1}+1}{K}\right)^2$$

となる. (5.28), (5.29) は n に関して隣接する c_n は同符号であること, すなわち, 各 m ごとに c_n は n に関して全て同符号であることを意味する. そこで

$$(5.30) \quad \begin{aligned} a_{\max} &= \max_n a_n, & a_{\min} &= \min_n a_n, \\ c_{\max} &= \max_n c_n = \frac{b_m - a_{\min}}{b_m + a_{\min}}, & c_{\min} &= \min_n c_n = \frac{b_m - a_{\max}}{b_m + a_{\max}} \end{aligned}$$

とおき, (i) $c_{\min}, c_{\max} > 0$ ($b_m > a_{\max}$) (ii) $c_{\min}, c_{\max} < 0$ ($b_m < a_{\min}$) の 2 つの場合に分けて議論する.

(i) $c_{\min}, c_{\max} > 0$ ($b_m > a_{\max}$) の場合, (5.28), (5.29) より

$$(5.31) \quad (\sqrt{K^2+1}-K)^2 < c_{\min}^2 \leq c_{\max}^2 < (\sqrt{K^2+1}+K)^2,$$

$$(5.32) \quad \left(\frac{\sqrt{K^2+1}-1}{K}\right)^2 < \frac{c_{\min}}{c_{\max}} \leq \frac{c_{\max}}{c_{\min}} < \left(\frac{\sqrt{K^2+1}+1}{K}\right)^2$$

が同時に成り立てばよい. (5.25), (5.30) および

$$(5.33) \quad \frac{\sqrt{K^2+1}-1}{K} = \tan \frac{\kappa_n^m}{4}, \quad \frac{\sqrt{K^2+1}+1}{K} = \frac{1}{\tan \frac{\kappa_n^m}{4}}$$

に注意して (5.31), (5.32) を b_m に関して解くとそれぞれ

$$(5.34) \quad b_m > \frac{a_{\max}}{\tan \frac{\kappa_n^m}{4}}, \quad b_m > \frac{\Delta a}{2 \cos^2 \frac{\kappa_n^m}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_{\min}a_{\max}}{(\Delta a)^2} \cos^2 \frac{\kappa_n^m}{2}}\right)$$

が得られる. κ_n^m に関して第 1 の不等式の右辺は単調減少, 第 2 の不等式の右辺は単調増加であるから, これらの不等式が全ての n に関して成り立つようにするためには

$$(5.35) \quad b_m > \max \left\{ \frac{a_{\max}}{\tan \frac{\kappa_{\min}^m}{4}}, \frac{\Delta a}{2 \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_{\min}a_{\max}}{(\Delta a)^2} \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}}\right) \right\}$$

となるように b_m を選ばばよい.

(ii) $c_{\min}, c_{\max} < 0$ ($b_m < a_{\max}$) の場合, (5.28), (5.29) より

$$(5.36) \quad (\sqrt{K^2+1}-K)^2 < c_{\max}^2 \leq c_{\min}^2 < (\sqrt{K^2+1}+K)^2,$$

$$(5.37) \quad \left(\frac{\sqrt{K^2+1}-1}{K}\right)^2 < \frac{c_{\max}}{c_{\min}} \leq \frac{c_{\min}}{c_{\max}} < \left(\frac{\sqrt{K^2+1}+1}{K}\right)^2$$

が成り立てばよい. これを (i) と同様に解いて

$$(5.38) \quad b_m < \min \left\{ a_{\min} \tan \frac{\kappa_{\min}^m}{4}, \frac{\Delta a}{2 \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4a_{\min}a_{\max}}{(\Delta a)^2} \cos^2 \frac{\kappa_{\max}^m}{2}} \right) \right\}$$

となるように b_m を選べばよいことがわかる. 以上で (1) が示された. (2) について, (5.26) の右辺において $K > 0$ であることに注意すると, $c_n > 0$ すなわち (i) の場合に $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n+1}^m) < 0$ となり, $c_n < 0$ すなわち (ii) の場合は $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n+1}^m) > 0$ となる. さらに, 5.1.3 節の議論によって, 前者は離散サイン・ゴルドン方程式で記述される変形に, 後者は離散 mKdV 方程式で記述される変形に対応することがわかる. \square

References

- [1] L.M. Bates and O.M. Melko, On curves of constant torsion I, *J. Geom.* **104**(2013)213–227.
- [2] A.I. Bobenko and Y.B. Suris, *Discrete Differential Geometry* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2008).
- [3] A. Calini and T. Ivey, Bäcklund transformations and knots of constant torsion, *J. Knot Theory Ramifications* **7**(1998) 719–746.
- [4] A. Doliwa and P.M. Santini, An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve, *Phys. Lett.* **A185**(1994) 373–384.
- [5] A. Doliwa and P.M. Santini, Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy, *J. Math. Phys.* **36**(1995) 1259–1273.
- [6] A. Doliwa and P. M. Santini, The integrable dynamics of a discrete curve, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, D. Levi, L. Vinet and P. Winternitz (eds.), CRM Proceedings & Lecture Notes Vol.9 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1996) 91–102.
- [7] H. Eyring, The resultant electric moment of complex molecules, *Phys. Rev.* **39**(1932) 746–748.
- [8] R. E. Goldstein and D. M. Petrich, The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3203–3206.
- [9] H. Hasimoto, A soliton on a vortex filament, *J. Fluid. Mech.* **11**(1972) 477–485.
- [10] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations III; discrete sine-Gordon equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977) 2079–2086 .
- [11] M. Hisakado, K. Nakayama and M. Wadati, Motion of discrete curves in the plane, *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** (1995) 2390–2393.
- [12] M. Hisakado and M. Wadati, Moving discrete curve and geometric phase, *Phys. Lett.* **A214**(1996) 252–258.
- [13] T.Hoffmann, Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow, *Discrete Differential Geometry*, A.I. Bobenko, P. Schröder, J.M. Sullivan and G.M. Ziegler (eds.), Oberwolfach Seminars Vol.39 (Birkhäuser, Basel, 2008) 95–115.
- [14] T. Hoffmann, *Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces*, COE Lecture Notes Vol. 18 (Kyushu University, Fukuoka, 2009).
- [15] T. Hoffmann and N. Kutz, Discrete curves in $\mathbb{C}P^1$ and the Toda lattice, *Stud. Appl. Math.* **113** (2004) 31–55.
- [16] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, *Kyushu J. Math.* **66**(2012) 303–324.

- [17] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**(2012) 045206.
- [18] G. Koenigs, Sur la forme des courbes à torsion constante, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **1**(1887) 1-8.
- [19] G.L. Lamb Jr., Solitons and the motion of helical curves, *Phys. Rev. Lett.* **37**(1976) 235–237.
- [20] J. Langer and R. Perline, Curve motion inducing modified Korteweg-de Vries systems, *Phys. Lett. A* **239**(1998) 36–40.
- [21] N. Matsuura, Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves, *Int. Math. Res. Not.* **2012**(2012) 1681–1698.
- [22] K. Nakayama, Elementary vortex filament model of the discrete nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**(2007) 074003.
- [23] K. Nakayama, H. Segur and M. Wadati, Integrability and the motions of curves, *Phys. Rev. Lett.* **69**(1992) 2603–2606.
- [24] K. Nishinari, A discrete model of an extensible string in three-dimensional space, *J. Appl. Mech.* **66**(1999) 695–701.
- [25] U. Pinkall, B. Springborn, and S. Weißmann, A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 12563–12576.
- [26] C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [27] R. Sauer, *Differenzgeometrie* (Spring-Verlag, Berlin, 1970).
- [28] A. Sym, Soliton surfaces, *Lett. Nuovo Cimento* (2) **33**(1982) 394–400.