RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B47 (2014), 127–139

符号付き超離散 Painlevé III 型方程式の特殊解について

By

礒島 伸 (Shin Isojima)*, 薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)**, 田渕 章子 (Shoko Tabuchi)***

Abstract

We first review the procedure of ultradiscretization with parity variables, which keeps track of the signs of original dependent variables. Then, by means of the procedure, an ultradiscrete analog of the contiguity relations of the Bessel equation is proposed and its special solutions are given through initial value problems. Ultradiscrete bilinear equations for the Painlevé III equation are also given and their special solutions are constructed from the solutions of the ultradiscrete contiguity relations.

§ 1. はじめに

超離散化 [14] とは, 与えられた差分方程式を近似する区分線形差分方程式を構成する極限操作である. この区分線形方程式は従属変数の和, 差, max 演算で表される. 特に, 初期値や方程式のパラメータを適当に制限して, 従属変数が整数値をとるようにできることが特徴である. 従って, 得られた区分線形方程式はセルオートマトンの時間発展則とみなされる. この意味で, 超離散化は差分方程式の従属変数を離散化する手続きである. この手法により, 高橋・薩摩によって提案されたソリトン・セルオートマトン（あるいは箱玉系）[11, 12] が KdV 方程式と直接対応することが明らかにされた. その後もこの手法を用いて多くの可積分セルオートマトンが構成され, その数理構造が調べられてきた.

しかしながら, 後で述べるように, 超離散化を行うためには解が正値で減算を含まない方程式でなければならない. この制約は「超離散化における負の困難」と呼ばれ, その

Received December 26, 2013. Revised March 24, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 39A13,34M55,37B15.
Key Words: *Ultradiscretization, Cellular Automaton, Painlevé Equation, Bessel Equation.*
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24560078.
*Department of Industrial and Systems Engineering, Hosei University, 3-7-2, Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo 184-8584 Japan.
e-mail: isojima@hosei.ac.jp
**Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University, 5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagamihara-shi, Kanagawa 252-5258, Japan.
***Graduate School of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University, 5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagamihara-shi, Kanagawa 252-5258, Japan.

克服は大きな課題であった. その 1 つの解答として, 「符号付き超離散化」という拡張手法が提案された [8]. この手法を用いると, 元の差分系の解の符号を追跡しながら時間発展の計算を進めることができる. 符号付き超離散化は, 特異点閉じ込めテスト [1] の超離散類似を構築する目的で提案された. その後, q 差分 Painlevé II 型方程式（$q\mathrm{P_{II}}$）へ適用され, その特殊解の系列が求められている [3, 4]. この特殊解は q 差分 Airy 方程式の解で表される $q\mathrm{P_{II}}$ の特殊関数解の系列と直接対応している [6]. Airy 方程式の特殊解としてよく知られている Ai 関数, Bi 関数は振動する挙動を示し, このような解を従来の超離散化で捉えることは困難であった. また [13] では, q 差分 Painlevé VI 型方程式の符号付き超離散類似とその特殊解が議論されている.

本稿では, 差分 Painlevé III 型方程式（$\mathrm{dP_{III}}$）の符号付き超離散類似を構成し, その特殊解を議論する. 2 節で符号付き超離散化の手続きの概略を述べ, 3 節では $\mathrm{dP_{III}}$ の特殊関数解に関する既知の結果を紹介する. 4 節では $\mathrm{dP_{III}}$ の双線形形式の超離散類似を満たす関数を構成し, 5 節でまとめを述べる.

§2. 符号付き超離散化

通常の超離散化の具体的な手続きは次の通りである. 与えられた差分方程式の従属変数 x_n に対し, パラメータ $\varepsilon > 0$ を導入して

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon} \tag{2.1}$$

という置き換えを施す. その後に, 方程式の両辺に $\varepsilon \log$ を施して極限 $\varepsilon \to +0$ を取る. その極限は, 任意の実数 X, Y について成り立つ公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) = \max(X, Y) \tag{2.2}$$

と指数法則を用いて, 元の変数の和が新しい変数 X_n たちの間の max 演算に, 積が和に, 商が差にそれぞれ置き換わり, $+$, $-$, max 演算で閉じた方程式として表される. 特に, 初期値や方程式のパラメータを整数値に制限すると, X_n もすべての n について整数値をとることがわかる.

1 節でも触れたように, 超離散化を行うためには, 解が正値で減算を含まない方程式でなければならない. 解の正値性は (2.1) から要請され, 方程式が減算を含む場合は (2.2) の意味のある評価が困難である. この制約を解消するために, 符号付き超離散化が提案された. 具体的には, 差分方程式の従属変数 x_n に対し, 符号変数 ξ_n と振幅変数 X_n を

$$\xi_n = \frac{x_n}{|x_n|}, \quad e^{X_n/\varepsilon} = |x_n| \tag{2.3}$$

により導入する. また, 関数 $s : \{1, -1\} \to \{0, 1\}$ を

$$s(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = 1) \\ 0 & (\xi = -1) \end{cases} \tag{2.4}$$

