平成２１年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １３題 ある. そのうち 2題 を選択して解答せよ.

◎　解答時間は　２時間３０分　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 選択表を上に置き, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$ R を正規局所環 (整閉整域でありかつ局所環である可換環) とし, $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアル, K を R の商体, k を剰余体 $R/\mathfrak{m}$ とする. 多項式 $f(x) \in R[x]$ を考え, $k[x]$ における $f(x)$ の像が 0 でないと仮定する. K の元 u が $f(u) = 0$ をみたすとき, 次の (i), (ii) を証明せよ.

(i) $f(0) \notin \mathfrak{m}$ ならば, $u \in R$ または $u^{-1} \in \mathfrak{m}$ が成り立つ.

(ii) k が無限体ならば, $u \in R$ または $u^{-1} \in \mathfrak{m}$ が成り立つ.

$\boxed{2}$ 有限群 G が次の二条件 (A), (B) をみたすとき, G の指標表を求めよ.

(A) G は指数 2 の部分群 H を含み, H の指標表は

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

である. ただし, H の共役類を C_1, C_2, C_3 とし, H の既約指標を χ_1, χ_2, χ_3 とする.

(B) G の指標値はすべて有理数である.

$\boxed{3}$ 複素 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbf{C})$ を自然に $\mathbf{C}^{n^2}$ と同一視し, 位相空間とみなす. $I \in M_n(\mathbf{C})$ を単位行列とする. 整数 $d \geq 1$ に対し,

$$\mathcal{S}_d = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^d = I\},$$

$$\mathcal{S}_d^* = \mathcal{S}_d \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{d-1} \mathcal{S}_k\right)$$

と定義する. このとき, $\mathcal{S}_d^*$ は $M_n(\mathbf{C})$ の閉集合であることを示せ.

$\boxed{4}$ $\mathbf{C}^2$ の部分集合

$$P_1 = \{\ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z = 0\ \},$$
$$P_2 = \{\ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid w = 0\ \},$$
$$Q_\lambda = \{\ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z = w + \lambda\ \}$$

を考える. ただし, λ は複素数とする.

(i) ホモロジー群 $H_*(\mathbf{C}^2 \setminus (P_1 \cup P_2); \mathbf{Z})$ を求めよ.

(ii) ホモロジー群 $H_*(\mathbf{C}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup Q_\lambda); \mathbf{Z})$ を求めよ.

$\boxed{5}$ 次の微分方程式を考える.

$$(*)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\right)u=0.$$

(i) $u_1(x)=e^{-x^2/4}$ は $(*)$ の解であることを示し, それを利用して $u_2(0)=0$, $\dfrac{du_2}{dx}(0)=1$ をみたす $(*)$ の解 $u_2(x)$ を (積分表示の形で) 求めよ.

(ii) $x\longrightarrow+\infty$ のとき

$$e^{-x^2/4}u_2(x)=\sum_{k=1}^{3}a_k\frac{1}{x^k}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

と表されることを示せ. また, 定数 a_1,a_2,a_3 を求めよ.

$\boxed{6}$ 連続微分可能な関数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ が

$$f(0)=f(1)=0$$

をみたすとき, 次の不等式を示せ.

$$\int_0^1|f(x)|^2dx\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^1|f'(x)|^2dx.$$

$\boxed{7}$ xy 平面上の極座標を (r,θ) とする $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$. 頂角 α $(0<\alpha<\pi/2)$ の扇形領域

$$D=\{\ (r,\theta)\ |\ 0<r<1, 0<\theta<\alpha\ \}$$

を考える. 断面が D のまっすぐな管の中を流れる流体の速度を $u=u(x,y)$ とするとき, 次の方程式が成り立つことが知られている.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2} &=& C & (D\text{ の内部}),\\ \qquad\qquad u &=& 0 & (D\text{ の境界上}).\end{cases}$$

ここで C は定数であり, u は D 上で境界までこめて連続な関数である. このとき, 次の問に答えよ.

(i) 関数 $u_1=u_1(x,y)$ を

$$u(x,y)=\frac{Cr^2}{4}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+u_1(x,y)$$

で定めるとき, D において u_1 がみたす方程式, および, D の境界における u_1 の値を求めよ.

