平成２１年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある．５題 とも解答せよ．

◎　解答時間は　３時間　である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと．

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．

3　解答は, 問題１は小問ごと, 問題２，３，４，５は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること．

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい．

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す．

$\boxed{1}$ 次の (i), (ii), (iii) の問に答えよ.（解答は小問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号欄に 1(i), 1(ii), 1(iii) と記入せよ.）

(i) 実関数 $f(x) = e^x \sin x$ の n 階導関数を求めよ．ただし, n は正の整数とする.

(ii) 正の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x}.$$

(iii) γ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を相異なる実数とする．実数 a_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ で, 任意の実数 x に対し

$$\sum_{i=1}^{N} a_i e^{\gamma_i x} = 0$$

となるものは, $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$ に限ることを示せ.

$\boxed{2}$ 複素 n 次正方行列 A, B に対し

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2 + \sqrt{-1}(AB - BA))$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$ 正の整数 m に対し

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2m}}$$

とおく.

(i) 積分 I_m の値を求めよ.

(ii) 極限値 $\lim_{m \to \infty} I_m$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 複素 n 次正方行列 A に対し, 複素 n 次正方行列 X で A と可換 $(AX = XA)$ なもの全体のなす複素ベクトル空間を V とする．このとき, V の次元は n 以上であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ n を正の整数とし, 0 でない複素数 α に対して α の n 乗根を $\beta_1, \cdots, \beta_n$ とする．このとき, 複素変数 z に関する次の恒等式を示せ.

$$\frac{1}{1 - \alpha z^n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \beta_j z}.$$