平成１６年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は 5題 ある。5題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ $m \times n$ 実行列 A の最初の n' 列 $(n' \le n)$ よりなる $m \times n'$ 行列を B とする．また，A, B の最初の m' 行 $(m' \le m)$ よりなる $m' \times n$ 行列，$m' \times n'$ 行列をそれぞれ A', B' とする．これらの行列に対して

$$r(A) - r(A') \ge r(B) - r(B')$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$r(X)$ は行列 X の階数とする．

$\boxed{2}$ 2 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a + d \ge 2$ をみたしているとする．ある整数 $k \ge 1$ に対して $A^k = I$ が成り立つとき，$A = I$ であることを証明せよ．ただし，I は 2 次単位行列を表す．

$\boxed{3}$ n 次実正方行列の全体 $M_n(\mathbf{R})$ を n^2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視する．正則行列全体のなす開集合 $U \subset M_n(\mathbf{R})$ からそれ自身への写像 $\varphi : U \longrightarrow U$ と $A \in U$ に対して

$$\delta_{\varphi,A} = \lim_{r \to 0} \frac{\varphi(B_r(A)) \text{ の体積}}{B_r(A) \text{ の体積}}$$

とおく．ただし，$B_r(A)$ は $A = (a_{ij})$ を中心とする半径 r の球

$$\left\{ (x_{ij}) \in M_n(\mathbf{R}) \;\middle|\; \sum_{1 \le i,j \le n} |x_{ij} - a_{ij}|^2 < r^2 \right\}$$

である．次の 2 つの場合に $\delta_{\varphi,A}$ を求めよ．

(i) $\varphi(X) = BX$．ただし，B は n 次実正則行列．

(ii) $\varphi(X) = X^{-1}$．

$\boxed{4}$ λ は非負実数とし，$\{a_{ij}\}_{1 \le j \le i < \infty}$ は以下の条件 (A), (B) をみたす正の実数の 2 重数列とする．

(A) $\displaystyle \lim_{i \to \infty} \max_{1 \le j \le i} a_{ij} = 0$,

(B) $\displaystyle \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \lambda$.

このとき，次の (i), (ii) に答えよ．

(i) $\displaystyle \overline{\lim_{i \to \infty}} \prod_{j=1}^{i} (1 + a_{ij}) \le e^{\lambda}$ を証明せよ．ただし，$\overline{\lim}$ は上極限を表す．

(ii) $\displaystyle \lim_{i \to \infty} \prod_{j=1}^{i} (1 + a_{ij})$ が存在することを示し，その値を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一方を選んで解答せよ．(解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ．)

[A] 集合 X からそれ自身への単射 $f : X \longrightarrow X$ について考える．f を m 回くり返す合成 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m}$ を f^m で表す．X の有限部分集合 Y で

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X \mid f^m(x) \in Y\}$$

をみたすものがあるとする．このとき，次を証明せよ．

(i) 任意の $x \in X$ に対して

$$T_x = \{f^m(x) \mid m = 1, 2, \cdots\} \subset X$$

は有限集合である．

(ii) X は有限集合である．

[B] 実数 a に対して

$$f(a) = \int_{\Gamma} e^{2az - z^2} \frac{dz}{z}$$

とおく．ただし，ε を正の実数として，Γ は下図に示すように複素平面内において実軸上を $-\infty$ から $-\varepsilon$ に進み，次に円周 $|z| = \varepsilon$ 上を時計回りに ε に進み，その後実軸上を $+\infty$ まで進む積分路とする．このとき，$f(a)$ は a によらない適当な定数 c_1, c_2 を用いて

$$f(a) = c_1 \int_0^a e^{t^2} dt + c_2$$

と表されることを示せ．また，定数 c_1, c_2 を求めよ．なお，計算に際し

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

は既知としてよい．