平成２４年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある. ５題 とも解答せよ.

◎　解答時間は　３時間　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$ A, B を n 次実正方行列とする．このとき，次の二条件 (a), (b) は同値であることを示せ．

(a) n 次実正方行列 Q が存在して，

$$A = QB.$$

(b) 任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$Bv = 0 \quad \Longrightarrow \quad Av = 0.$$

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}$ 上の関数

$$f(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx + \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$$

の具体形を求めよ．積分を用いずにできるだけ簡単な形で表すこと．

$\boxed{3}$ A を n 次複素正方行列とする．

(i) n 次複素正則対称行列 S で，

$$Q(v, w) = {}^t v S w \qquad (v, w \in \mathbf{C}^n)$$

とおいたときに，

$$Q(Av, w) = Q(v, Aw)$$

となるものがあることを示せ．ただし，${}^t v$ は v の転置を表す．

(ii) n 次複素正則行列 P を取り，PAP^{-1} が対称行列となるようにできることを示せ．

$\boxed{4}$ α を正の定数とするとき，次の等式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{2\alpha\pi}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}.$$

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一題を選んで解答せよ．(解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ．)

[A] 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数 $f(x)$ が，すべての $x \in [0,1]$ において

$$\overline{\lim_{y \to x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$$

を満たすならば，$f(1)-f(0) \leq 1$ であることを示せ．ただし，$\overline{\lim}$ は上極限を表す．

[B] 実数 $r > 1$ に対して $\mathbf{R}$ の部分集合 C を次のように定義する．

$$C_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\},$$
$$C_{n+1} = \left\{ \frac{x}{r} \,\middle|\, x \in C_n \right\} \cup \left\{ \frac{r-1+x}{r} \,\middle|\, x \in C_n \right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

このとき，C は無限に多くの点を含むことを示せ．