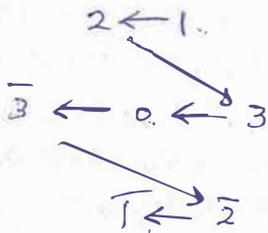


On Global Crystal Bases of the Symmetric Tensor Representation of $U_q(G_2)$



指導教官 伊達悦朗 教授

大阪大学大学院基礎工学研究科数理系専攻前期課程

山根重紀

1994年2月

0 Introduction

量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は Drinfeld[D] 及び 神保[J1] によって導入された。これは、不定元 q を含む非可換非余可換ホップ代数で、 $q = 1$ においては対称化可能な Kac-Moody リー環 \mathfrak{g} の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ となる。ここで、 $q = 0$ とすると $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論は単純化される。 M を $U_q(\mathfrak{g})$ -加群とし、各単純ルート α_i に対して $U_q(\mathfrak{sl}_2)_i$ を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と同型な $U_q(\mathfrak{g})$ の部分環とする。このとき crystal base とは、 M の “ $q = 0$ における” 基底 B であって、各 α_i に対して既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)_i$ -加群の “ $q = 0$ における” 基底の直和となるものである (Def. 1.2.1 参照)。Crystal base の存在と一意性は integrable $U_q(\mathfrak{g})$ -加群に対しては 柏原 [K2] によって示されている。 $q = 0$ に特殊化した時に crystal base となる M の基底を global crystal base と言う (Th. 1.4.1 参照)。また 全く別の視点から M の基底として canonical base と呼ばれる基底が Lusztig [L] により発見されたが、対称な Cartan 行列を持つ \mathfrak{g} に対しては global crystal base と一致することが Lusztig により示されている。

Symmetric tensor representation とは、 $N\Lambda_1 (N \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を highest weight に持つ $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現のことである。古典型の量子展開環に対するこのような表現の基底を構成する問題は、中島 [N] で扱われている。そこで $U_q(G_2)$ の symmetric tensor representation の基底及びそれへの生成元の作用を与えることを研究課題とした。 $U_q(G_2)$ の一般の有限次元既約表現の crystal base は Kang-Misra [KM] によって与えられている。また、生成元の upper global crystal base への作用に関しては、柏原 [K3] により主要項の係数及び他の項の q 中の制限が与えられている (Prop. 1.4.2)。これらの結果を用いることにより生成元を記述する問題は Prop. 1.4.2 と $U_q(G_2)$ の関係式 (1.3.1.4) より従う連立 2 次方程式を解くことに帰着する。実際の手続きとしては、まず次元の低い表現を具体的に求め、その結果から係数の規則を逐次予想することによって高い次元の表現を求めていった。 $N = 11$ までの表現を求めることはできたが、一般の N に対する symmetric tensor representation の基底の構成を具体的に与えることはできなかった。しかし、この過程において、生成元 e_i, f_i の基底への作用の行列成分に負の項が現れることがわかった。この事実は、Lusztig により示された、 A_n, D_n, E_n 型の量子展開環の表現の canonical base に関する生成元の作用の行列成分が非負であるという結果が、カルタン行列が非対称な $U_q(G_2)$ の場合、global crystal base に関しては成り立たないということを示している。

この研究を進めるにあたって数理教室の中島俊樹助手 及び 京都大学数理解析研究所の柏原正樹教授にも多くの御指導を頂いたことを御礼申し上げます。

1 Preliminaries

1.1 量子展開環

この節では \mathfrak{g} を有限次元単純リー環とし、そのカルタン行列を $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 、カルタン部分環を \mathfrak{h} とし、 $I = \{1, \dots, n\}$ とおく。また α_i, h_i ($i \in I$) をそれぞれ単純ルート、単純コルートとし、 $(,)$ を $(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たす \mathfrak{h}^* 上の対称双線型形式、 \langle, \rangle を \mathfrak{h} と \mathfrak{h}^* の pairing で $i, j \in I$ に対して、 $\langle h_i, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ 、 $\langle h_i, \lambda \rangle = \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$) を満たすものとする。更に、 Λ_i ($i \in I$) を h_i の双対基底とし、 $P = \sum \mathbb{Z}\Lambda_i$ 、 $P^* = \sum \mathbb{Z}h_i$ 、 $P_+ = \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0\}$ 、 $[n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$ 、 $[n]_i! = \prod_{k=1}^n [k]_i$ とする。