(ii) u_1 の θ に関するフーリエ級数展開

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(r)\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}$$

において, $A_k(r)$ $(k=1,2,\cdots)$ を求めよ.

$\boxed{8}$ 数値積分に関する次の問に答えよ.

(i) $f(x)$ を, 閉区間 $[0,1]$ で定義された C^2 (2回連続微分可能) 関数とする. 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^2\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{1}{2}f(1)\right)\right)\right\}$$

を求め, その結果をふまえて数値積分における台形公式の有用性を述べよ.

$$\left(\text{ヒント}:\int_0^{1/n}f(x)dx-\frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)\right)=\int_0^{1/n}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2n}\right)f''(x)dx.\right)$$

(ii) 次の積分

$$\int_{-1}^{1}\sin((1-x^2)^{1/3})dx$$

を数値的に精度よく求めるにはどのような方法が考えられるか. 複数の方法を挙げて, その簡潔な説明と良い方法であると思う理由を述べよ.

$\boxed{9}$ 静電磁場下でスピン 1/2 の荷電粒子の運動を非相対論的量子力学として考える. 簡単のため, 粒子は単位質量を持ち, 単位正電荷に荷電しているとしよう. 自然単位系 $c=\hbar=1$ の下で, 系のハミルトニアンは

$$\hat{H}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}))]^2+U(\hat{\boldsymbol{x}})$$

で与えられるものとする. ここに, $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ は位置演算子, $\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3)$ は運動量演算子, $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})$ はベクトルポテンシャルとし, $U(\hat{\boldsymbol{x}})$ は静電場に由来するポテンシャルである. また, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ をパウリ行列として, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ とおいた.

(i) 一様静磁場 $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルとして $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{x}}$ と取れることを示せ. また, このとき

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{p}}^2+\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{x}})^2-\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{B}+U(\hat{\boldsymbol{x}})$$

となることを示せ. ただし, $\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ は角運動量演算子である.

(ii) 一様静磁場が $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ (B は正定数) で与えられ, さらに

$$U(\hat{\boldsymbol{x}})=\frac{V}{4}(2\hat{x}_3^2-\hat{x}_1^2-\hat{x}_2^2)\quad(V\text{ は正定数})$$

である場合を考える. ただし, B は $\sqrt{V}$ より充分大きいと仮定する. このとき, 互いに独立な 3 個のボゾンに対する消滅生成演算子 $\hat{a}_i,\hat{a}_i^\dagger$ $(i=1,2,3)$ および 1 個のフェルミオンの消滅生成演算子 $\hat{f},\hat{f}^\dagger$ をうまく導入することにより, 適当な定数 $\omega_1<0,\ \omega_2>0,\ \omega_3>0,\ \omega_f>0$ を用いて,

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{3}\omega_i\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i+\frac{1}{2}\right)+\omega_f\left(\hat{f}^\dagger\hat{f}-\frac{1}{2}\right)$$

と書き表せることを示せ.

$\boxed{10}$ A が実 n 次歪対称行列 ($A^{\mathrm{T}} = -A$, ${}^{\mathrm{T}}$ は転置) であるとき, 二つの線形不等式 $Ax \geq \mathbf{0}$, $Ax + x > \mathbf{0}$ を同時にみたす $x \geq \mathbf{0}$ が存在することを示せ. ただし, $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ に対して, $x \geq y$ は $x_i \geq y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を意味し, $x > y$ は $x \geq y$ かつ $x \neq y$ を意味するものとする.

$\boxed{11}$ 頂点集合 V, 辺集合 $A \subset V \times V$ からなる有向グラフ $G = (V, A)$ において, 頂点の番号付け (全単射) $\sigma : V \to \{1, 2, \cdots, n\}$ を考える. ただし, G は自己閉路を含まず, $n = |V|, m = |A|$ とする. 始点 u, 終点 v の辺 $a = (u, v) \in A$ は, $\sigma(u) < \sigma(v)$ のとき前向き, $\sigma(u) > \sigma(v)$ のとき後向きという. 有向閉路 C の中の後向きの辺の本数を C の回転数といい, $w(C)$ と表す. $w(C) = 1$ となる有向閉路 C は整合的とよばれる. すべての辺 $a \in A$ に対して, a を含む整合的な有向閉路が存在するとき, 頂点の番号付け σ は整合的であるという. 与えられた σ が整合的か否かを判定する高々$O(nm)$ 時間のアルゴリズムを設計せよ.

