ラグランジュとガウスの代数方程式論の比較的考察

高瀬正仁
九州大学 MI 研究所／日本オイラー研究所

概要

We will review the history of the theory of algebraic equations and inquire into the influences of Lagrange's paper "Réflexions sur la résolution algébrique des équations" on Gauss. In the case of the so-called "the proof of impossibility", Gauss is quite original and we can't find any influence of Lagrange on Gauss. On the other hand, we can find Lagrange's influence on Gauss in the case of the division theory of a circle.

1 ラグランジュの言葉

代数方程式の解法理論はカルダノ，シピオーネ・デル・フェッロ，タルラリア，フェラリなどに代表される 16 世紀のイタリアの代数学派に淵源するが，カルダノの時代からおよそ 200 年の後，18 世紀にいたってラグランジュの出現を見て新たな展開期に入った．ラグランジュは代数方程式の代数的解法の姿形に省察を加え，「方程式の代数的解法の省察」(1770/71 年．以下，「省察」と略称する) という長い論文を執筆して思索の到達点を公表した．この論文は 4 部で編成されているが，第一部の目次は下記の通りである．

第一部は次のように書き出されている．

> 方程式の理論は，その重要性と第一級の創造者たちがこの領域で行った進歩の急速さのゆえに，解析学のあらゆる分野の中でももっとも大きな完成度を獲得するのが当然であると信じられたものであった．だが，その後に現れた幾何学者たちがこの領域に専念し続けたにもかかわらず，彼らの努力は望みうるだけの成功をおさめるというにははるかに遠かった．実を言うと，方程式，方程式の変換，2 個もしくはいくつかの根が等しくなるための，あるいはまたそれらの根が相互に与えられた関係式を満たすための必要条件の性質，それらの根をみつける方法等々に関する事柄は，ほとんどすべて汲み尽くされたのである．また，ある方程式の根がことごとくみな実であるか否かを見分けて，すべての根が実の場合には，正負の根がどれだけあるのかを知るための一般規則も発見された．しかし，今日にいたるまで，方程式の虚根の個数を知るためのいかなる一般規則も知られていないし，実根と虚根の個数が知られたときに，正の実根と負の実根がどれだけ存在するのかを知るための一般規則も得られていない．提示された任意の方程式がいくつかの実根をもつか否かを保証する規則さえも，その方程式の次数が奇数でなければ，あるいはその一番最後の項が負でなければ得られていない．

ここには代数方程式論の領域での諸問題が列挙されているが，ラグランジュが論文「省察」で取り上げたのはこれらの問題ではなく，文字方程式の代数的解法の探索である．ラグランジュはこう言っている．

> 文字方程式の解法に関していうと，カルダノの時代まではほとんど進展が見られなかった．カルダノは 3 次と 4 次の方程式の解法を公表した一番はじめの人である．このテーマでのイタリアの解析学者たちの最初の成功は，この領域で遂行可能な発見のうちの一番最後のものだったと思われる．少なくとも，代数学のこの領域の限界を押し広げようとして今日までになされたあらゆる試みは，3 次と 4 次の方程式に対する新しい方法を見つけるのに役立っただけにすぎないことは確かである．それらの方法のどれも，一般に，いっそう高い次数の方程式には適用できないのである．

代数方程式の次数が 4 を超えると一般方程式の代数的解法は急に困難になり，ラグランジュの時代になってもなお見つからないという状況が語られた．そこでラグランジュはこれまでの歩みに省察を加え，今後の歩みのための指針となるべき「一般原理」を見つけようと試みたという．ラグランジュはこの間の消息を明確に述べている．

> わたしはこの論文において，方程式の代数的解法に関して今日までに見いだされたさまざまな方法を調べ，それらを一般原理に帰着させて，なぜこれらの方法は 3 次と 4 次の方程式に対しては成功し，もっと高い次数の方程式に対してはうまくいかないのかということを，アプリオリにわかるようにしたいと思う．
>
> この研究には二重の利点がある．一方では，3 次の 4 次の方程式の既知の解法に，はるかに

多くの光を注ぐのに役立つであろう．他方では，いっそう高い次数の方程式の解法を究明したいと欲する人々にとって，その目的のためにさまざまな展望を与えてくれるし，わけてもはなはだ大量の無益な歩みと試みを免れさせてくれるという理由により，有用であろう．

文字方程式の解法についていうと，カルダノの時代までほとんど進歩が見られなかった．カルダノは 3 次と 4 次の方程式を解法を公表した一番はじめの人物である．このテーマにおけるイタリアの解析学者たちの最初の成功は，この領域で行うことのできる発見の最後のものであったように思う．少なくとも，代数学のこの領域の限界を押し広げようとして今日までに行われたあらゆる試みは，3 次と 4 次の方程式に対する新しい方法を見い出すのに役立ったにすぎないのは確かである．

カルダノと同時代の弟子でもあったルドヴィコ・フェラリは，4 次方程式の解法のための一般法則をみいだした最初の人であることが知られている．

彼の方法の骨子は，提示された方程式を二つの部分に分け，それぞれに同じ量を付け加えて，平方根をそれぞれ別々に開くことができるようにして，方程式の次数が 2 次以下に下がるようにするところに認められる．この方法は，それ以来，同じ目的のために開発されたあらゆる方法のうち，最も巧妙なものとみなされているものであり，デカルトに先立つあらゆる解析学者により採用されてきた．だが，この高名な幾何学者 [デカルト] は，この方法を，単純さも直裁さもとぼしいが，いくつかの点で方程式の性質にいっそうよく合致する他の方法に取りかえなければならないと考えた．それは，今日の大部分の著作者たちが追随している方法である．そこでわれわれは，これらの二通りの方法を順に調べることから始めたいと思う．続いて，4 次方程式の解法のためのいくつかの周知の方法に歩を向けることにする．それらのうち，特にチルンハウス，オイラー，ベズーの方法を特記しなければならない．

代数方程式の解法理論の省察に向かうラグランジュの思索の方針は上記の通りであり，まぎれる余地はない．このあたりの消息については広く知られていることでもあり，ここで再説する必要はないと思われるが，確認しておきたいことが二つほどある．ひとつはラグランジュのいう「一般原理」のことだが，ラグランジュのいう「一般原理」というのはいわゆる**ラグランジュの分解式**を根底におく解法原理のことである．もうひとつは高次方程式の解法の可能性に関することで，ラグランジュ自身は 5 次以上の次数の代数方程式の代数的解法の可能性についてどのように判断していたのであろうか．この論点については判断が分かれるところだが，本稿では**ラグランジュは高次の一般方程式の代数的解法の可能性を確信していた**と主張したいと思う．論文「省察」の全体を見ると，「ラグランジュの分解式」を梃子にすることにより解法の可能性が開かれると考えていたという印象を受けるが，後半の二つの部（第 3 部と第 4 部）のすべてを費やして論証を推し進めたものの，ラグランジュ自身はついに成功しなかった (そのために，ラグランジュはアーベルのいわゆる「不可能の証明」を認識していたのであろうという推測が生まれるのである)．

代数方程式論はラグランジュの「省察」を俟って根本的に様相が変化した．それまでは代数方程式に根が存在することを自明であるかのようにみなし，式変形の工夫を通じて根の表示式を見つけ

ようとする試みが続いていたが，ラグランジュは出発点に立ち返り，3 次と 4 次の方程式のさまざまな解法を制御する一般原理を探索した．5 次方程式を解くことはできず，「不可能の証明」も考察の枠外にとどまったが，それでもなお「根本に立ち返って省察を加える」という姿勢の影響は大きく広がり，ガウスとアーベルを包摂した．ラグランジュの省察の意義が認められるのは，この一点においてである．

2　ラグランジュの代数方程式論

ラグランジュの論文「省察」の第一部「3 次方程式の解法」に続き，第二部「4 次方程式の解法」では，4 次の代数方程式のいろいろな解法が次々と紹介されていく．4 次方程式の解法は一般に「フェラリの解法」と呼ばれている．フェラリはカルダノに数学を学び，4 次方程式の解法を一番はじめに発見した人物である．ただし，フェラリの解法を公表したのはカルダノで，3 次方程式の解法と同じく『アルス・マグナ』に概要が記述された．このような諸事情を背景にして，ラグランジュの「省察」の第二部は「フェラリの解法」の紹介から説き起こされ，それからデカルト，チルンハウス，オイラー，ベズーの解法へと及んでいく．以下に引くのは書き出しの部分である．