この時、不定元 q に対し、量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ とは、生成元 q^h ($h \in P^*$)、 e_i, f_i ($i \in I$) と次の関係式で定まる $K = \mathbb{Q}(q)$ 上の代数のことである。 $e_i^{(n)} = e_i^n / [n]_i!$ 、 $f_i^{(n)} = f_i^n / [n]_i!$ とする。

$$q^0 = 1$$

$$q^{h+h'} = q^h q^{h'} \quad (h, h' \in P^*)$$

$$q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i$$

$$q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i$$

$$[e_i, f_j] = e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \left(q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}, t_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i) h_i} \right)$$

$$\sum_{n=0}^l (-1)^n e_i^{(n)} e_j e_i^{(l-n)} = 0$$

$$\sum_{n=0}^l (-1)^n f_i^{(n)} f_j f_i^{(l-n)} = 0$$

$(i \neq j, l = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle)$

Definition 1.1.1 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 M 、 $\lambda \in P$ に対して M のウェイト λ のウェイト空間 M_λ を $\{u \in M \mid q^h u = q^{\langle h, \lambda \rangle} u, \text{ 任意の } h \in \mathfrak{h}\}$ で定める。

さらに M が次の条件を満たす時 M は integrable であると言う。

- (1) $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$
- (2) 任意の λ に対して $\dim M_\lambda < \infty$ 。
- (3) 任意の i に対して有限次元 $U_q(\mathfrak{g}_i)$ -加群の直和である。

ここで $U_q(\mathfrak{g}_i)$ は e_i, f_i, t_i, t_i^{-1} で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分環である。

次のように二通りに余積 Δ_\pm 、余単位射 ε 、対合射 S_\pm を入れることができ4つの組 $(U_q(\mathfrak{g}), \Delta_+, \varepsilon, S_+)$ と $(U_q(\mathfrak{g}), \Delta_-, \varepsilon, S_-)$ はそれぞれホップ代数となる。

$$\Delta_+(t_i) = t_i \otimes t_i$$

$$\Delta_+(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i$$

$$\Delta_+(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$

$$\Delta_-(t_i) = t_i \otimes t_i$$

$$\begin{aligned}\Delta_-(e_i) &= e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i \\ \Delta_-(f_i) &= f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i \\ \varepsilon(t_i) &= 1, \quad \varepsilon(e_i) = 0, \quad \varepsilon(f_i) = 0 \\ S_+(t_i) &= t_i^{-1}, \quad S_+(e_i) = -t_i^{-1}e_i, \quad S_+(f_i) = -f_it_i \\ S_-(t_i) &= t_i^{-1}, \quad S_-(e_i) = -e_it_i, \quad S_-(f_i) = -t_i^{-1}f_i\end{aligned}$$

1.2 Crystal base

\mathbf{A} を $q = 0$ に極を持たない関数からなる $\mathbf{Q}(q)$ の部分環とする。

$U_q(\mathfrak{G})$ -加群 M 上の作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を $(U_q(\mathfrak{G}), \Delta_+, \varepsilon, S_+)$ の場合は (upper)、 $(U_q(\mathfrak{G}), \Delta_-, \varepsilon, S_-)$ の場合は (lower) を用いて定義する。

$u \in \text{Ker } e_i \cap M_\lambda, 0 \leq n \leq \langle h_i, \lambda \rangle$ に対して

$$\text{(lower)} \quad \tilde{e}_i(f_i^{(n)}u) = f_i^{(n-1)}u, \quad \tilde{f}_i(f_i^{(n)}u) = f_i^{(n+1)}u$$

$$\text{(upper)} \quad \tilde{e}_i(f_i^{(n)}u) = \frac{[\langle h_i, \lambda \rangle - n + 1]_i}{[n]_i} f_i^{(n-1)}u, \quad \tilde{f}_i(f_i^{(n)}u) = \frac{[n+1]_i}{[\langle h_i, \lambda \rangle - n]_i} f_i^{(n+1)}u$$