$\boxed{12}$ 型のないラムダ計算において, 線形なラムダ項を以下のように定義する.

1. 変数は線形なラムダ項である.
2. M が線形なラムダ項であり, x が M の自由変数に含まれるとき, $\lambda x.M$ は線形なラムダ項である.
3. M と N が線形なラムダ項であり, M と N に共通する自由変数がないとき, MN は線形なラムダ項である.

ラムダ項の上の 1 ステップの β 簡約関係を $\to_\beta$ で表すこととする. すなわち, $\to_\beta$ は

- $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$
- $M \to_\beta M'$ ならば, $\lambda x.M \to_\beta \lambda x.M'$, $MN \to_\beta M'N$ および $NM \to_\beta NM'$

をみたすラムダ項の上の最小の二項関係である. 以下の問に答えよ.

(i) M が線形なラムダ項であり, かつ $M \to_\beta N$ であるならば, N も線形なラムダ項であることを示せ.

(ii) M が線形なラムダ項であるとき, M からはじまる無限に長い β 簡約列

$$M \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots$$

は存在しないことを示せ.

(iii) M が線形なラムダ項であり, $M \to_\beta N_1$ かつ $M \to_\beta N_2$ であるならば, ある線形なラムダ項 L が存在して, $N_1 \to_\beta L$ かつ $N_2 \to_\beta L$ となることを示せ.

$\boxed{13}$ 集合 X と, X 上の二項関係 $\xrightarrow{a}$, $\xrightarrow{b}$ の 3 つ組を, a と b をラベルに持つ状態遷移システム（略してシステム）といい, 集合 X の元を $\mathcal{S}$ の状態とよぶ. たとえば, $X = \{x_0, x_1\}$, $\xrightarrow{a} = \{(x_0, x_0)\}$, $\xrightarrow{b} = \{(x_0, x_1)\}$ からなる 3 つ組 $\mathcal{S} = (X, \xrightarrow{a}, \xrightarrow{b})$

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & x_1 \end{tikzcd}$$

は, システムの例である.

システム $\mathcal{S} = (X, \xrightarrow{a}, \xrightarrow{b})$ が与えられたとする. 状態集合 X 上の二項関係 R が次の条件 (A), (B) を同時にみたすとき, R を $\mathcal{S}$ 上の双模倣関係とよぶ.

(A) 任意の状態 $x, y \in X$ および各ラベル $l \in \{a, b\}$ について
$$(x, y) \in R \ \wedge \ x \xrightarrow{l} x' \quad \Longrightarrow \quad \exists y' \in X. \left(y \xrightarrow{l} y' \ \wedge \ (x', y') \in R \right).$$

(B) 任意の状態 $x, y \in X$ および各ラベル $l \in \{a, b\}$ について
$$(x, y) \in R \ \wedge \ y \xrightarrow{l} y' \quad \Longrightarrow \quad \exists x' \in X. \left(x \xrightarrow{l} x' \ \wedge \ (x', y') \in R \right).$$

また, システム $\mathcal{S}$ の状態 x, y について, $\mathcal{S}$ 上の双模倣関係で (x, y) を含むものが存在することを, $x \sim y$ であらわす.

次の問に答えよ.

(i) 次のシステム $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ について, それぞれ $x_0 \sim y_0$ が成立するかどうか調べよ.
$$\mathcal{S}_1 = \left(\begin{array}{l} X = \{x_0, y_0, y_1\}, \\ \xrightarrow{a} = \{(x_0, x_0), (y_0, y_1), (y_1, y_0)\}, \\ \xrightarrow{b} = \emptyset \end{array} \right),$$
$$\mathcal{S}_2 = \left(\begin{array}{l} X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4\}, \\ \xrightarrow{a} = \{(x_0, x_1), (x_1, x_3), (y_0, y_1), (y_0, y_2), (y_2, y_4)\}, \\ \xrightarrow{b} = \{(x_1, x_2), (y_1, y_3)\} \end{array} \right).$$

(ii) システム $\mathcal{S}$ が与えられたとき, $\sim$ が $\mathcal{S}$ の状態集合上の同値関係となることを示せ. さらに, $\sim$ が双模倣関係であることを示せ.