平成２３年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １２題 ある．そのうち <u>２題</u> を選択して解答せよ．

◎　解答時間は　<u>２時間３０分</u>　である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は，指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと．

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．一問を二枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．

4　提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，下書き用紙をその下に揃え，選択表を上に置き，記入した面を外にして，一括して二つ折りにして提出すること．

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい．

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は，それぞれ，整数，有理数，実数，複素数の集合を表す．

$\boxed{1}$ p と l は素数とし，$p < l$ と仮定する．有限群 G に対して次の条件 $(*_{p,l})$ を考える．

$(*_{p,l})$ 　　　　G は，位数 pl の非アーベル群である．

(i) 有限群 G が $(*_{p,l})$ を満たすと仮定する．このとき，G の中に位数 l の部分群がただ一つ存在し，かつ正規部分群になることを示せ．

(ii) $(*_{p,l})$ を満たす有限群 G が存在するとき，$l-1$ は p で割り切れることを示せ．

(iii) 有限群 G_1, G_2 が $(*_{p,l})$ を満たすとき，G_1 と G_2 は有限群として同型であることを示せ．

(iv) ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ が $(*_{p,l})$ を満たすような，素数 $p < l$ と，体の有限次ガロア拡大 L/K が存在することを示せ．

$\boxed{2}$ 複素1変数多項式環 $\mathbf{C}[x]$ の部分環 R について考える．R は $\mathbf{C}$ を含み，商ベクトル空間 $\mathbf{C}[x]/R$ は $\mathbf{C}$ 上1次元であると仮定する．

(i) $q(x) \in R$ かつ $xq(x) \in R$ を満たす2次式 $q(x)$ が存在することを示せ．

(ii) 次の (a), (b) のいずれかが成立することを示せ．

(a) 二つの相異なる複素数 α, β が存在して，

$$R = \left\{ f(x) \in \mathbf{C}[x] \,\middle|\, f(\alpha) = f(\beta) \right\}.$$

(b) 複素数 α が存在して，

$$R = \left\{ f(x) \in \mathbf{C}[x] \,\middle|\, \frac{df}{dx}(\alpha) = 0 \right\}.$$

$\boxed{3}$ R を複素 n 変数形式的ベキ級数環 $\mathbf{C}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ とし，$\sigma : R \longrightarrow R$ を $\mathbf{C}$ 代数としての自己同型写像とする．自然数 $k \geq 2$ について，$\sigma^k = \overbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}^{k}$ が R の恒等写像であるならば，以下の (i), (ii) を満たす R の元 $z_1, \ldots, z_n$ と 1 の k 乗根 $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ が存在することを示せ．

(i) $Rz_1 + \cdots + Rz_n$ は R の極大イデアル．

(ii) すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$\sigma(z_i) = \zeta_i z_i$.

$\boxed{4}$ n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の n 次元トーラス $T^n = \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{ 個}}$ への作用を

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n,\, x_1, \ldots, x_n \in S^1)$$

により定義する．このとき，商空間 $X_n = T^n/\mathfrak{S}_n$ について考える．

(i) X_2 の整係数ホモロジー群 $H_*(X_2, \mathbf{Z})$ を求めよ．

(ii) X_3 の整係数ホモロジー群 $H_*(X_3, \mathbf{Z})$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 上半平面 $H = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y > 0 \,\}$ の各元 (x, y) を行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$$

に対応させると，行列の積と自然な C^∞ 級多様体の構造によって H はリー群になる．単位元は $(0, 1)$ である．このとき，次の各問に答えよ．

(i) H 上の右不変 1 次微分形式 ω_1, ω_2 が単位元においてそれぞれ dx, dy に等しいとする．このとき，ω_i $(i = 1, 2)$ を dx と dy を用いて表せ．さらに，$d\omega_i$ を ω_1 と ω_2 を用いて表せ．(ただし，リー群 G 上の 1 次微分形式 ω が右不変であるとは，各 $g \in G$ に対して $\varphi_g : G \longrightarrow G$ を $\varphi_g(h) = hg$ で定めるとき，$\varphi_g^*\omega = \omega$ が成り立つこととして定義される.)

(ii) Γ を H の部分群とし，商空間 H/Γ が，次の条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級多様体の構造を持つと仮定する．

$(*)$ 射影 $\pi : H \longrightarrow H/\Gamma$ は局所微分同相．(すなわち，各 $(x, y) \in H$ に対して，十分小さな開近傍 U をとると，π の U への制限は U と $\pi(U)$ の微分同相を与える.)

