RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B48 (2014), 43–55

点つき球面の写像類群の安定交換子長について (On stable commutator length in the mapping class groups of pointed spheres)

By

佐藤正寿 (Masatoshi SATO)*

Abstract

The intention of this article is to provide a summary of recent joint work with Danny Calegari and Naoyuki Monden on stable commutator length in the mapping class groups of pointed two-spheres and symmetric mapping class groups. We calculate quasimorphisms on symmetric mapping class groups derived from ω-signatures in Gambaudo and Ghys' paper, and give upper and lower bounds on the stable commutator length of some elements in the mapping class groups of pointed spheres.

§1. はじめに

本稿は, Calegari, 門田, 筆者による論文 [8] の解説を目的としたものである。これに加えて, 写像類群の安定交換子長の計算について現在知られている方法や, 筆者の考えるいくつかの問題を提示したい. 論文 [8] においては, 点つき球面の安定交換子長の下からの評価を ω-符号数より得られる擬準同型に Bavard の双対定理を適用することによって得た。また, 上からの評価も擬準同型の性質を用いることで求めている. 特に, これらの評価の方法について述べたい. 以下では, まずいくつかの用語の定義を述べる.

§1.1. 交換子長, 安定交換子長

G を群とし, その交換子部分群 $[G,G]$ を考える. $a,b \in G$ について, $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ と定める.

Received January 1, 2013. Revised May 21, 2013.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 20F12, 57M07; Secondary 57N05.
Key Words: mapping class group; symmetric mapping class group; stable commutator length; ω-signature.
The author was supported by the JSPS Grant-in-Aid for JSPS Fellows 22・2364.
*Faculty of Education, Gifu University, Yanagido 1-1, Gifu 501-1193, Japan.
e-mail: `msato@gifu-u.ac.jp`

Definition 1.1. $x \in [G,G]$ について,

$$\mathrm{cl}(x) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x = [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n]\}$$

と定め, これを $x \in [G,G]$ の交換子長と呼ぶ.

この指数に関する安定化を考え, 安定交換子長と呼ぶ. これは以下のように定義される.

Definition 1.2. $x \in G$, かつ, $x^k \in [G,G]$ を満たす正の整数 k が存在するとする. このとき,

$$\mathrm{scl}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(x^{nk})}{nk}$$

と定める. また, $x^k \in [G,G]$ となる k が存在しない $x \in G$ については, $\mathrm{scl}(x) = \infty$ と定める.

上の定義はもちろん正の整数 k の取り方によらない. また, 交換子長は $[G,G]$ 上の実数値関数であるのに対して, 安定交換子長は $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる G 上の関数である.

§1.2. 写像類群

次に, これから安定交換子長を考える 2 つの曲面の写像類群について復習する. 種数 $g \geq 1$ の有向閉曲面を Σ_g と表す. Σ_g の向きを保つ微分同相全体のなす群 $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ に C^∞ 位相を入れる. 閉曲面 Σ_g の写像類群とは, この微分同相群の弧状連結成分のなす群 $\mathcal{M}_g = \pi_0 \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ のことであった. また, 正の整数 $m \geq 4$ について, 球面 S^2 内に相異なる m 個の点 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ をとる. S^2 の微分同相の中で, $\{q_i\}_{i=1}^m$ を集合として保つもの全体のなす群 $\mathrm{Diff}_+(S^2, \{q_i\}_{i=1}^m)$ に C^∞ 位相を入れたとき, その弧状連結成分のなす群を $\mathcal{M}_0^m = \pi_0 \mathrm{Diff}_+(S^2, \{q_i\}_{i=1}^m)$ と表し, m 点つき球面の写像類群と呼ぶ. m 点つき球面の写像類群の生成系として, 次の $\{\sigma_i\}_{i=1}^{m-1} \subset \mathcal{M}_0^m$ がよく知られている. $i = 1, 2, \cdots, m-1$ について, 点 q_i, q_{i+1} を含む S^2 内の円板 D_i を図のようにとる. D_i を反時計回りに半回転させることで, q_i と q_{i+1} を交換する微分同相 s_i を考える. ただし, s_i は S^2 から D_i, および, ∂D_i の近傍を除いたところでは恒等写像であり, ∂D_i の近傍では滑らかに半回転ねじれているとする. このとき, 特に s_i^2 は ∂D_i に沿う Dehn ツイストになる. 微分同相 s_i の代表する写像類を $\sigma_i \in \mathcal{M}_0^m$ と表すとき, 写像類群 $\mathcal{M}_0^m$ は $\{\sigma_i\}_{i=1}^{m-1}$ で生成されることが知られている. 以上で述べた 2 つの群 $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_0^m$ の交換子長はそれぞれ, 次のような意味で, 境界を 1 つもつコンパクト有向曲面上の有向 Σ_g-束, および, 点つき球面束を考えることに対応する. $\varphi \in [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]$ とする. また, 文字 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ で生成される階数 $2n$ の自由群を F_{2n} と表す. いま, 正の整数 n と, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n} \in \mathcal{M}_g$ が存在して, $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2] \cdots [\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}]$ と表されたとする. 準同型 $\eta : F_{2n} \to \mathcal{M}_g$ を $\eta(x_i) = \varphi_i$ で定めるとき, それぞれの Eilenberg-MacLane 空間の間に連続写像 $\Sigma_{n,1} \to \mathrm{BDiff}_+ \Sigma_g$ がホモトピーを除いて一意的に誘導される. この連続写像による普遍 Σ_g-束の引き戻しとし