で定義する．これらの変数を用いて (2.1) の代わりに

$$x_n = \{s(\xi_n) - s(-\xi_n)\}e^{X_n/\varepsilon} = \begin{cases} e^{X_n/\varepsilon} & (x_n > 0) \\ -e^{X_n/\varepsilon} & (x_n < 0) \end{cases} \tag{2.5}$$

という置き換えを施す．その後に, すべての項が正値になるように移項によって方程式を整え, 両辺に $\varepsilon \log$ を施して極限 $\varepsilon \to +0$ を取る．その極限は, 関数

$$S(\xi) := \begin{cases} 0 & (\xi = 1) \\ -\infty & (\xi = -1) \end{cases} \tag{2.6}$$

を用いた公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(s(\xi)e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) = \max(S(\xi) + X, Y) \tag{2.7}$$

により, $S(\xi_n)$ と X_n たちの間の $+$, $-$ および max 演算で表される．ただし $-\infty$ は max 演算の中からその項を消し去る記号とする．

簡単な例として, 差分方程式

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \tag{2.8}$$

の符号付き超離散類似を構成しよう．比較のため, 解が正値であることを仮定して通常の超離散化を施すと

$$X_{n+1} = \max[X_n, X_{n-1}] \tag{2.9}$$

となることを注意しておく．まず (2.5) によって変数 x_n を置き換え, 適当に移項して

$$\begin{aligned} s(\xi_{n+1})e^{X_{n+1}/\varepsilon} + s(-\xi_n)e^{X_n/\varepsilon} + s(-\xi_{n-1})e^{X_{n-1}/\varepsilon} \\ = s(-\xi_{n+1})e^{X_{n+1}/\varepsilon} + s(\xi_n)e^{X_n/\varepsilon} + s(\xi_{n-1})e^{X_{n-1}/\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.10}$$

という形に変形する．公式 (2.7) に注意して極限を取ると,

$$\begin{aligned} \max[S(\xi_{n+1}) + X_{n+1}, S(-\xi_n) + X_n, S(-\xi_{n-1}) + X_{n-1}] \\ = \max[S(-\xi_{n+1}) + X_{n+1}, S(\xi_n) + X_n, S(\xi_{n-1}) + X_{n-1}] \end{aligned} \tag{2.11}$$

を得る．これが (2.8) の符号付き超離散化であり, 次のように漸化式として解くことができる．例えば $\xi_n = 1$, $\xi_{n-1} = -1$, $X_n > X_{n-1}$ の場合を考えよう．まず符号を代入して $-\infty$ を含む項を消し去ると

$$\max[S(\xi_{n+1}) + X_{n+1}, X_{n-1}] = \max[S(-\xi_{n+1}) + X_{n+1}, X_n] \tag{2.12}$$

を得る．次にこの関係式を満たす ξ_{n+1}, X_{n+1} を求める．符号について $\xi_{n+1}=1$ を仮定すると $\max[X_{n+1}, X_{n-1}]=X_n$ より一意な解 $X_{n+1}=X_n$ が得られ, 一方 $\xi_{n+1}=-1$ を仮定すると $X_{n-1}=\max[X_{n+1}, X_n]$ より解なしとなる．そこで解が存在する $\xi_{n+1}=1$ を符号として採用し, $(\xi_{n+1}, X_{n+1})=(1, X_n)$ を次ステップの変数の値とする．別の例として $\xi_n=1$, $\xi_{n-1}=-1$, $X_n=X_{n-1}$ の場合を考えると, 符号は任意, 振幅について $X_{n+1}\le X_n$ という不定解を得る．このような不定型の発展が符号付き超離散化の特徴である．一般には $\xi_{n-1}, X_{n-1}, \xi_n, X_n$ に関する場合分けを考えて, 陽的な方程式に書き直すと便利である．結果のみ紹介すると,
(i) $\xi_n\xi_{n-1}=1$ または $X_n\neq X_{n-1}$ のとき

$$\begin{cases} X_{n+1}=\max[X_n, X_{n-1}] \\ \xi_{n+1}=\frac{\xi_n+\xi_{n-1}}{2}+\frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{2}\mathrm{sgn}(X_n-X_{n-1}) \end{cases} \tag{2.13}$$

(ii) $\xi_n\xi_{n-1}=-1$ かつ $X_n=X_{n-1}$ のとき

$$\begin{cases} X_{n+1}\le X_n \\ \xi_{n+1}=\pm 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

となる．もし $\xi_n\equiv 1$ ならば一意的な発展 (i) のみとなり, 特に振幅の漸化式は (2.9) と一致している．(ii) の場合は, 発展が一意に定まらない「不定型の発展」であるが, これは非常に限られた場合のみに起こることを注意しておく．不定型の発展は扱いが困難ではあるが, この形の発展を考えることで符号付き超離散系の解が豊かなものになる．例えば符号付き超離散 Airy 方程式の特殊解で, 遠方で収束する挙動を示す超離散 Ai 関数を構成するためには, 不定型の発展を用いなければならないという事実がある．なお符号付き超離散化については [5] も参照されたい.