このとき，H/Γ 上の 1 次微分形式 $\widetilde{\omega_i}$ $(i = 1, 2)$ で $\pi^*\widetilde{\omega_i} = \omega_i$ を満たすものが存在することを示せ．

(iii) (ii) の仮定の下では H/Γ はコンパクトになり得ないことを示せ．

$\boxed{6}$ $f(z)$ を $\mathbf{C}$ 上の正則関数とし，$D = \{\, w \in \mathbf{C} \,|\, |w| < 1 \,\}$, $D_0 = D \setminus [0, 1)$ とおく．$w \in D_0$ に対して，

$$F(w) = \int_0^1 \frac{f(z)}{z - w} dz \qquad \text{(ただし，積分路は実軸上の区間 } [0, 1] \text{ とする)}$$

と定義するとき，次の問に答えよ．

(i) $F(w)$ は D_0 上の正則関数を定めることを示せ．

(ii) $F(w)$ は開区間 $(0, 1)$ を越えて（$D \setminus \{0\}$ 上の多価解析関数として）解析接続されることを示せ．さらに，$F(w)$ を原点の回りを反時計回りに一回り解析接続して得られる D_0 上の関数を $F_1(w)$ で表すとき，$G(w) = F_1(w) - F(w)$ を求めよ．

(iii) $H(w) = F(w) - \dfrac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-w)G(w)$ は D 全体で正則になることを示し，その $w = 0$ での値 $H(0)$ を $f(z)$ を用いて表せ．ただし，$\mathrm{Log}\, u$ は $\log u$ の主値，すなわち $u > 0$ のとき $\mathrm{Log}\, u \in \mathbf{R}$ となる $\log u$ の分枝を表すものとする．

$\boxed{7}$ 区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数 $u=u(x)$ で，$u(0)=0, u(1)=1$ を満たすもの全体を X と表す．正の実数 α と $u \in X$ に対して，

$$I_\alpha(u) = \int_0^1 x^\alpha \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

と定義する．このとき

$$\inf_{u \in X} I_\alpha(u) = \begin{cases} 1-\alpha & (0<\alpha<1) \\ 0 & (1 \le \alpha < \infty) \end{cases}$$

を証明せよ．

$\boxed{8}$ z 軸を中心軸として一定角速度で回転している半無限領域 $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \le 0\}$ において，x,y 方向に一様に流れる粘性流 $(u(z,t), v(z,t), 0)$ を考える．ただし t は時間である．最初静止していた流体が表面 $z=0$ における一定応力で駆動されるとき，複素速度 $w(z,t)=u(z,t)+iv(z,t)$ は次の微分方程式と初期・境界条件に従うことが知られている．

$$\frac{\partial w}{\partial t} + iw = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$w(z,0)=0 \quad \text{(初期条件)},$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = 1,\ \ w(z,t) \text{ は } z \longrightarrow -\infty \text{ で有界} \quad \text{(境界条件)}.$$

ただし $i=\sqrt{-1}$ である．この方程式に従う流体の加速度 $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を以下のように求めよ．

(i) $z=0$ および $z \longrightarrow -\infty$ における境界条件を満たす定常解 $f(z)$ を求めよ．さらに $w(z,t)=f(z)-g(z,t)$ とおいたときの $g(z,t)$ が満たす方程式と初期条件および境界条件を記せ．

(ii) z に関するフーリエ cosine 変換

$$g(z,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\zeta,t)\cos(\zeta z)\,d\zeta, \quad G(\zeta,t) = \int_{-\infty}^0 g(z,t)\cos(\zeta z)\,dz$$

を用いて $G(\zeta,t)$ を求めよ．

(iii) $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を求めよ．

$\boxed{9}$ 半直線 $\mathbf{R}_+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \}$ 上を運動する一粒子の量子力学系を考える．位置演算子 X, 運動量演算子 P に対して，正準交換関係 $[X, P] = iI$（ただし，$i = \sqrt{-1}$, I は恒等演算子）を課し，次のような演算子を導入する．

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + X^{-2}), \quad D = \frac{1}{2}(PX + XP), \quad K = \frac{1}{2}X^2,$$
$$L_0 = \frac{1}{2}(H + K), \quad L_{\pm 1} = \frac{1}{2}(H - K \mp iD) \quad \text{（複号同順）}.$$

なお，シュレディンガー表示では $X = x$, $P = -i\dfrac{d}{dx}$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ であり，以下の問では必要に応じてこの表示を用いてもよい．