> カルダノと同時代の弟子でもあったルドヴィコ・フェラリは，4 次方程式の解法のための一般法則をみいだした最初の人であることが知られている．
>
> 彼の方法の骨子は，提示された方程式を二つの部分に分け，それぞれに同じ量を付け加えて，平方根をそれぞれ別々に開くことができるようにして，方程式の次数が 2 次以下に下がるようにするところに認められる．この方法は，それ以来，同じ目的のために開発されたあらゆる方法のうち，最も巧妙なものとみなされているものであり，デカルトに先立つあらゆる解析学者により採用されてきた．だが，この高名な幾何学者 [デカルト] は，この方法を，単純さも直裁さもとぼしいが，いくつかの点で方程式の性質にいっそうよく合致する他の方法に取りかえなければならないと考えた．それは，今日の大部分の著作者たちが追随している方法である．そこでわれわれは，これらの二通りの方法を順に調べることから始めたいと思う．続いて，4 次方程式の解法のためのいくつかの周知の方法に歩を向けることにする．それらのうち，特にチルンハウス，オイラー，ベズーの方法を区別しなければならない．

3 次と 4 次の代数方程式の色とりどりの解法を眼前にして，ラグランジュはそれらのすべての解法の根底にあるものの存在を確信し，「省察」の第一部と第二部の全体を通じて具体的に提示することに成功した．それは「ラグランジュの分解式」と呼ばれるものである．「ラグランジュの分解式」は方程式の根と 1 の冪根を用いて組み立てられる有理式であり，根の間に置換を施すと，式の値がさまざまに変化していくつかの値を取る．適当な分解式を採用すると 3 次と 4 次の方程式の解法が導かれるが，解法を可能にする分解式の形は幾通りも可能である．ラグランジュ以前に発見された種々の解法の各々の根底には，その解法をあらしめる分解式が横たわっているというのがラグランジュの所見である．

「省察」の後半の第四部と第五部のテーマは高次方程式の解法である．ラグランジュの思索の究極のねらいは高次方程式の解法を発見することであった．そのためにラグランジュは解法の根本原理に立ち返ろうと試みて「ラグランジュの分解式」を提案し，高次方程式の解法をもたらしてくれる分解式を探索した．この努力は結実しなかったが，解法の存在に寄せる確信は揺るがなかったであろう．解法を求めて継続された息の長い思索の姿が，この間の消息をありありと物語っている．

3 『アリトメチカ研究』より

代数方程式論の領域でガウスが達成したことはいくつもあるが，もっとも根本的なことは「代数学の基本定理」を確立したことであろう．これによって，複素数の範囲内で探索する限り，代数方程式には必ず根が存在することが明らかになった．それまでは存在することを前提として探索していたのである．ガウスは「根本に立ち返って省察を加えた」と言えるであろう

次に引くのは「不可能であること」に寄せる確信を表明するガウスの言葉である．

> よく知られているように，4 次を越える方程式の一般的解法，言い換えると，混合方程式の純粋方程式への還元を見い出そうとする卓越した幾何学者たちのあらゆる努力は，これまでのところつねに不首尾に終わっていた．そうしてこの問題は，今日の解析学の力を越えているというよりは，むしろある不可能な事柄を提示しているのである．これはほとんど疑いをさしはさむ余地のない事態である．(第 7 章「円の分割を定める方程式」，第 359 条より．「混合方程式」は純粋方程式ではない方程式の意で，一般的な形の方程式のこと.)

ガウスの遺稿に「剰余の解析」というのがあり，そこに書き留められたガウスのメモも同主旨である．

> 幾人ものすぐれた幾何学者の努力が繰り返されたにもかかわらず，方程式の一般的解法（言い換えると，純粋方程式への還元）が可能であるという希望はまったく残されていないように思われる．だが，方程式 $x^n - 1 = 0$ の解法により導かれていくあらゆる方程式は，解くことができるか，あるいは同次数の純粋方程式に還元することができることはきわめて注目に値する $\cdots$

後にアーベルが確立した「不可能の証明」が当然のことのように語られているが，高次方程式の解法を探求するのはごく常識的な試みであり，ガウスもまた「代数的に解けること」を確信した一時期があった模様である．ガウスの「数学日記」から，関連するいくつかの項目を拾いたいと思う．