§ 3.　差分 Painlevé III 型方程式

Painlevé III 型方程式は

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}(au^2+d)+cu^3+\frac{b}{u} \tag{3.1}$$

で与えられる．ここで a, b, c, d はパラメータである．これらのパラメータがある関係式を満たすとき, (3.1) は Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)v=0 \tag{3.2}$$

の解で表される特殊解の系列を持つことが知られている．すなわち，(3.2) の任意の解を v_ν, $D = x\frac{d}{dx}$ として，いわゆる τ 関数

$$\tau_N^\nu = \begin{vmatrix} v_\nu & Dv_\nu & \cdots & D^{N-1}v_\nu \\ Dv_\nu & D^2v_\nu & \cdots & D^N v_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{N-1}v_\nu & D^N v_\nu & \cdots & D^{2N-2}v_\nu \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

を定義する．パラメータが

$$a = 2(N-\nu), \qquad b = -1, \qquad c = 1, \qquad d = 2(\nu+N+1) \tag{3.4}$$

を満たすとき，変数変換

$$u = \left(\log \frac{\tau_N^{\nu+1}}{\tau_{N+1}^\nu}\right)_x + \frac{\nu+N}{x} \tag{3.5}$$

で構成される関数 u は (3.1) の解となる．

このような特殊解の構造を保存した差分化の 1 つとして，次の差分 Painlevé III 型方程式（$\mathrm{dP_{III}}$）

$$w_{n+1}w_{n-1} = \frac{\alpha w_n^2 + \beta\lambda^n w_n + \gamma\lambda^{2n}}{w_n^2 + \delta w_n + \alpha} \tag{3.6}$$

が提案されている [7]． ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ は方程式のパラメータである． 連続極限は $u_n = \lambda^{-n/2} w_n$, $\alpha = -1/c\epsilon^2$, $\beta = -d/c$, $\gamma = -b/c$, $\delta = a/c$, $\lambda = 1+2\epsilon$, $n\epsilon = z$ と置き換え，$\epsilon \to 0$ の極限を取った後で $x = e^z$ と置くと (3.1) に帰着される．特殊解の構造は以下の通りである．Bessel 方程式の離散化の 1 つである

$$J_\nu(n+2) - (q^\nu + q^{-\nu})J_\nu(n+1) + \{1 + (1-q)^2 q^{2n}\}J_\nu(n) = 0 \tag{3.7}$$

を考える．ここで q はパラメータである．連続極限は，$\epsilon < 0$ をパラメータとし，$q = 1+\epsilon$, $n\epsilon = z$ と置き換えて極限 $\epsilon \to -0$ を取り，$x = e^z$ と変数変換すると (3.2) に帰着される．その解 $J_\nu(n)$ を成分とする行列式

$$\tau_N^\nu(n) = \begin{vmatrix} J_\nu(n) & J_\nu(n+1) & \cdots & J_\nu(n+N-1) \\ J_\nu(n+2) & J_\nu(n+3) & \cdots & J_\nu(n+N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_\nu(n+2N-2) & J_\nu(n+2n-1) & \cdots & J_\nu(n+3N-3) \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

を考えると，これは (3.3) の離散化になっている．パラメータが

$$\begin{gathered} \alpha = -q^{4N}, \qquad \beta = (q^{\nu+N} - q^{-\nu-N-2})q^{8N}(1-q)^2, \\ \gamma = q^{2(6N-1)}(1-q)^4, \qquad \delta = (q^{\nu-N} - q^{-\nu+N})q^{2N}, \qquad \lambda = q^2 \end{gathered} \tag{3.9}$$

を満たすとき, 変数変換

$$w_n = \frac{\tau^{\nu}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu+1}_{N}(n)}{\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+1)} - q^{\nu+N} \tag{3.10}$$

で構成される関数 w_n は, (3.6) の解を与える. なお離散 τ 関数 (3.8) は, 双線形方程式

(3.11)
$$\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+1) - q^{-\nu-N}\tau^{\nu}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu+1}_{N}(n) = -(1-q)q^{n+2N}\tau^{\nu+1}_{N+1}(n)\tau^{\nu}_{N}(n+1),$$

(3.12)
$$\tau^{\nu+1}_{N+1}(n)\tau^{\nu}_{N}(n+1) - q^{\nu-N+1}\tau^{\nu+1}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu}_{N}(n) = (1-q)q^{n+2N}\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+1),$$

(3.13)
$$\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+3) - q^{-\nu-N}\tau^{\nu}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu+1}_{N}(n+2) = -(1-q)q^{n}\tau^{\nu+1}_{N+1}(n)\tau^{\nu}_{N}(n+3),$$

(3.14)
$$\tau^{\nu+1}_{N+1}(n)\tau^{\nu}_{N}(n+3) - q^{\nu-N+1}\tau^{\nu+1}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu}_{N}(n+2) = (1-q)q^{n}\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+3)$$

を満たす. これらの式から

$$\begin{aligned}\tau^{\nu}_{N+1}(n+2)\tau^{\nu+1}_{N}(n+1) - q^{2N}(q^{\nu-N}+q^{-\nu+N})\tau^{\nu}_{N+1}(n+1)\tau^{\nu+1}_{N}(n+2)\\ + q^{4N}\{1+(1-q)^2q^{2n}\}\tau^{\nu}_{N+1}(n)\tau^{\nu+1}_{N}(n+3) = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

を導くことができ, $N=0$ として $\tau^{\nu+1}_{0}(n) \equiv 1$ と置くと (3.7) に帰着される.