但し、 $\tilde{e}_i(f_i^{(0)}u) = 0, \tilde{f}_i(f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle}u) = 0$ とする。

Definition 1.2.1 M を有限次元 integrable $U_q(\mathfrak{G})$ -加群とする。自由 \mathbf{A} -加群 L と L/qL の基底 B の組 (L, B) は次の条件を満たす時 M の crystal base と呼ばれる。

- (1) L は $\mathbf{Q}(q) \otimes_{\mathbf{A}} L \cong M$ を満たす M の部分自由 \mathbf{A} -加群である。
- (2) B は \mathbf{Q} -ベクトル空間 L/qL の基底である。
- (3) $L = \bigoplus_{\lambda} L_{\lambda}, B = \bigsqcup_{\lambda} B_{\lambda}$ 但し $L_{\lambda} = L \cap M_{\lambda}, B_{\lambda} = B \cap (L_{\lambda}/qL_{\lambda})$
- (4) $\tilde{f}_i L \subset L$ かつ $\tilde{e}_i L \subset L$
- (5) $\tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}$ かつ $\tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\}$
- (6) $u, v \in B, i \in I$ に対して、 $u = \tilde{e}_i v \Leftrightarrow v = \tilde{f}_i u$

(lower) で定義される \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を用いた場合を lower crystal base と呼び、(upper) で定義される \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を用いた場合を upper crystal base と呼ぶ。

$b, b' \in B, i \in I$ に対して、 $\tilde{f}_i b = b'$ の時 $b \xrightarrow{i} b'$ と書く。このようにして得られる色 i の付いた矢印を辺とし B を頂点集合とする色付きかつ向き付きグラフを crystal graph と呼ぶ。

Theorem 1.2.2 (柏原 [K2]) $V(\lambda)$ を highest weight $\lambda \in P_+$ を持つ有限次元既約 $U_q(\mathfrak{G})$ -加群とし、 u_{λ} を $V(\lambda)$ の highest weight vector とする。

$$L(\lambda) = \sum_{i_1, \dots, i_l \in I} \mathbf{A} \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_{\lambda}$$

$$B(\lambda) = \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_{\lambda} \bmod qL(\lambda)\} \setminus \{0\} \quad (i_1, \dots, i_l \in I)$$

とおくと $(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base となる。

Definition 1.2.3 $b \in B$ に対し

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \in B\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \in B\}$$

とおく。

Proposition 1.2.4 (柏原、中島 [KN]) (L_j, B_j) を integrable $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $M_j (j = 1, \dots, N)$ の crystal base とする。 $i \in I, b_j \in B_j (j = 1, \dots, N)$ に対し数列 a_k を $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k + \varphi_i(b_k) - \varepsilon_i(b_{k+1})$ と帰納的に定義する。

(1) k を $a_k = \min\{a_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ を満たす最大の整数とすると

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-1} \otimes \tilde{f}_i b_k \otimes b_{k+1} \otimes \cdots \otimes b_N$$

が成立する。

(2) k を $a_k = \min\{a_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ を満たす最小の整数とすると

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-1} \otimes \tilde{e}_i b_k \otimes b_{k+1} \otimes \cdots \otimes b_N$$

が成立する。

Remark 1.2.5 上の proposition で得た \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の作用は次の u_+, u_-, u_0 を利用した方法でも記述することができる。

$1 \leq j \leq N$ とする。

- $\tilde{f}_i b_j = \tilde{e}_i b_j = 0$ となる場合 b_j を u_0 におきかえる。
- b_j が $u_+ \xrightarrow{i} u_-, \tilde{e}_i u_+ = \tilde{f}_i u_- = 0$ を満たす u_+, u_- のいずれかに当てはまる場合 b_j を当てはまるものに置き換える。
- b_j が $u_1 \xrightarrow{i} u_2 \xrightarrow{i} u_3, \tilde{e}_i u_1 = \tilde{f}_i u_3 = 0$ を満たす u_1, u_2, u_3 のいずれかに当てはまる場合 b_j をそれぞれ $u_+ \otimes u_+, u_- \otimes u_+, u_- \otimes u_-$ に置き換える。

