平成２４年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １１題 ある. そのうち ２題 を選択して解答せよ.

◎　解答時間は　２時間３０分　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 選択表を上に置き, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$ K は有理数体 $\mathbf{Q}$ の有限次拡大体とする．K の部分環 R と整数 $N \geq 1$ に対して，K 内で R と $\frac{1}{N}$ で生成される部分環を $R[1/N]$ と表す．また，K 成分の n 次正則行列全体の成す群を $\mathrm{GL}_n(K)$ と表す．

(i) K の部分環 R は $\mathbf{Z}$ 上有限生成な環であると仮定する．このとき，$R[1/N]$ が $\mathbf{Z}[1/N]$ 加群として有限生成かつ自由となるような整数 $N \geq 1$ が存在することを示せ．

(ii) $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ は有限生成な部分群とし，$g \in G$ は単位行列 I と異なる元とする．このとき，$g \notin H$ となるような指数有限な部分群 $H \subseteq G$ が存在することを示せ．

$\boxed{2}$ 複素数体 $\mathbf{C}$ を部分環として含む局所環 R は，積写像 $\mathbf{C} \times R \to R$ によって複素ベクトル空間となる．そのような環 R のうち，複素ベクトル空間としての次元が 5 であるものを，全て決定したい．

(i) $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとし，$d = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ とおく．$1 \leq d \leq 4$ を示せ．

(ii) $d = 1$ または 4 であるような R を，同型を除いて全て決定せよ．

(iii) $d = 3$ であるような R を，同型を除いて全て決定せよ．

(iv) $d = 2$ であるような R を，同型を除いて全て決定せよ．

$\boxed{3}$ A をネーター局所環，M を有限生成 A 加群，n を正の整数とし，A 加群の準同型写像 $f\colon M \to A^{\oplus n}$ を考える．A の剰余体 k に対し，f に $\otimes_A k$ を施して得られる k 線形写像を $f_k\colon M \otimes_A k \to A^{\oplus n} \otimes_A k$ と書く．次の (i), (ii) を示せ．

(i) f_k が全射ならば，A 加群の準同型写像 $\varphi\colon A^{\oplus n} \to M$ で $f \circ \varphi$ が $A^{\oplus n}$ の恒等写像となるものが存在する．

(ii) f_k が単射ならば，A 加群の準同型写像 $\psi\colon A^{\oplus n} \to M$ で $\psi \circ f$ が M の恒等写像となるものが存在する．

$\boxed{4}$ $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbf{C}$，$T = S^1 \times S^1$，$U = S^1 \times [0,1]$ とおく．連続写像 $f\colon \partial U \to T$ を

$$f(x,0) = (x,1) \qquad (x \in S^1),$$
$$f(x,1) = (1,x) \qquad (x \in S^1),$$

により定義し，f によって U を T に貼り合せて得られる空間を X とおく．

(i) X の整係数ホモロジー群 $H_*(X, \mathbf{Z})$ を求めよ．

(ii) X の基本群の表示を一つ求め，この基本群が非可換であることを示せ．

$\boxed{5}$ (i) D は $\mathbf{R}^n$ 内の有界閉領域で，その境界 ∂D は $\mathbf{R}^n$ の C^∞ 級部分多様体になっているとする．dV を $\mathbf{R}^n$ の標準的な体積要素 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$，$d\sigma$ を ∂D の面積要素，ν を ∂D の外向き法線ベクトル場とする．D を含む領域上で C^∞ 級なベクトル場 X に対し，$i(X)dV$ を ∂D に引き戻したものが $(X, \nu)d\sigma$ に等しいことを示せ．ただし，i は内部積とする．

(ii) D を半径 1 の球 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ とする．n 次実正方行列 A に対して

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}(Ax, x)d\sigma$$

を求めよ．ただし，x は ∂D の点であるが，$\mathbf{R}^n$ のベクトルと考えて (Ax, x) を定めるものとする．また，$\omega_n = \displaystyle\int_D dV$ とする．

$\boxed{6}$ (i) K を $[0,1] \times [0,1]$ 上の連続関数とし，写像

$$f(x) \mapsto g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

を考える．この写像が $L^2(0,1)$ から $L^2(0,1)$ へのコンパクト写像であることを示せ．

(ii) 1 変数関数 $h(x) = 1/(1+x^2)$ の Fourier 変換

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}h(x)dx$$

を求めよ．

(iii) $L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への写像

$$f(x) \mapsto g(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{1+(x-y)^2}dy$$

はコンパクト写像でないことを示せ．

$\boxed{7}$ μ を $\mathbf{R}$ 上のボレル測度で $\mu(\mathbf{R}) < \infty$ となるものとする．

(i) $\mu(\{x\}) > 0$ となる $x \in \mathbf{R}$ は高々可算個であることを示せ．

(ii) $\varphi(t) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{itx}d\mu(x)$ とおくとき，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|^2dt = \sum_{x\in\mathbf{R},\ \mu(\{x\})>0}\mu(\{x\})^2$$

を示せ．

8 粘性流体の定常な遅い流れは次の方程式に従う．

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

ただし，$\boldsymbol{u} = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ は速度，$p(x,y,z)$ は圧力，μ は粘性率（正の定数）である．また $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$，$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(i) 渦度 $\omega = \nabla \times \boldsymbol{u}$ は $\nabla^2 \omega = 0$ を満たすことを示せ．