本節の最後に, 連続極限の変数変換からわかる独立変数の対応関係について注意を与えておこう. 連続系における原点近傍 $x \sim 0$ は差分系では（よって超離散系でも）十分大きな $n > 0$ に対応する. また, 連続系における（正の）遠方の点 $x \to \infty$ は差分系では絶対値の十分大きな $n < 0$ に対応する.

§4. 超離散 Painlevé III 型方程式の特殊解

前節で述べたような, $\mathrm{dP_{III}}$ の特殊解の構造を保存した超離散系を構成することは可能だろうか. この問題の解答に向けて, 奈良崎らは (3.7) の符号付き超離散類似である超離散 Bessel 方程式を構成した. まず $0 < q < 1$ を仮定して $q = e^{Q/\varepsilon}$, $Q < 0$ と置く. 対称性をよくするため n を $n-1$ にシフトした方程式を考え, 従属変数に対して置き換え

$$J_{\nu}(n) = \{s(\beta^{\nu}_{n}) - s(-\beta^{\nu}_{n})\}\, e^{\frac{B^{\nu}_{n}}{\varepsilon}} \tag{4.1}$$

を施し, 符号付き超離散化の手続きを行うと

(4.2)
$$\begin{aligned}&\max[S(\beta^{\nu}_{n+1})+B^{\nu}_{n+1}, S(-\beta^{\nu}_{n})+B^{\nu}_{n}-\nu Q, S(\beta^{\nu}_{n-1})+B^{\nu}_{n-1}, S(\beta^{\nu}_{n-1})+B^{\nu}_{n-1}+(2n-2)Q]\\ &= \max[S(-\beta^{\nu}_{n+1})+B^{\nu}_{n+1}, S(\beta^{\nu}_{n})+B^{\nu}_{n}-\nu Q, S(-\beta^{\nu}_{n-1})+B^{\nu}_{n-1}, S(-\beta^{\nu}_{n-1})+B^{\nu}_{n-1}+(2n-2)Q]\end{aligned}$$

を得る．さらにその初期値問題の解を調べあげ, 特徴的な解として, 漸近挙動から Bessel 関数の対応物と考えられる「超離散 Bessel 関数」

$$\beta_n^\nu = \begin{cases} \beta_0^\nu & (n \geq -\nu) \\ (-1)^{\frac{n+\nu}{2}}\beta_0^\nu & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \mathrm{even}) \\ (-1)^{\frac{n+\nu-1}{2}}\beta_0^\nu & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$B_n^\nu = \begin{cases} B_0^\nu + n\nu Q & (n \geq 0) \\ B_0^\nu + n(n+\nu-1)Q & (-1 \geq n \geq -\nu) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-2)-\nu^2}{2}Q & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \mathrm{even}) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-4)-(\nu+3)(\nu-1)}{2}Q & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{4.4}$$

を提案した [9, 10]．この解を得るためには, 連続系の $x \sim 0$ に対応する $n \to \infty$ で $e^{B_n^\nu} \to 0$ という漸近挙動を要請する．その帰結として, n が増加する方向に超離散方程式を解いていくとき, 不定型の発展となるように特別な関係を満たす初期値 (β_0^ν, B_0^ν), (β_1^ν, B_1^ν) を与える他に, 不定解の中から以後も不定型の発展が続くようなものを選ぶ必要がある．言い換えれば, 超離散 Bessel 関数は極めて厳しい初期値・境界値問題を考えなければ得られないのである．なおこのとき, 連続系の $x \to \infty$ に対応する n の一部である $n \leq -\nu-1$ かつ $n+\nu$ が奇数の場合にも不定型の発展が生じるが, やはり不定型の発展が続くように不定解を選んでいる．ただし, そのように選ぶことは $n \to -\infty$ における解の漸近挙動に影響を与えない．一方, Bessel 関数の離散類似であり, (3.7) の特殊解を与える

$$J_\nu(n) = (1-q)^\nu (q^n)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-q)^{2j}}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{\nu+j}} (q^n)^{2j}, \tag{4.5}$$

$$(a;q)_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{k-1}) & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} \tag{4.6}$$

の符号付き超離散化を計算した結果 [2] は

$$\beta_n^\nu = \begin{cases} 1 & (n \geq -\nu) \\ (-1)^{\frac{n+\nu}{2}} & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{even}) \\ (-1)^{\frac{n+\nu+1}{2}} & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{odd}), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$B_n^\nu = \begin{cases} n\nu Q & (n \geq 1) \\ n(n+\nu-1)Q & (0 \geq n \geq -\nu) \\ \frac{n(n-2)-\nu^2}{2}Q & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{even}) \\ \frac{n(n-2)-\nu^2+3}{2}Q & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{4.8}$$

であり, 両者は $n \leq -\nu-1$ かつ $n+\nu$ が奇数の場合には一致しない．厳密解の極限として得られた (4.7), (4.8) が「正当な」超離散 Bessel 関数であると考えられる．引き続き,

(3.11)–(3.14) の符号付き超離散類似とその解を構成するにあたって, この差が困難を生むことが予想される. なお, この不一致は先程も述べた発展が不定型となる点で起こっており, その扱いに注意が必要なことを示す一例となっている.