$b_1 \otimes \cdots \otimes b_N$ が u_+, u_-, u_0 のみのテンソル積の形になったとき、次のルールを適用する。

- (0) u_0 を無視する。
- (1) $u_+ \otimes u_-$ があれば順々にそれを無視する。
- (2) \tilde{e}_i : もっとも右の u_- を u_+ にする。なければ 0 にする。
 \tilde{f}_i : もっとも左の u_+ を u_- にする。なければ 0 にする。

例 $u = u_- \otimes u_0 \otimes u_+ \otimes \underbrace{u_+ \otimes u_+ \otimes (u_- \otimes u_-)} \otimes u_+$ とする。(0)(1) を適用すると $u_- \otimes u_+$ と思えるので (2) を適用すれば

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i u &= u_+ \otimes u_0 \otimes u_+ \otimes u_+ \otimes (u_- \otimes u_-) \otimes u_+ \\ \tilde{f}_i u &= u_- \otimes u_0 \otimes u_+ \otimes u_+ \otimes (u_- \otimes u_-) \otimes u_- \end{aligned}$$

となる。

1.3 Crystal base for $U_q(G_2)$ -module

この節以降では crystal base は upper crystal base を指すことにする。

カルタン行列が $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であるリー環 G_2 を考える。

$I = \{1, 2\}$ とし、 $\alpha_i, h_i, \Lambda_i, P, P^* (i \in I)$ は 1.1 節のとおりとする。また、dominant integral weight Λ は $\Lambda = m\Lambda_1 + n\Lambda_2 (n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と書ける。

\mathfrak{h}^* 上の内積 $(,)$ を次で定義する。

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 1, (\alpha_2, \alpha_2) = 3$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1) = -\frac{3}{2}$$

$i \in I$ に対して $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$, $t_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)h_i}$ と定める。

Definition 1.3.1 量子展開環 $U_q(G_2)$ とは、生成元 $e_i, f_i, t_i, t_i^{-1} (i \in I)$ と次の関係式からなる $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数のことである。

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad t_i t_i^{-1} = t_i t_i^{-1} = 1 \quad (1.3.1.1)$$

$$t_i e_j t_i^{-1} = q_i^{\langle h_i, \alpha_j \rangle} e_j \quad (1.3.1.2)$$

$$t_i f_j t_i^{-1} = q_i^{-\langle h_i, \alpha_j \rangle} f_j \quad (1.3.1.3)$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (1.3.1.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^l (-1)^n e_i^{(n)} e_j e_i^{(l-n)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^l (-1)^n f_i^{(n)} f_j f_i^{(l-n)} &= 0 \end{aligned} \quad (i \neq j, l = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle) \quad (1.3.1.5)$$

V を基底 $\{\boxed{j}, \overline{\boxed{j}} \mid j = 1, 2, 3\} \cup \{\boxed{0}\}$ を持つ 7 次元 $\mathbb{Q}(q)$ ベクトル空間とする。 V 上の $U_q(G_2)$ -加群の構造を次で定める。

$$\begin{aligned} e_1 \boxed{2} &= \boxed{1}, & e_1 \boxed{0} &= \boxed{3} \\ e_1 \overline{\boxed{3}} &= [2]_1 \boxed{0}, & e_1 \overline{\boxed{1}} &= \overline{\boxed{2}} \\ e_2 \boxed{3} &= \boxed{2}, & e_2 \overline{\boxed{2}} &= \overline{\boxed{3}} \\ f_1 \boxed{1} &= \boxed{2}, & f_1 \boxed{3} &= [2]_1 \boxed{0} \\ f_1 \boxed{0} &= \overline{\boxed{3}}, & f_1 \overline{\boxed{2}} &= \overline{\boxed{1}} \\ f_2 \boxed{2} &= \boxed{3}, & f_2 \overline{\boxed{3}} &= \overline{\boxed{2}} \end{aligned}$$

$$t_i \boxed{j} = q_i^{\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} + 2\delta_{i+2,j}} \boxed{j} \quad (i = 1, 2, j = 0, 1, 2, 3)$$

$$t_i \overline{\boxed{j}} = q_i^{-\delta_{ij} + \delta_{i+1,j} - 2\delta_{i+2,j}} \overline{\boxed{j}} \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$$