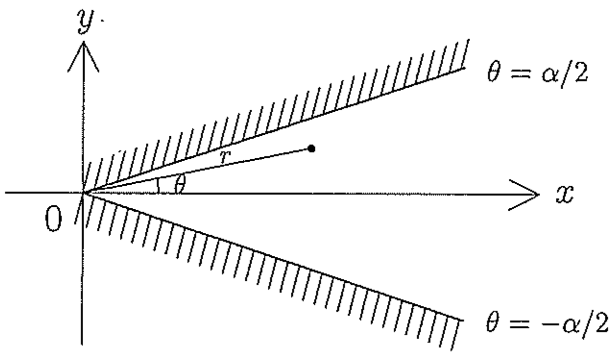
(ii) z 方向に一様な 2 次元流 $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y), 0)$ を考える．このとき流線関数 $\psi(x,y)$ を導入することができて，速度が $u(x,y) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$，$v(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ と表される．

(ii-1) 流線関数 ψ は $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ を満たすことを示せ．

(ii-2) 角度 α $(0 < \alpha < \pi)$ で交わる 2 枚の平面に挟まれたくさび状領域内の粘性流体の定常な遅い流れを考える．2 平面の交線を z 軸にとり，x-y 平面の極座標の動径と方位角 (r, θ) を下図のように導入する．2 つの平面 $\theta = \pm\alpha/2$ における境界条件を

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = \mp \Omega r \quad (\theta = \pm\alpha/2, \text{複号同順})$$

と与える（Ω は正定数）．ここで (u_r, u_θ) は速度の (r, θ) 成分であり，流線関数 ψ と $u_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$，$u_\theta = \dfrac{\partial \psi}{\partial r}$ の関係にある．このとき，変数分離形 $\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を仮定して流線関数を一つ求めよ．ただし，u_r, u_θ は原点で有界な連続関数であるとする．また，極座標では $\nabla^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ と表されることを用いてもよい．



$\boxed{9}$ 量子力学系の時間に依存しないハミルトニアン H が離散実固有値 $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ を持ち，n が大きくなるにつれて E_n は十分早く増大し，$\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ が任意の正の実数 β に対して有限になると仮定する．このとき，逆温度 β の Gibbs 状態での任意の観測量 A の期待値は

$$\langle A\rangle_\beta = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}$$

で与えられる．以下では簡単のため $\hbar = 1$ とし，任意の観測量 A に対して

$$A_t = e^{itH}Ae^{-itH}$$

とおく．ただし，i は虚数単位である．

(i) 任意の観測量 A に対して $\langle A_t\rangle_\beta = \langle A\rangle_\beta$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ．

(ii) 任意の観測量 A, B に対して KMS 条件と呼ばれる関係式

$$\langle A_t B\rangle_\beta = \langle BA_{t+i\beta}\rangle_\beta \qquad (\forall t \in \mathbf{R})$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 調和振動子のハミルトニアンは正準交換関係 $[x, p] = i$ のもとで

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$$

により与えられる．(ii) の KMS 条件を $A = a^+$，$B = a^-$ の場合に利用することにより，$\langle H\rangle_\beta$ を求めよ．ただし，

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p \pm ix) \qquad (\text{複号同順})$$

である．また，H の固有値を求めて直接 $\langle H\rangle_\beta$ を計算し，二つの結果が一致することを確かめよ．

$\boxed{10}$ 有限点集合 U, V，辺集合 $E = U \times V$ からなる完全 2 部グラフ $G = (U, V; E)$ を考える．ただし，$|U| = |V|$ とする．辺部分集合 $M \subseteq E$ に対して，端点集合 ∂M が $|\partial M| = 2|M|$ を満たすとき，M をマッチングという．各辺 $e \in E$ には実数値 $w(e)$ が与えられているものとする．点部分集合 $X \subseteq U$ に対して，$\partial M \cap U = X$ となるマッチング M の中での $w(M) = \sum_{e\in M} w(e)$ の最小値を $f(X)$ と書く．このとき，任意の $X, Y \subseteq U$ に対して，

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{11}$ 命題変数の集合 $\mathcal{V}$ が与えられているものとし,

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m \qquad (m \geq 1,\ x_i \in \mathcal{V})$$

および

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m \wedge \neg x_{m+1} \qquad (m \geq 0,\ x_i \in \mathcal{V})$$

の形をした論理式全体の集合を $\mathcal{A}$ とする. 論理式

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \qquad (n \geq 1,\ A_i \in \mathcal{A})$$

がトートロジー (恒真式) であるかどうかを $O(|A|^2)$ の計算量 (ステップ数) で判定するアルゴリズムを与えよ. ただし, 論理式 A に対し, $|A|$ は A の中の命題変数の出現回数, すなわち $|x| = 1$ $(x \in \mathcal{V})$, $|\neg A'| = |A'|$, $|A' \wedge A''| = |A' \vee A''| = |A'| + |A''|$ で定まるものとする. アルゴリズムの正しさと, 計算量の条件が満たされる理由も説明せよ.