本稿では, 超離散 Bessel 方程式の初期値問題の解を求める別のアプローチとして, 隣接関係式

$$J_\nu(n) - q^{-\nu} J_\nu(n+1) = -(1-q)q^n J_{\nu+1}(n), \tag{4.9}$$

$$J_\nu(n) - q^{\nu} J_\nu(n+1) = (1-q)q^n J_{\nu-1}(n) \tag{4.10}$$

を出発点として考える. これはよく知られた Bessel 関数が満たす隣接関係式の離散化であり, この 2 式から (3.7) を導くことができる. また, 双線形方程式 (3.11)–(3.14) に対して $N=0$, $\tau_0^\nu(n) \equiv 1$ と置くと, (3.11), (3.13) は (4.9) に, (3.12), (3.14) は (4.10) に帰着される. これら 2 式の符号付き超離散類似を構成し, その初期値問題の解を調べていく.

まず $\varepsilon > 0$ を超離散化のためのパラメータとして, $q = e^{Q/\varepsilon}$, $Q < 0$ と置く. さらに $J_\nu(n)$ の符号 β_n^ν および振幅 B_n^ν を導入して

$$J_\nu(n) = \{s(\beta_n^\nu) - s(-\beta_n^\nu)\} e^{\frac{B_n^\nu}{\varepsilon}} \tag{4.11}$$

と表す. ここで関数 s は (2.4) で定義されたものである. これらを (4.9) に代入し, 移項により減算を消去すると

$$\begin{aligned} &s(-\beta_{n+1}^\nu) e^{\frac{B_{n+1}^\nu - \nu Q}{\varepsilon}} + s(\beta_n^\nu) e^{\frac{B_n^\nu}{\varepsilon}} + s(-\beta_n^{\nu+1}) e^{\frac{B_n^{\nu+1} + (n+1)Q}{\varepsilon}} + s(\beta_n^{\nu+1}) e^{\frac{B_n^{\nu+1} + nQ}{\varepsilon}} \\ &= s(\beta_{n+1}^\nu) e^{\frac{B_{n+1}^\nu - \nu Q}{\varepsilon}} + s(-\beta_n^\nu) e^{\frac{B_n^\nu}{\varepsilon}} + s(\beta_n^{\nu+1}) e^{\frac{B_n^{\nu+1} + (n+1)Q}{\varepsilon}} + s(-\beta_n^{\nu+1}) e^{\frac{B_n^{\nu+1} + nQ}{\varepsilon}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

を得る. 公式 (2.7) に注意すれば, (4.9) の符号付き超離散類似

$$\begin{aligned} &\max[S(-\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu - \nu Q,\ S(\beta_n^\nu) + B_n^\nu,\ S(\beta_n^{\nu+1}) + B_n^{\nu+1} + nQ] \\ &= \max[S(\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu - \nu Q,\ S(-\beta_n^\nu) + B_n^\nu,\ S(-\beta_n^{\nu+1}) + B_n^{\nu+1} + nQ] \end{aligned} \tag{4.13}$$

を得る. ただし $nQ > (n+1)Q$ を用いて両辺から項を 1 つずつ消去している. 同様に (4.10) の符号付き超離散類似

$$\begin{aligned} &\max[S(-\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu + \nu Q,\ S(\beta_n^\nu) + B_n^\nu,\ S(-\beta_n^{\nu-1}) + B_n^{\nu-1} + nQ] \\ &= \max[S(\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu + \nu Q,\ S(-\beta_n^\nu) + B_n^\nu,\ S(\beta_n^{\nu-1}) + B_n^{\nu-1} + nQ] \end{aligned} \tag{4.14}$$

も得られる.

この連立超離散方程式に対して (β_0^ν, B_0^ν) および $(\beta_0^{\nu+1}, B_0^{\nu+1})$ の値を与えて, 解 (β_n^ν, B_n^ν) および $(\beta_n^{\nu+1}, B_n^{\nu+1})$ を構成する問題を初期値問題と呼ぶことにする. ここでは $\nu = 1$ とし, 初期値について $\beta_0^1 = \beta_0^2 = 1, B_0^1 < B_0^2$ とした場合を考える. 計算の便利のため, (β_n^1, B_n^1) および (β_n^2, B_n^2) から $(\beta_{n+1}^1, B_{n+1}^1)$ を陽的に求める式, すなわち n が増える方向の漸化式