その他の場合は 0 になるものとする。

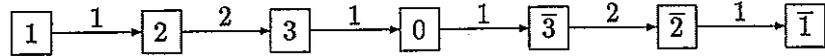
このとき V は、highest weight Λ_1 , highest weight vector $\boxed{1}$ を持つ既約 $U_q(G_2)$ -加群で $V(\Lambda_1)$ と同型になる。

Proposition 1.3.2 (Kang & Misra[KM])

$$L(\Lambda_1) = \bigoplus_{j=1}^3 (\mathbf{A} \boxed{j} \oplus \mathbf{A} \overline{\boxed{j}}) \oplus \mathbf{A} \boxed{0}$$

$$B(\Lambda_1) = \{ \boxed{j}, \overline{\boxed{j}} \mid j = 1, 2, 3 \} \cup \{ \boxed{0} \}$$

とおくと $(L(\Lambda_1), B(\Lambda_1))$ は $V(\Lambda_1)$ の crystal base となり、 $B(\Lambda_1)$ の crystal graph は次のように書ける。



Definition 1.3.3 $B(\Lambda_1)$ の順序を $\boxed{1} < \boxed{2} < \boxed{3} < \boxed{0} < \boxed{3} < \boxed{2} < \overline{\boxed{1}}$ で定義する。

Proposition 1.3.4 (Kang & Misra[KM]) N を固定する。

$$B = \{ \boxed{b_1} \cdots \boxed{b_N} = \boxed{b_N} \otimes \cdots \otimes \boxed{b_1} \mid \boxed{b_1} \preceq \cdots \preceq \boxed{b_N}, \#\{i \mid \boxed{b_i} = \boxed{0}\} \leq 1 \}$$

とおくと B は $U_q(G_2)$ の crystal base $B(N\Lambda_1)$ に同型である。(実際には $m\Lambda_1 + n\Lambda_2$ に対して証明されているが、今は symmetric な場合に限定した。)

1.4 Global crystal base

$U_q(\mathfrak{g})$ 上の自己同型写像 φ を $\varphi(e_i) = f_i, \varphi(f_i) = e_i, \varphi(t_i) = t_i$ で定め、 $V(\lambda)$ 上の内積 $(,)$ を $(pu, v) = (u, \varphi(p)v)$ (但し $u, v \in V(\lambda), p \in U_q(\mathfrak{g})$), $(u_\lambda, u_\lambda) = 1$ で定める。

Theorem 1.4.1 (柏原 [K3])

$V_{\mathbf{Q}}(\lambda) = \sum_{i_1, \dots, i_l \in I} \mathbf{Q}[q, q^{-1}] f_{i_1}^{(n_1)} \cdots f_{i_l}^{(n_l)} u_\lambda$ とし、 $\overline{L(\lambda)} = \sum_{i'_1, \dots, i'_l \in I} \overline{\mathbf{A}} \tilde{f}_{i'_1} \cdots \tilde{f}_{i'_l} u_\lambda$ とする。ただし $\overline{\mathbf{A}}$

は $q = \infty$ に極を持たない関数からなる $\mathbf{Q}(q)$ の部分環を表す。

さらに、

$$V_{\mathbf{Q}}^{up}(\lambda) = \{u \in V(\lambda) \mid (u, V_{\mathbf{Q}}(\lambda)) \subset \mathbf{Q}[q, q^{-1}]\}$$

$$L^{up}(\lambda) = \{u \in V(\lambda) \mid (u, L(\lambda)) \subset \mathbf{A}\}$$

$$\overline{L}^{up}(\lambda) = \{u \in V(\lambda) \mid (u, \overline{L(\lambda)}) \subset \overline{\mathbf{A}}\}$$