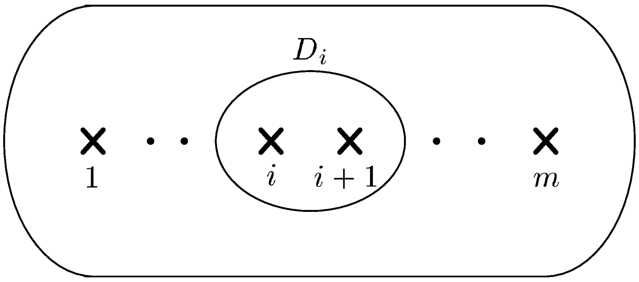

Figure 1. 半ツイスト σ_i

て, $\Sigma_{n,1}$ 上の有向 Σ_g-束が得られる. 特にこの Σ_g-束は境界 $\partial\Sigma_{h,1}$ のモノドロミーとして $\varphi \in \mathcal{M}_g$ をもつ. 逆に境界のモノドロミーとして $\varphi \in \mathcal{M}_g$ をもつ, 曲面 $\Sigma_{h,1}$ 上の有向 Σ_g-束が存在すれば, このモノドロミーを見ることで φ を交換子の積で表すことができる. したがって, 交換子長 $\mathrm{cl}(\varphi)$ は, コンパクト有向曲面上の Σ_g-束として境界のモノドロミーに φ をもつもの全体の中に現われる, 底空間の最小種数に一致する. 点つき球面束の場合も同様である.

§ 2. Bavard の双対定理と擬準同型

一般に, 群の安定交換子長の下からの評価を求める方法として, Bavard の双対定理が知られている. 群 G 上の均質な擬準同型と呼ばれる関数を考え, その値によって安定交換子長の下からの評価が得られる. これについて復習する.

Definition 2.1. 関数 $\phi : G \to \mathbb{R}$ が

$$\sup_{x,y\in G} |\phi(x) + \phi(y) - \phi(xy)| < \infty$$

を満たすとき, 擬準同型とよぶ. 特に上の上限を ϕ の defect とよび, $D(\phi)$ と表す.

Definition 2.2. 擬準同型 $\phi : G \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ について

$$\phi(x^n) = n\phi(x)$$

を満たすとき, 均質とよぶ.

群 G 上の均質な擬準同型全体を $Q(G)$ と表す. これは（一般には無限次元）実ベクトル空間をなす. また, 一般に擬準同型 $\phi : G \to \mathbb{R}$ が与えられたとき, 関数 $\bar{\phi} : G \to \mathbb{R}$ を $\bar{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x^n)/n$ と定めると 均質な擬準同型となることが知られている. これを φ の均質化とよぶ. 特に均質な擬準同型は次のような性質をもつことが知られている. 証明は例えば [19] Lemma 2.5 を見てほしい.

Lemma 2.3. $\phi : G \to \mathbb{R}$ を均質な擬準同型, $x, y \in G$ とする.

(i) $xy = yx$ ならば, $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$,

(ii) $\phi(yxy^{-1}) = \phi(x)$.

また次が成り立つ.

Lemma 2.4. K を有限群とし, 群の完全列

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \xrightarrow{q} H \longrightarrow 1$$

が存在するとする. このとき, 任意の $\phi \in Q(G)$, $a \in G$, $k \in K$ について, $\phi(a) = \phi(ak)$. 特に均質な擬順同型 $\phi : G \to \mathbb{R}$ は H を経由する. よって, $Q(G) = Q(H)$.

Proof. 任意の整数 n について,

$$|\phi(a^n(ak)^{-n}) - \phi(a^n) - \phi((ak)^{-n})| \leq D(\phi).$$

$q(a^n(ak)^{-n}) = 1 \in H$ より, $a^n(ak)^{-n} \in K$. いま K が有限群であることより, これはトーション元であるので, $\phi(a^n(ak)^{-n}) = 0$.

したがって,

$$|\phi(a^n(ak)^{-n}) - \phi(a^n) - \phi((ak)^{-n})| = |\phi(a^n) + \phi((ak)^{-n})| = n|\phi(a) - \phi(ak)| \leq D(\phi).$$

両辺を n で割り, $n \to \infty$ とすれば求める等式が得られる. □

以下の定理は Bavard の双対定理と呼ばれ, これにより均質な擬準同型を用いて安定交換子長の評価ができる.

Theorem 2.5 (Bavard [1])**.** $x \in G$ について,

$$\mathrm{scl}(x) = \sup_{\phi \in Q(G) \setminus \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})} \frac{|\phi(x)|}{2D(\phi)}.$$

§ 3. 写像類群の安定交換子長の下からの評価

写像類群の擬準同型における最も重要な結果の 1 つとして, Bestvina-藤原 [3] によるものがある. 特に Theorem 12 において, $\mathcal{M}_g$, および, $\mathcal{M}_0^m$ 上の均質な擬準同型全体のなす空間は, $g \geq 2$, $m \geq 5$ のとき, 無限次元であることを示している. しかし, 彼らの構成した擬準同型の値と defect を計算することは容易ではなく, そのまま Bavard の双対定理を適用して安定交換子長の評価を得ることは困難である. このため, 論文 [8] の動機の 1 つとして, 写像類群上の擬準同型として計算できるものを調べることがあった. なお, Braid

群においてはすでに ω-符号数から誘導される擬準同型が Gambaudo-Ghys [12] により計算されている．さらに, Cochran-Harvey-Horn [9] は, 無限被覆においても higher-order signature cocycle と呼ばれる Meyer コサイクルの類似物を構成し, 写像類群の部分群である Johnson 核において均質な擬準同型の空間が無限次元であることを示した．

またそれ以外に, 一般に左不変な全順序が定まる群においては擬準同型が得られることが知られている ([13])．しかし, トーション元のある群には左不変な全順序が存在しないことが容易にわかり, 特に閉曲面の写像類群 $\mathcal{M}_g$ や, 点つき球面の写像類群 $\mathcal{M}_0^m$ にはトーション元があるので, この群上ではこの構成を行うことができない．その代わりに, 境界をもつコンパクト有向曲面の写像類群（Braid 群などの点つき曲面の写像類群も含む）であれば, 左不変な全順序が存在することが知られており, 擬準同型を構成できる．

擬準同型を用いる以外にも下からの評価が知られている． 遠藤-Kotschick [11] や Korkmaz [15] は, Dehn twist のべき乗が交換子の積で表されるとき, それにより得られる Lefschetz ファイバー空間に対して, Seiberg-Witten 理論から得られている不等式を用いて, 安定交換子長の下からの評価を得ている．なお, 境界を 1 つもつ有向コンパクト曲面の写像類群については, Baykur-Korkmaz-門田 [2] により境界に沿う Dehn ツイストの安定交換子長が決定されている．

§ 3.1. 結果

論文 [8] においては, 対称的写像類群 $\pi_0 C_g(t)$ 上の擬準同型を計算した．実は, 第 4 節で述べるように全射準同型 $\mathcal{P} : \pi_0 C_g(t) \to \mathcal{M}_0^m$ が存在し, $\operatorname{Ker}\mathcal{P} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ である．したがって, 補題 2.4 を適用することができ, $\pi_0 C_g(t)$ 上の均質な擬準同型は, $\mathcal{M}_0^m$ 上の均質な擬準同型を誘導することがわかる．第 1.1 節で述べた, 点 q_i と点 q_{i+1} を交換する半ツイスト $\sigma_i \in \mathcal{M}_0^m$ について, $\tilde{\sigma}_i \in \mathcal{P}^{-1}(\sigma_i)$ となるある元 $\tilde{\sigma}_i \in \pi_0 C_g(t)$ が存在し次が成り立つ（$\tilde{\sigma}_i$ は第 4 節にて定義する）．

Theorem 3.1. r を $2 \le r \le m$ を満たす整数とする．このとき, 次を満たす擬準同型 $\phi_{m,j} : \pi_0 C_g(t) \to \mathbb{Q}$ が存在する．

(i)

$$\phi_{m,j}(\tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_{r-1}) = \frac{2(r-1)j(m-j)}{m(m-1)},$$

(ii)

$$\bar{\phi}_{m,j}(\sigma_1 \cdots \sigma_{r-1}) = -\frac{2}{r}\left\{\frac{jr(m-j)(m-r)}{m^2(m-1)} + \left(\frac{rj}{m} - \left[\frac{rj}{m}\right] - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}.$$

ここで $\bar{\phi}_{m,j}$ は $\phi_{m,j}$ の均質化であり, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

Theorem 3.2. 擬準同型 $\phi_{m,j} : \pi_0 C_g(t) \to \mathbb{Q}$ とその均質化 $\bar{\phi}_{m,j} : \mathcal{M}_0^m \to \mathbb{Q}$ の *defect* をそれぞれ $D(\phi_{m,j})$, $D(\bar{\phi}_{m,j})$ と表す．このとき次が成り立つ．

(i) $j = 1, 2, \ldots, [m/2]$ について,

$$D(\bar{\phi}_{m,j}) \le D(\phi_{m,j}) \le m - 2.$$

(ii) m が偶数, かつ, $j = m/2$ のとき,

$$D(\bar{\phi}_{m,m/2}) = m - 2.$$

特に $4 \le m \le 8$, $2 \le r \le 6$ の範囲で, 定理 3.1 と定理 3.2 に Bavard の双対定理を用いて得られる $\mathrm{scl}_{\mathcal{M}_0^m}(\sigma_1 \cdots \sigma_{r-1})$ の下からの評価をまとめると次のようになる.