として (4.13) を書き直すと
(i) $\beta_n^1 = \beta_n^2$ または $B_n^1 \neq B_n^2 + nQ$ のとき

$$\beta_{n+1}^1 = \frac{\beta_n^1 + \beta_n^2}{2} + \frac{\beta_n^1 - \beta_n^2}{2}\mathrm{sgn}(B_n^1 - B_n^2 - nQ) \tag{4.15}$$

$$B_{n+1}^1 = \max[B_n^1, B_n^2 + nQ] + Q \tag{4.16}$$

(ii) $\beta_n^1 = -\beta_n^2$ かつ $B_n^1 = B_n^2 + nQ$ のとき

$$\beta_{n+1}^1 = \pm 1 \tag{4.17}$$

$$B_{n+1}^1 \leq B_n^1 + Q \tag{4.18}$$

となる. 同様に, $(\beta_{n+1}^2, B_{n+1}^2)$ を陽的に求める式として (4.14) を書き直すと
(i) $\beta_n^1 = -\beta_n^2$ または $B_n^2 \neq B_n^1 + nQ$ のとき

$$\beta_{n+1}^2 = \frac{\beta_n^2 - \beta_n^1}{2} + \frac{\beta_n^2 + \beta_n^1}{2}\mathrm{sgn}(B_n^2 - B_n^1 - nQ) \tag{4.19}$$

$$B_{n+1}^2 = \max[B_n^2, B_n^1 + nQ] - 2Q \tag{4.20}$$

(ii) $\beta_n^1 = \beta_n^2$ かつ $B_n^2 = B_n^1 + nQ$ のとき

$$\beta_{n+1}^2 = \pm 1 \tag{4.21}$$

$$B_{n+1}^2 \leq B_n^2 - 2Q \tag{4.22}$$

となる. n が減る方向に関しても類似の式を書き下すことができる. これらの発展方程式から得られる初期値問題の解について, 計算結果のみを述べると

$$\beta_n^1 = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ (-1)^{n(n-1)/2} & (n \leq -1) \end{cases} \tag{4.23}$$

$$B_n^1 = \begin{cases} B_0^2 - (n-2)Q & (n \geq 1) \\ B_0^1 & (n = 0) \\ B_0^2 + \frac{n(n-2)+3}{2}Q & (n \leq -1; \mathrm{odd}) \\ B_0^1 + \frac{n(n-2)}{2}Q & (n \leq -1; \mathrm{even}) \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\beta_n^2 = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ (-1)^{n(n+1)/2} & (n \leq -1) \end{cases} \tag{4.25}$$

$$B_n^2 = \begin{cases} B_0^2 - 2nQ & (n \geq 0) \\ B_0^1 + \frac{n(n-2)-3}{2}Q & (n \leq -1; \mathrm{odd}) \\ B_0^2 + \frac{n(n-2)}{2}Q & (n \leq -1; \mathrm{even}) \end{cases} \tag{4.26}$$

となる．これらの解は $n\to\infty$ のとき $e^{B_n^\nu}\to\infty$ となることから, よく知られた Neumann 関数の対応物と考えられる．また, Bessel 関数の対応物, すなわち $n\to\infty$ のとき $e^{B_n^\nu}\to 0$ となる解も構成できるが, その報告は別の機会としたい．

さらに, 双線形方程式 (3.11)–(3.14) を超離散化して得られる超離散双線形方程式を考えよう．$q=e^{Q/\varepsilon}$ および

$$\tau_N^\nu(n)=\{s(y_N^{\nu,n})-s(-y_N^{\nu,n})\}e^{\frac{Y_N^{\nu,n}}{\varepsilon}} \tag{4.27}$$

を (3.11)–(3.14) に代入し, 減算が現れない形に移項してから, 公式 $s(y)s(\tilde{y})+s(-y)s(-\tilde{y})=s(y\tilde{y})$ を用いて表示を簡略化する．その後に極限 $\varepsilon\to+0$ を取ると, それぞれの超離散類似

$$\begin{aligned}
&\max[S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1},\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu,n+1}y_N^{\nu+1,n})+Y_{N+1}^{\nu,n+1}+Y_N^{\nu+1,n}-(\nu+N)Q,\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1}+(n+2N)Q,\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1}+(n+2N+1)Q]\\
&=\max[S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1},\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu,n+1}y_N^{\nu+1,n})+Y_{N+1}^{\nu,n+1}+Y_N^{\nu+1,n}-(\nu+N)Q,\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1}+(n+2N)Q,\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1}+(n+2N+1)Q],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
&\max[S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1},\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n+1}y_N^{\nu,n})+Y_{N+1}^{\nu+1,n+1}+Y_N^{\nu,n}+(\nu-N+1)Q,\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1}+(n+2N)Q,\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1}+(n+2N+1)Q]\\
&=\max[S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+1})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+1},\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu+1,n+1}y_N^{\nu,n})+Y_{N+1}^{\nu+1,n+1}+Y_N^{\nu,n}+(\nu-N+1)Q,\\
&\qquad S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1}+(n+2N)Q,\\
&\qquad S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+1})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+1}+(n+2N+1)Q],
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$
\begin{aligned}
(4.30)\qquad & \max[S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3},\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu,n+1}y_N^{\nu+1,n+2})+Y_{N+1}^{\nu,n+1}+Y_N^{\nu+1,n+2}-(\nu+N)Q,\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3}+nQ,\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3}+(n+1)Q]\\
&=\max[S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3},\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu,n+1}y_N^{\nu+1,n+2})+Y_{N+1}^{\nu,n+1}+Y_N^{\nu+1,n+2}-(\nu+N)Q,\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3}+nQ,\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3}+(n+1)Q],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.31)\qquad & \max[S(y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3},\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu+1,n+1}y_N^{\nu,n+2})+Y_{N+1}^{\nu+1,n+1}+Y_N^{\nu,n+2}+(\nu-N+1)Q,\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3}+nQ,\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3}+(n+1)Q]\\
&=\max[S(-y_{N+1}^{\nu+1,n}y_N^{\nu,n+3})+Y_{N+1}^{\nu+1,n}+Y_N^{\nu,n+3},\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu+1,n+1}y_N^{\nu,n+2})+Y_{N+1}^{\nu+1,n+1}+Y_N^{\nu,n+2}+(\nu-N+1)Q,\\
&\quad S(y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3}+nQ,\\
&\quad S(-y_{N+1}^{\nu,n}y_N^{\nu+1,n+3})+Y_{N+1}^{\nu,n}+Y_N^{\nu+1,n+3}+(n+1)Q]
\end{aligned}
$$