とする。このとき、

$$V_{\mathbf{Q}}^{up}(\lambda) \cap L^{up}(\lambda) \cap \overline{L}^{up}(\lambda) \rightarrow L^{up}(\lambda)/qL^{up}(\lambda)$$

は \mathbf{Q} 上のベクトル空間としての同型写像である。

この写像の逆写像を G と書き、 $V(\lambda)$ の基底 $G(B)$ を global crystal base と呼ぶ。

Proposition 1.4.2 (柏原 [K3]) 任意の $b \in B, i \in I$ に対して

$$f_i G(b) = [\varphi_i(b)]_i G(\tilde{f}_i b) + \sum_{b'} F_{bb'}^i G(b') \quad (1.4.2.1)$$

$$\varepsilon_j(b') \leq \varepsilon_j(b) \quad (j \in I) \text{ でないとき } F_{bb'}^i = 0 \quad (1.4.2.2)$$

$$F_{bb'}^i \in qq_i^{1-\varphi_i(b)} \mathbb{Q}[q] \quad (1.4.2.3)$$

となる $F_{bb'}^i \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ が存在する。

f_i を e_i に置き換えることにより次が得られる。

任意の $b \in B, i \in I$ に対して

$$e_i G(b) = [\varepsilon_i(b)]_i G(\tilde{e}_i b) + \sum_{b'} F_{bb'}^i G(b') \quad (1.4.2.1)'$$

$$\varphi_j(b') \leq \varphi_j(b) \quad (j \in I) \text{ でないとき } F_{bb'}^i = 0 \quad (1.4.2.2)'$$

$$F_{bb'}^i \in qq_i^{1-\varepsilon_i(b)} \mathbb{Q}[q] \quad (1.4.2.3)'$$

となる $F_{bb'}^i \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ が存在する。

以下 $G(b)$ を b と書くことにする。

2 The symmetric tensor representation of $U_q(G_2)$

2.1 表現を求めるプログラム

Proposition(1.4.2) と 量子展開環の関係式 (1.3.1.4) を利用して $F_{bb'}^i$ をすべて求めることができれば、 $U_q(G_2)$ の表現を得ることができる。これを計算機上で行なうため次のような操作を行なった。

2.1.1 基底を求める

基底に \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 を作用させて基底を求めるという操作を highest weight vector から lowest weight vector まで繰り返す。これによりすべての基底を求めることができる。まず \tilde{f}_i を施す操作は次のようにして行なう。

任意の $b \in B(\Lambda_1), i \in I$ に対して $\tilde{f}_i^3 b = \tilde{e}_i^3 b = 0$ であるから remark(1.2.5) を利用する。つまり、基底を u_+, u_0, u_- のテンソル積に直して考える。

\tilde{f}_1 を作用させる場合は、

$$\boxed{1} \rightarrow u_+, \boxed{2} \rightarrow u_-, \boxed{3} \rightarrow u_+ \otimes u_+, \boxed{0} \rightarrow u_- \otimes u_+, \boxed{\bar{3}} \rightarrow u_- \otimes u_-, \boxed{\bar{2}} \rightarrow u_+, \boxed{\bar{1}} \rightarrow u_-$$

にそれぞれ置き換え、 \tilde{f}_2 を作用させる場合は、

$$\boxed{1} \rightarrow u_0, \boxed{2} \rightarrow u_+, \boxed{3} \rightarrow u_-, \boxed{0} \rightarrow u_0, \boxed{\bar{3}} \rightarrow u_+, \boxed{\bar{2}} \rightarrow u_-, \boxed{\bar{1}} \rightarrow u_0$$

にそれぞれ置き換える。

次に、 u_+ を 1、 u_- を -1、 u_0 を 0 に置き換えて、左側から足し算してゆき、0-1 となったときは 0 とする。最後に 0 → 1 になったところが \square の中の数の変わるところで、最終的な値が \tilde{f}_i を作用させて 0 にならない数、すなわち $\varphi_i(b)$ の値となる。