4　ガウスの数学日記より

数学日記 34

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \cdots = y$$

と置くとき，x に関する方程式から y に関する方程式を見つけるための簡単な方法．(1796 年 9 月 16 日)

x に関する代数方程式が与えられたとき，$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = y$ という形の変換を行って y に関する方程式を作ることにより，提示された方程式を代数的に解くことができる場合がある．これはチルンハウスが提案した解法であり，その名にちなんで $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = y$ という形の変換を**チルンハウスの変換**と呼ぶ習慣が定着した．チルンハウスはこの変換を利用し 3 次と 4 次の代数方程式を解くことができたが，ラグランジュもまた 5 次方程式を解く有力な手段としてチルンハウスの変換に期待をかけていたようで，論文「省察」の中でチルンハウスのアイデアを詳細に紹介した．ガウスはチルンハウスの書いたものを直接読んだのかどうか，そのあたりの消息は不明だが，ラグランジュの論文を読んだのはまちがいない．

数学日記 37

方程式の一般的解法を探究して，おそらくはそれを見つけることを可能にしてくれる新しい方法．すなわち，方程式は，

$$\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \cdots$$

を根とする他の方程式に変換される．ここで，

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta, \gamma \cdots$$

である．n は方程式の次数を表す．(1796 年)9 月 17 日

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ は 1 の n 乗根，$\rho', \rho'', \rho''', \ldots$ は提示された方程式の諸根を表す．これらを用いて組み立てられる $\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \cdots$ という形の式はラグランジュが論文「省察」において提案したもので，今日では**ラグランジュの分解式**と呼ばれている．ラグランジュはこの形の式の中に 3 次と 4 次の方程式のさまざまな解法の源泉を見て，種々の解法の統一的な導出に成功した．そこでラグランジュは「ラグランジュの分解式」の考察を通じて 5 次方程式の解法を見つけようと試みたが，これは成功しなかった．ガウスはこのような状勢を受けて探究を続け，「おそらく方程式の一般的解法を見つけることを可能にしてくれる新しい方法」を発見したと確信したのであろう．

数学日記の第 34 項目に付された日付は 1796 年 9 月 16 日，第 37 項目の日付はその翌日である．これらの日記には代数方程式論に寄せるガウスの関心の姿が示されている．ガウスははじめから「不可能であること」を当然視していたのではなく，解けることを確信した一時期もあったのであ

り，しかもその確信はラグランジュが開いた「省察」の場において現れたのである．

5　ラグランジュとガウス　二通の手紙

ジョゼフ・ルイ・ラグランジュは晩年をパリですごしたため，どことなくフランスの数学者のような感じがあるが，生地はイタリアのトリノである．生誕日は 1736 年 1 月 25 日．トリノはサルディニア王国の首都で，サルディニア王国というのは北部イタリアのピエモンテ地方を統治していた国である．オイラーがベルリンの科学アカデミーを離れた後，招聘されてオイラーの後継者になり，数学部門の長に就任した．就任の日付は 1766 年 11 月 6 日と記録されているが，このときちょうど満 30 歳である．論文「省察」を執筆したのもベルリン時代であった．

ベルリン滞在は 20 年ほど続いたが，1787 年 5 月 18 日，ラグランジュはベルリンを離れてパリに向かった．1813 年 4 月 10 日，パリで亡くなったが，こうして生涯を概観するとラグランジュの人生はインターナショナルというか，どこの国というよりも，「ヨーロッパの数学者」という印象を強く受けるのである．

1801 年のラグランジュは 65 歳になっていたが，この年の 9 月，ガウスの著作『アリトメチカ研究』が刊行された．ガウスは満 24 歳であった．ラグランジュはこの書物の第 7 章の円周等分方程式論を見て感嘆したという話が伝えられているが，この出会いにはどこかしら神秘の影が射している．円周等分方程式の理論の舞台の上に，ラグランジュとガウスの二人にしかわからない場が開かれたのであろう．

ラグランジュ全集は全 14 巻という大きな著作集だが，第 14 巻は書簡集にあてられていて，おびただしい数の手紙が収録されている．その中にガウスへの 2 通の手紙が存在する．一通は 1804 年 5 月 31 日付で，1736 年 1 月 25 日に生まれたラグランジュはこのとき 68 歳．ガウスは 27 歳である．もう一通は 1808 年 4 月 17 日付で，ラグランジュは 72 歳，ガウスもまた 30 歳（満年齢．4 月 30 日で満 31 歳）になっていた．わずか 2 通ではあるが，ラグランジュは数学者として今しも出発しようとしていた若い日に，オイラーに宛てて一通の手紙を書き，研究の成果を報告したことのある人物である．オイラーの没後，今度はラグランジュとガウスの間で手紙が交わされた情景を回想すれば，数学は人から人へときわめて具体的な形で手わたされていく学問であることがしみじみと思われて，感慨もまた新たである．