	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
$r=2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{28}$
$r=3$	0	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{11}{504}$
$r=4$	0	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{42}$
$r=5$		0	0	$\frac{2}{175}$	$\frac{11}{840}$
$r=6$			0	0	$\frac{1}{84}$

なお, $r = m-1, m$ のとき, $\sigma_1 \cdots \sigma_{r-1} \in \mathcal{M}_0^m$ はトーション元であるので, 安定交換子長は 0 である.

また, 特に完全列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\mathcal{P}'} \mathcal{M}_0^6 \longrightarrow 1$$

が知られており, $\mathcal{P}'^{-1}((\sigma_1\sigma_2)^6) \subset \mathcal{M}_2$ は Σ_2 内の種数 1 のコンパクト曲面をバウンドする単純閉曲線 s に沿う Dehn ツイスト t_s を含んでいる. これは対称的写像類群の 1 種であり, 詳しくは [4, Theorem 1, Theorem 8] を見てほしい. また, [8, p.11] においても説明している. 定理 3.1 より $\bar{\phi}_{6,2}((\sigma_1\sigma_2)^6) = 8/5$, 定理 3.2 より $D(\bar{\phi}_{6,2}) \le 8$ であるので, 系として次を得る.

Corollary 3.3. *$s \subset \Sigma_2$ を種数 1 の曲面をバウンドする単純閉曲線とする. このとき,*

$$\frac{1}{5} \le \mathrm{scl}_{\mathcal{M}_2}(t_s).$$

§ 4. 対称的写像類群

ここでは対称的写像類群 $\pi_0 C_g(t)$ を定義する. 詳しくは [4][5] を参照していただきたい. $p : \Sigma_g \to \Sigma_h$ を閉曲面 Σ_h 上の分岐被覆もしくは不分岐被覆とする. $f \in \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ と

して次の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Diff}_+ \Sigma_h$ が存在するものを考える．

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_h & \xrightarrow{\bar{f}} & \Sigma_h. \end{array}$$

このような f 全体のなす $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ の部分群を $N_g(p)$ と表す．特に, 被覆 p として正規被覆を考えると, これは被覆変換群 $\mathrm{Deck}(p)$ の正規化群

$$N_g(p) = \{f \in \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g \,|\, \text{任意の } t \in \mathrm{Deck}(p) \text{ について } ftf^{-1} \in \mathrm{Deck}(p)\}$$

に一致する．さらに以下では, 正規化群よりも小さく, 被覆変換群 $\mathrm{Deck}(p)$ の中心化群

$$C_g(p) = \{f \in \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g \,|\, \text{任意の } t \in \mathrm{Deck}(p) \text{ について } ft = tf\}$$

を考え, その弧状連結成分 $\pi_0 C_g(p)$ を対称的写像類群と呼ぶことにする（ここでは, 正規被覆以外でも同種のものを考えられることを強調するため, $N_g(p)$ から説明した）．

簡単のため, 以下で定義する m 次巡回分岐被覆 $p : \Sigma_g \to S^2$ のみを考える．m を 4 以上の整数とする．S^2 上の m 個の点 $\{q_i\}_{i=1}^m$ について, 各 q_i を時計回りに回る loop の表す 1 次ホモロジー類を $\alpha_i \in H_1(S^2 - \{q_i\}_{i=1}^m; \mathbb{Z})$ とおく．被覆空間の一般論から, 全射準同型 $H_1(S^2 - \{q_i\}_{i=1}^m; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を 1 つ定めると, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-被覆 $\Sigma_g \to S^2$ が 1 つ得られる．いま特にこの準同型として, 各 α_i をすべて $1 \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に運ぶものをとり, これにより得られる被覆 $p : \Sigma_g \to S^2$ を考える．この被覆の被覆変換群の生成元を $t \in \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ とおき, $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ における被覆変換 t の中心化群を $C_g(t)(= C_g(p))$ とおく．以下では, この被覆の対称的写像類群 $\pi_0 C_g(t)$ を考える．なお, 特に Riemann-Hurwitz の定理より, $g = (m-2)(m-1)/2$ となる．