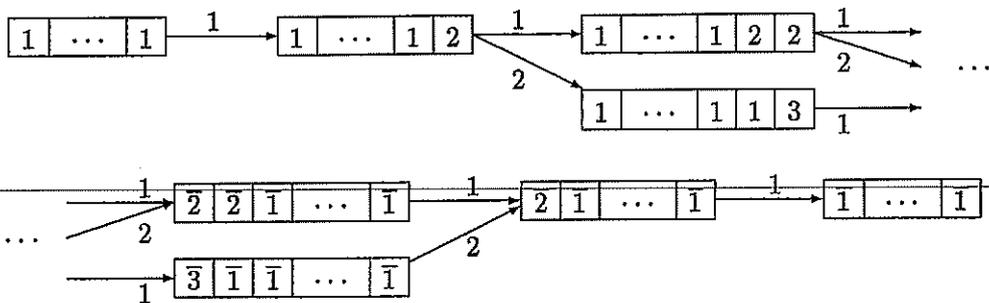
例 上のルールを $\boxed{1 \ 3 \ \bar{3} \ \bar{2}}$ に \tilde{f}_1 を作用させる場合に当てはめると次のようになる。

$$\boxed{1 \ 3 \ \bar{3} \ \bar{2}} = \boxed{\bar{2}} \otimes \boxed{\bar{3}} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} = u_+ \otimes (u_- \otimes u_-) \otimes (u_+ \otimes u_+) \otimes u_+$$

$$\begin{matrix} +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ & 1 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \end{matrix}$$

従って $\tilde{f}_1 \boxed{1 \ 3 \ \bar{3} \ \bar{2}} = [3]_1 \boxed{1 \ 0 \ \bar{3} \ \bar{2}}$ となることがわかる。又 $\boxed{1 \ 3 \ \bar{3} \ \bar{2}}$ のウエイトは $(2, -1)$ であるからカルタン行列を使えば $\boxed{1 \ 0 \ \bar{3} \ \bar{2}}$ のウエイトは $(0, 0)$ であることがわかる。

symmetric tensor representation の highest weight vector は $\boxed{1 \ \dots \ 1}$ であるから次のような形で基底が求まっていく。



2.1.2 f_i, e_i を行列化する

式 (1.4.2.1) を使うことにより $f_i b = [\varphi_i(b)]_i \tilde{f}_i b + x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$, $e_i b = [\varepsilon_i(b)]_i \tilde{e}_i b + y_1 b'_1 + \dots + y_{n'} b'_{n'}$ ($\tilde{f}_i b, b_1, \dots, b_n$ と $\tilde{e}_i b, b'_1, \dots, b'_{n'}$ はそれぞれ同じウエイトを持つ。 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n'} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$) と書けるので、それぞれの係数を成分とした係数行列ができる。

2.1.3 方程式を作る

量子展開環の関係式 (1.3.1.4)

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}, t_i = t^{(\alpha_i, \alpha_i) h_i})$$

を利用する。

上で得た係数行列を代入して計算し、両辺の行列成分を比較すれば連立方程式ができる。ここまで C 言語を用いた (プログラム:A.2.1)。

2.1.4 連立方程式を解く

連立方程式を解くといくつか不定解が残るが、次数制限 (式 1.4.2.3) を与えることにより unique に解くことができる。連立方程式を解くのに Maple V を利用した (プログラム:A.2.2)。

2.2 結果

$11A_1$ (dimension 7371) の表現まで求めることはできたが、当初の目標である symmetric tensor representation を具体的に与えるということはできなかった。しかしながら、その過程で意外な事実がわ

かった。Lusztig により、 $A_n, D_n, E_{6,7,8}$ 型の量子展開環の表現を canonical base を用いて表す時生成元の作用の行列成分はすべて q 数の意味で非負であることが示されているが、 $U_q(G_2)$ の場合には負の係数も現れることがわかった。

実際 $N = 3$ (dimension 77) 及び $N = 4$ (dimension 182) の時、次式が現れる。

$$\begin{aligned} f_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & \bar{3} \end{bmatrix} &= [2]_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & \bar{3} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\ e_2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & \bar{2} \end{bmatrix} &= [2]_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & \bar{3} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\ f_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix} &= [2]_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \\ e_2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} &= [2]_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