ラグランジュ全集，巻 7 に出ている註記によると，2 通の手紙の所在地はゲッチンゲンの科学協会である．ラグランジュの全集を編纂するために借用を申し入れたところ，シェリングが手紙を添えて快く送付してくれたいう．シェリングは最初のガウス全集の編纂者である．一通目の手紙の日付はもともと「4 月 17 日」とだけ記されていたようで，これはラグランジュ自身が記入したのである．ところがシェリングが送ってきた手紙には「1804 年」の一語も見られた．シェリングの註記によると，これはガウスが書き添えたのだということである．

一通目の手紙にはガウスの天文学への貢献に寄せる賛辞が見られるが，ガウスの著作『アリトメチカ研究』も話題にのぼっている．「あなたの *Disquisitiones*（註．『アリトメチカ研究』の原語表

記は *Disquisitiones arithmeticae*）はたちまちのうちにあなたを第一級の幾何学者たちの系列に列しました」とラグランジュはこの作品をほめたたえ，「最後の章の内容は，ずっと以前からなされてきたもっとも美しい解析学の発見と思う」と言い添えた．『アリトメチカ研究』の最後の章といえば円周等分方程式を論じた第 7 章を指すが，ラグランジュの心をもっとも強く打ったのはこの章のようであった．

6　代数的可解性の基本原理をめぐって

ラグランジュからガウスへの二通目の手紙を見ると，「あの美しい発見をした人」という言葉が目に留まる．これはガウスその人を指す言葉である．手紙の冒頭で，ラグランジュは代数方程式論をテーマとした著作『方程式の解法概論　附. 代数方程式論のいくつかの論点に関するノート』(ラグランジュ全集，巻 8 の全体を占めている．1808 年，第二版が刊行された) をガウスのもとに送付したことを伝えているが，その際，「あの美しい発見をした人」に自分の著作を謹呈することができるのは栄誉なことであると，40 歳以上も年下のガウスに向かって謙虚な挨拶を送ったのである．

『方程式の解法概論」というのは『数値方程式の解法概論　附. 代数方程式論のいくつかの論点に関するノート』のいう作品で，特に附録ではこの方面で「省察」以降に起ったあれこれの出来事が概観されているが，そこにはガウスの円周等分方程式論も取り上げられている．

ラグランジュのいうガウスの「美しい発見」というのは，ラグランジュの言葉をそのまま写すと，「二項方程式の解法を 3 次と 4 次の方程式の解法の原理と同じ原理に帰着させた」という事実の発見を指している．「二項方程式」というのは円周等分方程式 $x^n - 1 = 0$ のことにほかならず，この方程式の左辺が 2 個の項で構成されているところに着目してこの名で呼んだのである．ガウスは円周等分方程式の解法をいくつかの低次数の「補助方程式」（ガウスの用語）の解法に組織的に帰着させ，そのうえでさらに各々の補助方程式の解法を「純粋方程式」（これもガウスの用語である），すなわち $x^k = a$ という形の方程式の解法に帰着させる手順を示したが，その道筋はラグランジュが 3 次方程式と 4 次方程式の解の公式に省察を加えて明らかにした道行（みちゆき）と似たところがある．そこでラグランジュは「(ガウスは) 3 次方程式と 4 次方程式を解くのと同じ原理に帰着させた」と指摘し，これを「美しい発見」と呼んで賞賛したのである．

『アリトメチカ研究』のテーマはどこまでも平方剰余相互法則であり，円周等分方程式論の真意もまたそこにあるのであるから，ラグランジュの手紙に平方剰余相互法則への言及がまったく見られないのはかえって奇妙な感じさえ漂っている．円周等分方程式であればラグランジュも代数的解法を試みたが，その工夫を適用できるのは低次数の円周等分方程式に対してのみであった．これに対しガウスが示した手法はどれほど高い次数であってもあらゆる円周等分方程式に対して等しく適用可能であり，しかもいっそう根源的に，そもそも方程式が代数的に解けるというのはどのようなことなのかという根本原理が明示されたのであるから，ラグランジュが驚嘆したのも無理からぬことであった．だが，代数的解法ということの真意の考察に向かう姿勢こそ，「根本に立ち返って省察を加える」という，ラグランジュが身をもって示した数学研究の姿なのであった．