まず, この被覆 $p : \Sigma_g \to S^2$ の被覆空間と底空間の微分同相群の間の関係を考える．準同型 $C_g(t) \to \mathrm{Diff}_+ S^2$ を, 次の可換図式を満たす $\bar{f} \in \mathrm{Diff}_+ S^2$ を用いて, $f \mapsto \bar{f}$ により定める．

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & S^2. \end{array}$$

ここで, 特に任意の $x \in S^2$ について, $f(p^{-1}(x)) = p^{-1}(\bar{f}(x))$ となることに注意すると, $\bar{f}$ は被覆 p の分岐点を再び分岐点にうつす．つまり, 定めた準同型 $C_g(t) \to \mathrm{Diff}_+ S^2$ の像は $\mathrm{Diff}_+(S^2, \{q_i\}_{i=1}^m)$ に含まれる．この準同型がこれらの群の弧状連結成分に誘導する準同型を, $\mathcal{P} : \pi_0 C_g(t) \to \mathcal{M}_0^m$ と表す．ここで, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}$ の元は明らかに被覆変換の代表する $C_g(t)$ の弧状連結成分であり, また t^i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ は曲面の 1 次ホモロジー群への作用を調べれば, 非自明な $\pi_0 C_g(t)$ の元であることもわかるので, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P} \cong \mathrm{Deck}(p)$ となる．

なお, 定理 3.1 で述べた $\tilde{\sigma}_i$ は次のように定義される．微分同相 $s_i \in \mathrm{Diff}_+ S^2$ について, 準同型 $C_g(t) \to \mathrm{Diff}_+(S^2, \{q_i\}_{i=1}^m)$ のリフトとして, $p^{-1}(\mathrm{supp}\, s_i) = \mathrm{supp}\, \tilde{s}_i$ を満たす

ものが唯 1 つ存在し, これを $\tilde{s}_i \in C_g(t)$ と表す. この微分同相の代表する弧状連結成分を $\tilde{\sigma}_i \in \pi_0 C_g(t)$ とおく.

§ 4.1. Meyer の符号数コサイクル

ω-符号数について説明するために, まず Meyer の符号数コサイクルについて説明する. n を正の整数として, X を $2n$ 次元コンパクト有向多様体とする. Γ を X 上の局所系として, $\Gamma(x)$ は有限次元実ベクトル空間であるとする. さらに, n が奇数の場合は対称双一次形式, n が偶数の場合は歪対称双一次形式 $\Gamma \otimes \Gamma \to \mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき, X にも交叉形式があるので, これらを合わせて, ホモロジー類 $H_n(X;\Gamma)$ に次のように対称双一次形式が定まる.

$$\begin{aligned} H_n(X;\Gamma)^{\otimes 2} &\cong H^n(X, \partial X;\Gamma)^{\otimes 2} \\ &\xrightarrow{\cup} H^{2n}(X, \partial X;\Gamma^{\otimes 2}) \\ &\to H^{2n}(X, \partial X;\mathbb{R}) \\ &\xrightarrow{[X,\partial X]} \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ここで, 1 行目はポアンカレ双対, 2 行目はカップ積, 3 行目は局所系 Γ における双一次形式, 4 行目は基本類による評価である. 構成から容易にこれは $H_n(X;\Gamma)$ 上の対称双一次形式であることがわかる. ここで, 上の Γ として実ベクトル空間ではなく, 有限次元複素ベクトル空間の局所系を考え, Γ 上に n の偶奇に応じて歪エルミート形式, もしくは, エルミート形式が定まっているときにも, 同様にして $H_n(X;\Gamma)$ 上にエルミート形式が定まる. 以上の設定で, $H_n(X;\Gamma)$ 上には対称双一次（もしくはエルミート）形式が定まるので, その符号数を考えることができる. なお, このとき特に符号数の加法性定理が成り立つ（本当はより強く非加法性定理も成り立つ）ことが知られている.

Theorem 4.1 ([18, Satz I.3.2]). X, Γ を上で述べたものとする. X が *2* つのコンパクト有向 $2n$ 次元多様体 X_-, X_+ を, それぞれの境界のいくつかの連結成分に沿って貼り付けたものであるとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{Sign}(H_n(X;\Gamma)) = \mathrm{Sign}(H_n(X_-;\Gamma|_{X_-})) + \mathrm{Sign}(H_n(X_+;\Gamma|_{X_+})).$$

以下では特に $n=1$ のときを考えたい. S^2 内に, どの 2 つも互いに共通部分のない円板 D_1, D_2, D_3 をとり, 上で述べた X として, $X = S^2 - \amalg_{i=1}^3 \mathrm{Int}\, D_i$ を考える. 写像類 $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_g$ に対して, α, β に沿うモノドロミーとして, φ, ψ をもつ X 上の有向 Σ_g-束が同型を除いて唯 1 つ定まる. これにより, 局所系 $\Gamma = H_1(\Sigma_g;\mathbb{R})$ が得られ, しかも Γ 上には交叉積として歪対称双一次形式が存在する. したがって, 上で述べた $H_1(X;H_1(\Sigma_g;\mathbb{R}))$ 上の対称双一次形式が得られ, 符号数を考えることができる. これを用いて, 写像 $\tau_g : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \to \mathbb{Z}$ を $\tau_g(\varphi, \psi) = \mathrm{Sign}(H_1(X;H_1(\Sigma_g;\mathbb{R})))$ で定義する. また, 特に符号数に加法性が成立するとき, 次が満たされることが知られている.