が得られる．これらの超離散双線形方程式に対して $N=0$ としたものを考えると, (4.13), (4.14) に帰着し, 従って $(y_0^{\nu,n},Y_0^{\nu,n})=(1,0)$, $(y_1^{\nu,n},Y_1^{\nu,n})=(\beta_n^\nu,B_n^\nu)$ がその解となることは明らかである．次に, $N=1$ とした超離散双線形方程式を $(y_1^{\nu,n},Y_1^{\nu,n})=(\beta_n^\nu,B_n^\nu)$ と共に満たす関数 $(y_2^{\nu,n},Y_2^{\nu,n})$ を構成しよう．その手掛かりとして, 先程求めた (β_n^1,B_n^1) および (β_n^2,B_n^2) を用いて, (3.8) において $N=2$ とした

$$\tau_2^\nu(n)=J_\nu(n)J_\nu(n+3)-J_\nu(n+1)J_\nu(n+2),\quad \nu=1,2 \tag{4.32}$$

の超離散類似を求める．その結果は求めたい解そのもの, あるいはそれに非常に近いことが期待される．今, $\tau_2^\nu(n)$ の符号を γ_n^ν, 振幅を C_n^ν として

$$\tau_2^\nu(n)=\{s(\gamma_n^\nu)-s(-\gamma_n^\nu)\}e^{\frac{C_n^\nu}{\varepsilon}} \tag{4.33}$$

と置く．これと (4.11) を (4.32) に代入し, 適当に移項すると

$$
\begin{aligned}
(4.34)\qquad & s(\gamma_n^\nu)e^{\frac{C_n^\nu}{\varepsilon}}+s(\beta_n^\nu\beta_{n+3}^\nu)e^{\frac{B_n^\nu+B_{n+3}^\nu}{\varepsilon}}+s(-\beta_{n+1}^\nu\beta_{n+2}^\nu)e^{\frac{B_{n+1}^\nu+B_{n+2}^\nu}{\varepsilon}}\\
&=s(-\gamma_n^\nu)e^{\frac{C_n^\nu}{\varepsilon}}+s(-\beta_n^\nu\beta_{n+3}^\nu)e^{\frac{B_n^\nu+B_{n+3}^\nu}{\varepsilon}}+s(\beta_{n+1}^\nu\beta_{n+2}^\nu)e^{\frac{B_{n+1}^\nu+B_{n+2}^\nu}{\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで表示の簡略化のために, 公式 $s(\gamma)s(\tilde{\gamma})+s(-\gamma)s(-\tilde{\gamma})=s(\gamma\tilde{\gamma})$ を用いた．極限 $\varepsilon\to+0$ を取ると,

$$\begin{aligned}(4.35)\quad &\max[S(\gamma_n^\nu)+C_n^\nu, S(-\beta_n^\nu\beta_{n+3}^\nu)+B_n^\nu+B_{n+3}^\nu, S(\beta_{n+1}^\nu\beta_{n+2}^\nu)+B_{n+1}^\nu+B_{n+2}^\nu]\\ &=\max[S(-\gamma_n^\nu)+C_n^\nu, S(\beta_n^\nu\beta_{n+3}^\nu)+B_n^\nu+B_{n+3}^\nu, S(-\beta_{n+1}^\nu\beta_{n+2}^\nu)+B_{n+1}^\nu+B_{n+2}^\nu]\end{aligned}$$

を得る．ここで $\nu=1$ として (β_n^1, B_n^1) を代入し, 解くことで関数 (γ_n^1, C_n^1) を求めると

$$\gamma_n^1=\begin{cases}\pm1 & (n\geq0)\\ (-1)^n & (n\leq-1)\end{cases}\tag{4.36}$$

$$C_n^1\begin{cases}\leq 2B_0^2-(2n-1)Q & (n\geq1)\\ \leq\max[2B_0^2+Q, B_0^1+B_0^2-Q] & (n=0)\\ =\max[2B_0^2+3Q, B_0^1+B_0^2+Q] & (n=-1)\\ =B_0^1+B_0^2+(n^2+n+1)Q & (n\leq-2)\end{cases}\tag{4.37}$$