又、計算機実験の結果から

$$f_2 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum_k F_k \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \quad (F_k \in \mathbf{Z}[q, q^{-1}]) \text{ が求まっていたとすると、}$$

$$\begin{aligned} f_2 \begin{bmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &= \sum_k F_k \begin{bmatrix} 1 & b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \\ f_2 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n & \bar{1} \end{bmatrix} &= \sum_k F_k \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} & \bar{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であることが予想されるので $N \geq 3$ の場合は必ず負の係数が現れると予想される。

e_2 に対しても

$$\begin{aligned} e_2 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &= \sum_k F_k \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \quad (F_k \in \mathbf{Z}[q, q^{-1}]) \text{ が求まっていたとすると、} \\ f_2 \begin{bmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &= \sum_k F_k \begin{bmatrix} 1 & b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \\ f_2 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n & \bar{1} \end{bmatrix} &= \sum_k F_k \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} & \bar{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることが予想される。

f_1 及び f_2 の $N < 3$ の時に対しては負の係数となるものは現れていない。

次式も成り立っていると予想される。

$$f_1 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k}]_1 \right) \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \quad (n_{kl_k} \neq 0) \text{ が求まっていたとすると、}$$

$$\begin{aligned} f_1 \begin{bmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &= \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k} + 1]_1 \right) \begin{bmatrix} 1 & b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} + (1 - \delta_1 b_1) \begin{bmatrix} 2 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \\ f_1 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n & \bar{1} \end{bmatrix} &= \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k}]_1 \right) \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} & \bar{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e_1 に対しても

$$e_1 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k}]_1 \right) \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \quad (n_{kl_k} \neq 0) \text{ が求まっていたとすると、}$$

$$\begin{aligned} e_1 \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n & \bar{1} \end{bmatrix} &= \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k} + 1]_1 \right) \begin{bmatrix} b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} & \bar{1} \end{bmatrix} + (1 - \delta_1 b_1) \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n & \bar{2} \end{bmatrix} \\ e_1 \begin{bmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &= \sum_k \left(\sum_{l_k} [n_{kl_k}]_1 \right) \begin{bmatrix} 1 & b'_{k1} & \cdots & b'_{kn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることが予想される。

参考文献

- [D] V.G.Drinfeld, Hopf algebra and the Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254–258.
- [J1] M.Jimbo, A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.
- [J2] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990).
- [K1] M.Kashiwara, Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 249–260.
- [K2] M.Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 456–516.
- [K3] M.Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, *Duke Math. J.* **69** (1993), 455–485.
- [K4] 柏原正樹, 量子群の結晶化, *数学* **44** (1992), 330–342.
-
- [L] G.Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 447–498.
- [KN] M.Kashiwara and T.Nakashima, Crystal graphs for representations of q -analogue of classical Lie algebras, preprint *RIMS-767* (1991).
- [KM] S-J.Kang and K.C.Misra, Crystal bases and tensor product decompositions of $U_q(G_2)$ -module, preprint (to appear in *J. Algebra*).
- [N] T.Nakashima, A basis of symmetric tensor representations for the quantum analogue of the Lie algebras B_n, C_n, D_n , *Publ.RIMS, Kyoto Univ.* **26**(1990).

A 付録

A.1 表現の例

f_i を作用させて 0 になるものは省略している。

A.1.1 $2\Lambda_1$ (dimension 27)

$$\begin{aligned}
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} &= [3]_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} &= [4]_1 \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} + [2]_1 [2]_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & \bar{3} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} &= [3]_1 \begin{bmatrix} 3 & \bar{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 \hline
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{2} \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 3 & \bar{3} \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 3 & \bar{2} \end{bmatrix} &= [3]_1 \begin{bmatrix} 3 & \bar{1} \end{bmatrix} + [2]_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 3 & \bar{1} \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} &= [2]_1 \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_1 \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} &= [2]_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} + [2]_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & \bar{3} \end{bmatrix} &= [2]_3 \begin{bmatrix} 2 & \bar{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \bar{3} \end{bmatrix} + ([3]_1 - 1) \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & \bar{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 0 & \bar{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} 2 & \bar{1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix} &= [2]_3 \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} + [2]_1 \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \\
 f_2 \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