$$\tau_g(\varphi_2, \varphi_3) - \tau_g(\varphi_1\varphi_2, \varphi_3) + \tau_g(\varphi_1, \varphi_2\varphi_3) - \tau_g(\varphi_1\varphi_2) = 0.$$

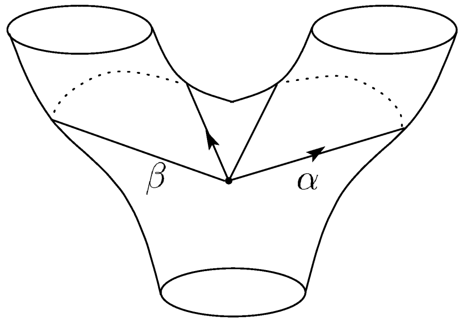

Figure 2. $S^2 - \amalg_{i=1}^{3} \operatorname{Int} D_i$

この議論は [17, §2] を参照していただきたい．したがって, τ_g は写像類群 $\mathcal{M}_g$ の 2-コサイクルであることがわかる．$g=1,2$ のときにはこれをコバウンドする関数 $\phi_g : \mathcal{M}_g \to \mathbb{Q}$ が存在し, Meyer 関数と呼ばれる．$g \geq 3$ のときには存在しないが, 超楕円的写像類群 $\mathcal{H}_g$ と呼ばれる写像類群の部分群に Meyer コサイクルを制限すると, コバウンドする関数 $\phi_g : \mathcal{H}_g \to \mathbb{Q}$ が存在することが知られている．

§ 4.2. ω-符号数

上で述べた Meyer コサイクルの G 同変版を考える．$\varphi, \psi \in \pi_0 C_g(t)$ とする．このとき, $X = S^2 - \amalg_{i=1}^{3} \operatorname{Int} D_i$ 上の Σ_g-束で, 構造群が $C_g(t)$ であるものが同型を除いて一意的に存在する．次に, $H_1(\Sigma_g;\mathbb{C})$ を被覆変換の作用によって固有空間分解する．これは $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ として, $H_1(\Sigma_g;\mathbb{C}) = \bigoplus_{j=1}^{m-1} V^{\omega^j}$ と分解できる．いまこの X 上の Σ_g-束のモノドロミーは被覆変換と可換であるので, モノドロミーは各 V^{ω^j} に作用する．したがって, $H_1(\Sigma_g;\mathbb{C})$ の代わりに各 V^{ω^j} を局所系として考えることができ, さらに V^{ω^j} には $H_1(\Sigma_g;\mathbb{C})$ の交叉形式の制限として歪エルミート形式が存在する．これより, $H_1(X;V^{\omega^j})$ の符号数を考えることができる．写像 $\tau_{m,j} : \pi_0 C_g(t) \times \pi_0 C_g(t) \to \mathbb{Z}$ を $\tau_{m,j}(\varphi,\psi) = \operatorname{Sign}(H_1(X;H_1(\Sigma_g;V^{\omega^j})))$ で定めると, Meyer コサイクルと同様にして, これは $\pi_0 C_g(t)$ の 2-コサイクルであることがわかる．ここで, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_0 C_g(t) \longrightarrow \mathcal{M}_0^m \longrightarrow 1$$

より, 正の整数 n について, $H^n(\pi_0 C_g(t);\mathbb{Q}) \cong H^n(\mathcal{M}_0^m;\mathbb{Q}) = 0$ である．したがって, $\tau_{m,j}$ をコバウンドする関数が存在し, これを $\phi_{m,j} : \pi_0 C_g(t) \to \mathbb{Q}$ と表す．

§ 5. 安定交換子長の上からの評価

安定交換子長の上からの評価を著者はほとんど知らないため, ここでは 1 つだけ方法を紹介する．G を任意の群とし, $a \in G$ の安定交換子長の上からの評価を得ることを考える．$x, y \in G$ として, ある整数 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ が存在して, 任意の擬準同型 $\phi : G \to \mathbb{R}$ に

対して

$$\phi(x) = n_1\phi(a), \quad \phi(y) = n_2\phi(a), \quad \phi(xy) = n_3\phi(a),$$

を満たすものが存在したとする. このとき,

$$D(\phi) \geq |\phi(x) + \phi(y) - \phi(xy)| = |n_1 + n_2 - n_3||\phi(a)|$$

より, 次を得る.

$$\mathrm{scl}(a) = \sup_{\phi \in Q(G), D(\phi) \neq 0} \frac{\phi(a)}{2D(\phi)} \leq \frac{1}{2|n_1 + n_2 - n_3|}.$$

論文 [8] においてはこの方法により上からの評価を求めた.