となる．この段階では B_0^1 および B_0^2 は仮定した条件 $B_0^1<B_0^2$ を満たす限り自由である．しかし, 超離散双線形方程式 (4.28)–(4.31) を満たすことを要請すると, $n=0$ 付近での計算から, 必要条件として $B_0^2=B_0^1-2Q$ が導かれる．こうして定まった関数

$$\gamma_n^1=\begin{cases}-1 & (n\geq0)\\ (-1)^n & (n\leq-1)\end{cases}\tag{4.38}$$

$$C_n^1=\begin{cases}2B_0^1-3Q & (n\geq0)\\ 2B_0^1+(n^2+n-1)Q & (n\leq-1)\end{cases}\tag{4.39}$$

が超離散双線形方程式の解であることは, 直接代入して確かめることができる．同様の手続きで $\nu=2$ の場合の解を構成することができる．ここでも $B_0^2=B_0^1-2Q$ が必要条件であり, 結果は

$$\gamma_n^2=\begin{cases}1 & (n\geq0)\\ -1 & (n=-1)\\ (-1)^{n+1} & (n\leq-2)\end{cases}\tag{4.40}$$

$$C_n^2=\begin{cases}2B_0^2-2(n+2)Q & (n\geq-1)\\ 2B_0^2+(n^2+n)Q & (n\leq-2)\end{cases}\tag{4.41}$$

となる．2 つの関数の比較により, 一般に (γ_n^ν, C_n^ν) が ν 依存性を持つことが予想される．また $N=1$ のときの τ 関数の超離散類似である (β_n^ν, B_n^ν) との比較から, τ 関数の超離散類似が N 依存性を持つことも予想できる．一般の ν および N に対しても, 同様の手続きで超離散双線形方程式の解を構成することが可能であろう．

§5. おわりに

本稿では, まず符号付き超離散化の手法及び dP_{III} の特殊解に関する既知の結果を概説した. そして差分 Bessel 方程式そのものではなく, 隣接関係式の符号付き超離散類似を提出し, その初期値問題の解を特別なパラメータに対して求めた. 続いて dP_{III} の双線形方程式の符号付き超離散類似を提出し, 超離散隣接関係式の解を元にして方程式のパラメータが特別な場合の特殊解を構成した. いずれの解も定符号ではなく, 符号付き超離散化を用いなければ捉えられないクラスの解である. また解の関数形から, パラメータ依存性を持った解の系列が存在することが予想される. 一般のパラメータに対する解の明示式の計算は進行中であり, 別の機会に報告したい.

References

[1] Grammaticos, B., Ramani, A. and Papageorgiou, V., Do Integrable Mappings Have the Painlevé Property?, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 1825–1828.

[2] Isojima, S., *in preparation*.

[3] Isojima, S., Konno, T., Mimura, N., Murata, M. and Satsuma, J., Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011), 175201 (10pp).

[4] Isojima, S. and Satsuma, J., A class of special solutions for the ultradiscrete Painlevé II equation, *SIGMA*, **7** (2011), 074 (9pp).

[5] 礒島伸, 薩摩順吉, 超離散化における負の問題の解決, 日本応用数理学会論文誌, **23** (2013), 325–339 (*in Japanese*).

[6] Isojima, S., Satsuma, J. and Tokihiro, T. Direct ultradiscretization of Ai and Bi functions and special solutions for the Painlevé II equation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45** (2012), 155203 (13pp).

[7] Kajiwara, K., Ohta, Y. and Satsuma, J., Casorati determinant solutions for the discrete Painlevé III equation, *J. Math. Phys.*, **36** (1995), 4162–4174.

[8] Mimura, N., Isojima, S., Murata, M. and Satsuma, J. Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42** (2009), 315206 (7pp).

[9] Narasaki, F., Ultradiscrete Painlevé III equation and its special function solution, *Master thesis*, Aoyama Gakuin University, 2012 (*in Japanese*).

[10] 奈良崎史貴, 礒島伸, 薩摩順吉, 符号付き超離散 Bessel 方程式とその特殊解について, 研究集会報告「非線形波動研究の進展 −現象と数理の相互作用−」, 九州大学応用力学研究所, **23AO-S7** (2012), 96–101 (*in Japanese*).

[11] Takahashi, D. and Satsuma, J., A Soliton Cellular Automaton, *J. Phys. Soc. Japan*, **59** (1990), 3514–3519.

[12] 高橋大輔, 薩摩順吉, 単純なソリトン系をなすセル・オートマンについて, 日本応用数理学会論文誌 **1** (1991), 41–60 (*in Japanese*).

[13] Takemura, K. and Tsutsui, T., Ultradiscrete Painlevé VI with Parity Variables, *SIGMA*, **9** (2013), 070 (12pp).

[14] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 3247–3250.