7　ラグランジュとガウス

ラグランジュが代数方程式論において試みた省察はガウスに深い影響を及ぼしたが，その影響は「根本に立ち返って省察を加える」という一事において際立っている．ガウスは確かにラグランジュの影響を受けたのである．だが，具体的な姿を見るとガウスに独自な思索が目立ち，ラグランジュとの乖離は著しい．高次方程式の代数的可解性に関して言うと，ラグランジュはその可能性をはっきりと確信していたが，ガウスもまたラグランジュの確信を継承し，ラグランジュが越えられなかった壁を乗り越えたと信じた一時期があった．このあたりの消息にはラグランジュの影響が顕著である．だが，ガウスはほどなく判断を転換し，「不可能の証明」の成立を自明のことと思うようになった．この点においてガウスはラグランジュの影響の及ぶ範囲を脱している．ガウスのほうが正しかったのである．

円周等分方程式の場合には事情はもう少し込み入っている．次数が低い場合には，ラグランジュに先立ってド・モアブルの工夫があり，円周等分方程式を代数的に解くことができた．ラグランジュは論文「省察」の第一部「3 次方程式の解法」においてド・モアブルの成功の根拠の解明を試みて，「根の相互関係」に着目した．

一般に n は奇素数として**円周等分方程式** $x^n-1=0$ を考えると，この方程式はつねに根 $x=1$ をもち，多項式 x^n-1 は $x-1$ で割り切れる．この割り算を実行すると，商は

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1$$

となる．そこでこの多項式を 0 と等値して生じる方程式

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1=0$$

を解くことが問題になるが，この方程式の $n-1$ 個の根は著しい相互関係で結ばれている．実際，$\alpha=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ と置くと，これはひとつの根であり，他の根はその冪の形で表示される．すなわち，上記の方程式の根は $n-1$ 個の冪 Macro 10

$$\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\cdots,\alpha^{n-1}$$

で尽くされている．ラグランジュはこの相互関係に着目して，ド・モルガンの解法を説明した．

方程式の代数的可解性を左右するのは**根の相互関係**である．これがラグランジュの省察のひとつの姿である．

代数的可解性の源泉を根の相互関係に見たところはラグランジュの卓見だが，上記のような相互関係だけではまだ不十分で，適用可能な範囲はいくつかの低次数の円周等分方程式に限定されていた．円周等分方程式の代数的可解性を全面的に保証するにはこれでは不十分であり，もっと精密な相互関係を明らかにしなければならないが，ガウスはこれに成功し，『アリトメチカ研究』の第 7 章において円周等分方程式の根は**巡回的**であることを明らかにした．代数的可解性は根の巡回性に

支えられているのである.

円周等分方程式の領域ではラグランジュの省察は正鵠を射ていたが，具体的に表れたものはなお雛形に留まっていた．根の相互関係への着目という一点においてガウスに影響を及ぼしたのは間違いないが，ガウスが発見した根の巡回性はラグランジュの到達した地点からあまりにも遠いところにあった．それでもラグランジュはガウスが遂行したことの意味合いを理解して，書簡を送ってガウスを称讃した．ラグランジュの書簡を得てガウスがどのように思ったか，その消息を伝える資料は見あたらない.

参考文献

［1］ラグランジュ「方程式の代数的解法の省察」, ベルリン王立科学文芸アカデミー新紀要，1770年，134-215 頁;1771 年，138-253 頁（二回に分けて掲載された）．実際の刊行年はそれぞれ 1772, 1773 年．ラグランジュ全集 3，205-421 頁

［2］高瀬正仁（訳）『ガウス整数論』（ガウスの著作『アリトメチカ研究』の邦訳書．朝倉書店，平成 7 年）

［3］高瀬正仁（著）『ガウスの数論　わたしのガウス』（筑摩書房，ちくま学芸文庫 Math & Science, 平成 23 年）

［4］高瀬正仁（訳・解説）『ガウスの《数学日記》』（亀書房制作，日本評論社発行，平成 25 年）