Example 5.1. 例として $\mathcal{M}_1 = \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ における安定交換子長を考える. この群の安定交換子長は既によく調べられており, 例えば [16] を参照していただきたい. まず,

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$$

とする. $x = t_1^2$, $y = t_2^2$ ととると, 計算より簡単に $xy = \iota(t_1 t_2 t_1^{-1})^{-2}$ であることが確かめられる. また, $\phi(\iota) = \phi(\iota^2)/2 = 0$ と, t_1 と t_2 は共役であることに注意すると, 補題 2.3 を用いて,

$$|\phi(xy) - 2\phi(t_1) - 2\phi(t_2)| = |\phi(\iota) + \phi(t_2^{-2}) - 4\phi(t_1)| = 6|\phi(t_1)| \leq D(\phi).$$

これより特に

$$\mathrm{scl}(t_1) = \lim_{\phi \in Q(\mathcal{M}_1)} \frac{\phi(t_1)}{2D(\phi)} \leq \frac{1}{12}.$$

が得られる.

特に下からの評価も, rotation number, もしくは, Meyer 関数などの擬準同型を用いて得られ, 安定交換子長の値は 1/12 であることがわかる.

この方法において大事なことは, 適切な $x, y \in G$ を選ぶということである. 例えば, 上の例において $x = t_1^2$, $y = t_2$ とおいて計算することもできるが, $\phi(xy) = 0$ であるので, 同様の計算を行うと上からの評価として得られるのは 1/6 であり, 弱い評価となってしまう.

これを $G = \mathcal{M}_0^m$ に対して行い, 特に, m が偶数のとき, $x = \sigma_1^2\sigma_3 \cdots \sigma_{m-1}^2$, $y = \sigma_2\sigma_4 \cdots \sigma_{m-2}$, m が奇数のとき, $x = \sigma_1^2\sigma_3 \cdots \sigma_{m-2}$, $y = \sigma_2\sigma_4 \cdots \sigma_{m-1}^2$ とおくことで次が得られる.

Theorem 5.2. $m \geq 4$ について,

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{M}_0^m}(\sigma_1) \leq \frac{1}{2(m+1) + 4/(m-2)}.$$

また, 論文 [8] Corollary 1.6 において, 超楕円的写像類群のいくつかの元について安定交換子長を決定しているが, 記述が複雑であるため, ここでは種数が 2 のときに限って記載する.

Proposition 5.3. $s \subset \Sigma_2$ を種数 *1* の曲面をバウンドする単純閉曲線, $c \subset \Sigma_2$ を, s と共有点をもたず曲面を分割しない単純閉曲線とする. このとき,

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{M}_2}(t_c^{12} t_s^{-1}) = \frac{1}{2}.$$

なお, 有理数ではない安定交換子長の値をもつ群も知られており, この方法において得られる上からの評価は必ず有理数値であるので, $x, y \in G$ をどのように選んでも安定交換子長の値そのものよりは大きくなってしまう例が存在することがわかる.

§6. 対称的写像類群に関係するいくつかの問題

最後に, 対称的写像類群に関係して著者が考えているいくつかの問題を記す. 最近特に対称的写像類群の 1 つである超楕円的写像類群について, 超楕円的 Torelli 群の無限生成系が Brendle-Margalit-Putman [6] により得られた. また, 湯淺 [21] によって, 対称的 Goldman Lie 代数と呼ばれる, 対称的写像類群が作用する Lie 代数のアーベル化に関する研究など, 対称的写像類群に関連した研究が進展している.

§6.1. 底空間が球面以外の被覆の対称的写像類群の場合

本稿で $p : \Sigma_g \to S^2$ を 1 つ固定して議論したが, 一般には, 底空間 Σ_h に分岐点を m 点もつ正規分岐被覆 $p : \Sigma_g \to \Sigma_h^m$ に対して, 対称的写像類群 $\pi_0 C_g(p)$, および, 準同型 $\mathcal{P} : \pi_0 C_g(p) \to \mathcal{M}_h^m$ が定義できる. さらにこれは $\pi_0 N_g(p)$ に取り替えれば, 正規被覆である必要すらない. 今まで述べてきた議論を同様に追えば, p が正規被覆である場合は ω-符号数をコバウンドする擬準同型, 正規でない場合も被覆空間の写像類群の Meyer コサイクルが考えられる.

Problem 6.1. 一般の被覆の場合の, ω-符号数の表すコサイクル, および, Meyer コサイクルの代表するコホモロジー類は非自明か？また, 自明である場合, それらをコバウンドする擬準同型の均質化は一次独立か？

なお, これに関連して特に次の結果が知られている.