(i) 次の交換関係を示せ．

$$[D, H] = 2iH, \quad [D, K] = -2iK, \quad [H, K] = -iD,$$
$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0, \quad [L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1} \quad \text{（複号同順）}.$$

(ii) 演算子

$$C = \frac{1}{2}(HK + KH) - \frac{1}{4}D^2$$

は恒等演算子 I の定数倍になることを示し，その定数を求めよ．また，

$$C = L_0(L_0 - 1) - L_{-1}L_1$$

と表せることも示せ．

(iii) H のスペクトルは連続であるが，L_0 は離散スペクトルを持つ．そこで，L_0 に対する基底状態を $|h\rangle$，その固有値を h で表す．このとき，$L_1|h\rangle = 0$ であることを示せ．

(iv) シュレディンガー表示で考える場合に，(iii) の $|h\rangle$ に対応する波動関数 $\psi_h(x)$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ で $\lim_{x \to +0} \psi_h(x) = 0$ を満たすものを求めよ．またこのときの h の値を求めよ．

$\boxed{10}$ 2個以上の元を含む有限集合 S と関数 $d : S \times S \longrightarrow \mathbf{R}$ を考える．ただし，任意の $u \in S$ に対して $d(u, u) = 0$ を満たし，任意の $u, v \in S$ に対して $d(u, v) = d(v, u) \geq 0$ を満たすものとする．S の任意の空でない部分集合 R に対して，

$$\sigma(R) = \max \{ d(u, v) \mid u, v \in R \}$$

と定める．S の空でない部分集合 R_1, R_2 への分割のうちで，

$$\mu(R_1, R_2) = \max \{ \sigma(R_1), \sigma(R_2) \}$$

が最小となるものを見つけたい．以下の問に答えよ．

(i) S を頂点集合とする木 T は2部グラフであること，すなわち頂点集合 S を S_1, S_2 に分割して，T の各辺が S_1 の点と S_2 の点を結ぶようにできることを示せ．

(ii) S を頂点集合とする木 T のうちで，

$$l(T) = \sum_{(u,v) \in E(T)} d(u, v) \qquad \text{（$E(T)$ は T の辺集合）}$$

が最大となる木を見出し，T^* と表す．このとき，T^* から (i) で得られる S の分割 (S_1^*, S_2^*) が μ を最小にする分割であることを示せ．

[11] 与えられた文字の集合 Σ に対し，有限長の文字列（空列 ε も含む）の集合 Σ^* 上の二項関係 R を以下のように定める．

- 文字列 v に 1 文字を挿入して文字列 w が得られるとき，vRw.
- 文字列 v の中の 1 文字を削除して文字列 w が得られるとき，vRw.

R を用いて，Σ^* 上の距離 d を

$$d(v,w) = \min \{ k \mid \exists v_0, \ldots, v_k \in \Sigma^*, v_0 = v, v_0Rv_1, \ldots, v_{k-1}Rv_k, v_k = w \}$$

により定める．また，$v \in \Sigma^*$ について，v の長さを $|v|$ で表す．任意の二つの文字列 $v, w \in \Sigma^*$ に対し $d(v,w)$ を $O(|v| \cdot |w|)$ の計算量（ステップ数）で求めるアルゴリズムを与えよ．アルゴリズムの正しさと計算量の条件が満たされる理由も説明せよ．

[12] 0, 1 の有限列全体の集合を B で表す．$w \in \mathrm{B}$ に対してラムダ項 $\overline{w}$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \lambda f_0 f_1 x. M_w \\ M_\varepsilon &= x \\ M_{iv} &= f_i(M_v) \end{aligned}$$

ただし ε は空列を表し，iv は $v \in \mathrm{B}$ に $i \in \{0,1\}$ を前置して得られる列を表す．以下では，β 簡約関係 $\longrightarrow_\beta$ の反射的推移的閉包を $\longrightarrow_\beta^*$ で表す．

(i) 次の条件を満たすラムダ項 F を一つ与えよ．

$$F\,\overline{i_1 i_2 \cdots i_n} \longrightarrow_\beta^* \overline{(1-i_1)(1-i_2)\cdots(1-i_n)}$$

(ii) 次の条件を満たすラムダ項 R を一つ与えよ．

$$R\,\overline{i_1 i_2 \cdots i_n} \longrightarrow_\beta^* \overline{i_n \cdots i_2 i_1}$$