入学試験問題

基礎科目

◎ 問題は ５題 ある。５題 とも解答せよ。

◎ 解答時間は　２時間３０分　である。

◎ 参考書・ノート類・電卓等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ A は n 次複素正方行列であり，その固有値 $a_1, \ldots, a_n$ は相異なるものとする．$\lambda \in \mathbf{C}$ に対し，$AB = \lambda BA$ を満たす n 次複素正方行列 B 全体のなす複素ベクトル空間を $E(\lambda)$ とする：

$$E(\lambda) = \{B\,;\, AB = \lambda BA\}$$

(i) $E(\lambda) \neq \{0\}$ を満たす $\lambda \in \mathbf{C}$ をすべて求めよ．また，そのとき $E(\lambda)$ の次元を決定せよ．

(ii) $E(1)$ の基底を一組与えよ．

$\boxed{2}$ $n \geq 2$，$x_1, \ldots, x_n$ は独立変数として，n 次正方行列の行列式

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{pmatrix}$$

を考える．(注意：第 n 列の指数は $n-1$ ではなく n である．)

(i) $1 \leq i < j \leq n$ のとき $p(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_j - x_i$ で割り切れることを示せ．

(ii) $p(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1 + \cdots + x_n$ でも割り切れることを示せ．

(iii) $p(x_1, \ldots, x_n)$ を 1 次式の積で表わせ．

$\boxed{3}$ 複素数 α に対して

$$B_\alpha = \{z \in \mathbf{C}\,;\, \text{数列 } |z^n - \alpha^n|\ (n = 1, 2, \ldots) \text{ が有界}\}$$

とおく．$B_\alpha \neq \{\alpha\}$ となる α をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 単位開円板 $D = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| < 1\}$ 上の関数 u を

$$u(z) = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$$

で定める．ただし，Im は虚部を表わす．

(i) u は D 上の調和関数であることを示せ．

(ii) $\theta \in \mathbf{R}$ のとき，$\displaystyle\lim_{r \to 1} u(re^{i\theta})$ を求めよ．

(iii) u は閉円板 $\bar{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ 上の連続関数に拡張できるか？

$\boxed{5}$ 次の (A), (B) のうちいずれか一方を選んで解答せよ. (解答用紙には, 問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ.)

(A) 自然数の対を入力にとる次のようなアルゴリズム F を考える.

$$F(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \text{ のとき} \\ F(m-1,1) & m \neq 0 \text{ かつ } n=0 \text{ のとき} \\ F(m-1, F(m, n-1)) & m \neq 0 \text{ かつ } n \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(i) 任意の $n \in \mathbf{N}$ について, $F(2,n) = 2n+3$ が成り立つことを示せ.

(ii) すべての $(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ について, $F(m,n)$ が一意に定義されていることを示せ.

(B) 自然数 n に対して

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)\sqrt{x+1}} \qquad (0 \leq x < \infty)$$

とおく. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = \pi$$

を示せ.