Theorem 6.2 ([14, Theorem A]). $p : \Sigma_g \to \Sigma_h$ を不分岐被覆とするとき,

$$[\tau_g] - (\deg p)\mathcal{P}^*[\tau_h] = 0 \in H^2(\pi_0 N_g(p); \mathbb{Q}).$$

河澄-植村はすべての森田-Mumford 類の間の関係を分岐被覆の場合も込めて記述しているが, ここでは不分岐被覆に限りさらに第 1 森田-Mumford 類の場合についてのみという, 極一部の結果を記載した.

§6.2. 対称的 Torelli 群の 1 次コホモロジー群

本稿で述べてきた m 点で分岐する m 次巡回被覆 $p : \Sigma_g \to S^2$ の対称的写像類群 $\pi_0 C_g(t)$ について, 通常の写像類群と同様に $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ への作用の核を考えることができる. これを $\mathcal{I}_g(t)$ と表すとき, 構成した擬準同型 $\phi_{m,j} : \pi_0 C_g(t) \to \mathbb{Q}$ の $\mathcal{I}_g(t)$ への制限は準同型となる. 1 つの問題として, この 1 次元有理ホモロジー群が有限生成であるか（もっと言えばアーベル化が有限生成であるか）という問題がある.

$2g+2$ 点で分岐する 2 重被覆 $\Sigma_g \to S^2$ の場合には, 対称的写像類群は超楕円的写像類群に一致し, ω-符号数の定めるコサイクルは通常の Meyer コサイクルになる. また, コバウンドする関数を超楕円的 Torelli 群に制限すると, 森田準同型に一致することが森藤 [20, Theorem 5.1] において示されている. 超楕円的写像類群以外の対称的写像類群において, ω-符号数, もしくは, Meyer コサイクルをコバウンドする関数について調べることが今後の課題である.

Problem 6.3.

(i) ω-符号数をコバウンドする関数 $\phi_{m,j}$ を対称的 Torelli 群 $\mathcal{I}_g(t)$ へ制限すると, これらは 1 次独立な準同型であるか？

(ii) $H^1(\mathcal{I}_g(t); \mathbb{Q})^{\pi_0 C_g(t)}$ は $\{\phi_{m,j}\}_{j=1}^{[m/2]}$ で生成されるか？

References

[1] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.

[2] R. İ. Baykur, M. Korkmaz and N. Monden, *Sections of surface bundles and Lefschetz fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. to appear.

[3] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geometry & Topology **6** (2002), no.1, 69–89.

[4] J. S. Birman and H. M. Hilden, *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies **66**, Princeton Univ. Press, (1971) 81–115.

[5] J. S. Birman and H. M. Hilden, *On Isotopies of Homeomorphisms of Riemann Surfaces*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), no. 3, 424–439.

[6] T. Brendle, D. Margalit and A. Putman, *Generators for the hyperelliptic Torelli group and the kernel of the Burau representation at* $t = -1$, arXiv preprint: 1211.4018, 2012.

[7] D. Calegari, *scl*, MSJ Memoirs **20**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[8] D. Calegari, N. Monden and M. Sato, *On stable commutator length in hyperelliptic mapping class groups*, arXiv preprint: 1212.6117, 2012.

[9] T. D. Cochran, S. Harvey and P. D. Horn, *Higher-order signature cocycles for subgroups of mapping class groups and homology cylinders*, Int. Math. Res. Not. **2012**, no. 14 3311–3373.

[10] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann. **316** (2000), no. 2, 237–257.

[11] H. Endo and D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 169–175.

[12] J. M. Gambaudo and É. Ghys, *Braids and signatures*, Bulletin de la Société Mathématique de France **133** (2005), no. 4, 541–580.

[13] T. Ito, *Space of group orderings, quasi morphisms and bounded cohomology*, arXiv preprint: 1006.5491, 2010.

[14] N. Kawazumi and T. Uemura, *Riemann–Hurwitz formula for Morita–Mumford classes and surface symmetries*, Kodai Math. J. **21** (1998), 372–380.

[15] M. Korkmaz, *Stable commutator length of a Dehn twist*, Michigan Math. J. **52** (2004), no. 1, 23–31.

[16] J. Louwsma, *Extremality of the Rotation Quasimorphism on the Modular Group*, Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 2011.

[17] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), no. 3, 239–264.

[18] W. Meyer, *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*, Bonner Math. Schriften **53** (1972).

[19] N. Monden, *On upper bounds on stable commutator lengths in mapping class groups*, Topology Appl. **159** (2012), no. 4, 1085–1091.

[20] T. Morifuji, *On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups*, Journal of the Mathematical Society of Japan **55** (2003), no. 1, 117–129.

[21] W. Yuasa, *Hyperelliptic Goldman Lie algebra and its abelianization*, M.D. Thesis, Osaka University, 2012.