平成１７年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は 5題 ある。5題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　３時間　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は、問題１と２は小問ごと、問題３、４、５は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ 次の (i), (ii), (iii) のすべてに解答せよ.（解答は小問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号欄に 1(i), 1(ii), 1(iii) と記入せよ.）

(i) n が十分大きい正整数であるとして

$$100^n, \quad n^{100}, \quad n^n, \quad (2n)!, \quad n!$$

を大きい順に並べ，その理由を簡単に述べよ.

(ii) 次の積分 I の値を求めよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

(iii) n を正整数，C を円 $\{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ を反時計回りに一周する経路とするとき，次の積分 I_n の値を求めよ.

$$I_n = \int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

$\boxed{2}$ 次の (i) と (ii) に解答せよ.（解答は小問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号欄に 2(i), 2(ii) と記入せよ.）

(i) α を実定数とする．実 3 変数 (x, y, z) の関数

$$f(x, y, z) = (\alpha + 1)x^2 + (\alpha + 1)y^2 + \alpha z^2 + 2xy + 2\alpha xz + 4yz$$

が任意の (x, y, z) $(\neq (0, 0, 0))$ に対して常に正の値を取るための，α に関する必要十分条件を求めよ.

(ii) $n \times n$ 行列 A の各列の成分は 1 が高々一個，-1 が高々一個でその他は 0 であるとする．このような行列 A の行列式の取り得る値を求めよ.

$\boxed{3}$ 正定数 a に対し数列 x_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = a + 2x_n^2 \quad (n \geq 0)$$

により定める．$n \to \infty$ のとき x_n が有限値に収束するための，a に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{4}$ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $(0 \leq x \leq 1)$ として関数 f を定義する．このとき，

$$(\log x)(\log(1 - x)) + f(x) + f(1 - x)$$

が $0 < x < 1$ で定数となり，その定数は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ で与えられることを示せ.

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一題を選んで解答せよ.（解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ.）

[A] E を実 p 次元線形空間，F を実 q 次元線形空間とし，$\mathrm{Hom}(E,F)$ で E から F への実線形写像全体のなす線形空間を表わすものとする．E の元 e を固定して写像 $\varphi : \mathrm{Hom}(E,F) \to F$ を

$$\varphi(f) = f(e) \qquad (f \in \mathrm{Hom}(E,F))$$

で定めるとき，φ は実線形写像であることを示し，さらにその階数を求めよ．

[B] 2つの実パラメータ α, β を含む次のような $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ に関する連立一次方程式 (E) を考える．

$$(E) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5-\alpha-3\beta \\ -2 \\ 2+2\alpha+2\beta \\ 6 \end{pmatrix}$$

このとき次の (i), (ii) に答えよ.

(i) 解が存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ.

(ii) 解が一意に存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ.