数学入門公開講座

平成元年7月25日(火)から8月3日(木)まで

京都大学数理解析研究所

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 定角曲線について

京都大学数理解析研究所・教授　松　浦　重　武

定角曲線についてその存在と、関連する変分問題について述べる。

2. 微分方程式と数値解法

東京電機大学理工学部・教授　一　松　　信

微分方程式は自然現象・社会現象を通じて、有用な数学モデルを提供しているが、それが解析的に解けるのは極めて限られた場合だけである。近年計算機の発展に伴い、数値解法が強力な道具となって、多くの興味ある事実が発見された。しかし数値解法では、大域的な性質を知るのに困難が多く、「Symbolic Graphic Numeric の三位一体」が望まれている。ここではその背景を念頭におき、数値解法を主体とした微分方程式の入門コースを試みる。

3. 確率・意思決定

京都大学数理解析研究所・助教授　楠　岡　成　雄

今日、確率・情報といった言葉がよく用いられるが、きわめてあいまいな意味で使われることが多い。この講義では確率という概念が諸科学でどのように用いられているのかを見ていきたい。前半では、確率とは何かという問題を確率の歴史、自然科学；社会科学に現われる確率概念等を通じて考えていく。前半の最後ではコルモゴロフ以後の確率論の考え方を考察する。

後半では、統計学における決定問題ゲームの理論等々を題材に意思決定の問題を考えていく。

4. 空間との長いつきあい

京都大学数理解析研究所・助教授　成　木　勇　夫

自然の中での生存と言う人間の基本的様態によって形成された空間の概念を、古代ギリシヤのユークリッド幾何から始め、代数的演算とともに発達した近代解析幾何、微積分学の影響下に成立した微分幾何、多様体の大域的性質を対象とする位相幾何等の概説を通して一貫した流れを追求し、現代的展望に至る。

時　間　割

日 / 時間	7月 25日 (火)	26日 (水)	27日 (木)	28日 (金)	29日 (土) 30日 (日)	31日 (月)	8月 1日 (火)	2日 (水)	3日 (木)
13:15～15:00	松浦	松浦	松浦	松浦	休	楠岡	楠岡	楠岡	楠岡
15:00～15:15	休　憩					休　憩			
15:15～17:00	一松	一松	一松	一松	講	成木	成木	成木	成木

平成元年度(第12回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成元年7月25日～7月28日開催)

2. 微分方程式と数値解法

東京電機大学理工学部・教授　一　松　　信

1989, JULY 25,26,27,28,　　15:15-17:00

公開講座

微分方程式と数値解法

一松　信（東京電機大学・理工・情報科学科）

趣旨

微分方程式は、自然界の記述言語として、微分積分学の発見以来、広く使われている。　しかしそれが17・18世紀に期待され、標準的であったような初等関数によって奇麗に解けるのは、例外的な場合だけである。

近年になって、計算機の急激な発展とともに、解析的に解くのが困難な多くの微分方程式が数値的に解かれた。　そして思いも掛けない新発見もあった。　ソリトンの発見がその一例である。

さらに最近では、マイコンによるグラフィックスの普及により、永年正論とされながらも実行が困難だった「微分方程式を満たす式を求めても解の半分にすぎず、解曲線のグラフを書かなければ本当に解いたことにはならない」という意見が、比較的容易に実行できることになった。　いまや計算機の活用には、S（式）・G（図）・N（数値）の三位一体化が必要であり、その目的に微分方程式は絶好の材料だと主張されるようになった。

この講義は、そのための入門的な試論にすぎない。　特に自分で奇麗な図を多数書いてお目に掛けることができず、自分ながら不満が多いのだが、お許し願いたい。　なお今回は時間や予備知識の関係で、対象を1階及び2階の常微分方程式に限り、偏微分方程式には全く触れていない。

実のところ偏微分方程式を扱うためには、現象のモデル化（数理物理学など）・解法の理論（関数解析学など）・結果の可視化（映画の作成など）という、どの一つをとっても大変な内容の三位一体化が不可欠らしい。　今後考えてみたいが、率直にいってこれはとても個人の手におえるテーマではないらしい。

Ⅰ．微分方程式の実例

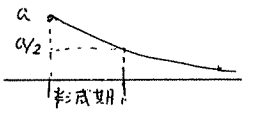
微分方程式の実例は、物理学特に力学の世界には、それこそいやという程（?）あるが、ここではなるべく他の分野から探してみよう。

Ⅰ．1　減衰の問題

存在量が現在の量に比例して減少する現象－具体例は放射性物質の壊変。

方程式は　　$y'=-cy$, $y(0)=a$

解は　　$y=a\ \exp(-cx)$



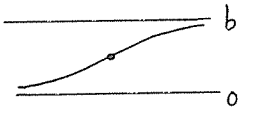
量 y が初めの値 a の半分になるまでの時間（半減期）は　$(\ln 2)/c = 0.693/c$.

簡単な方程式だが、放射能による年代測定に役に立つ。　数値解法では後述の通り、刻み幅が大きすぎると奇妙な現象を生じる。

Ⅰ．2　飽和を生じる現象

典型例は　$y'=ay(b-y)$, $a>0$, $b>0$,　初期値は 0と bとの間

一般解は　$y=b/(1+c\ \exp(-ax))$,　cは積分定数



初めのうちは指数関数的に増大するが、やがて値が b に近づくと頭打ちになる。

この解の曲線はロジスティック曲線とよばれる。　人口の増加、新製品の売上げ高、流行分野の論文数　などのモデルとされる。

Ⅰ．3　水が漏る話

高さ h、底面積 A の水槽の底に小さい断面積 a の穴があって、水が漏るとする。

時間を x、水面の高さを y とする。　このとき流出する水の速度は、g を重力加速度として、$\sqrt{2gy}$ でよく近似できる。　水面の変化を求め、水槽が空になるまでの時間を計算せよ。

時刻 x から $x+\Delta x$ の間に、水面が y から $y+\Delta y$ に変化したとすれば、もった水の量は一方では $-A\ \Delta y$（-がつくのは Δy が負のため）であり、他方では近似的に $a\sqrt{2gy}\ \Delta x$ である。　両者を等しいと置き、Δx を 0 に近付ければ、微分方程式

$$dy/dx = -(a\sqrt{2g}/A)\sqrt{y}$$

をうる。　上の２例と同じく変数分離型なので、直に解けるが、$x=0$ のとき $y=h$ である解は

$$x=C(\sqrt{h}-\sqrt{y}),\quad C=(A/a)\sqrt{2/g}$$

である。　空になるまでの時間は $C\sqrt{h}=(A/a)\sqrt{2h/g}$ である。

yをxの関数として表せば、b,c を定数として

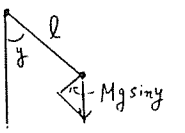
$$y=b(c-x)^2,\qquad (b=1,\ c=C\sqrt{h})$$

の形になる。　但しこの式が正しいのは、水槽が空になるまでの間、すなわち $0\leqq x\leqq c$ の区間だけであって、$x\geqq c$ においては恒等的に $y=0$ が解である。

$y=0$ である点は、解の一意性が成立しないという意味で、この微分方程式の特異点である。　ここを初期値として数値的に解くときには、注意を要する。

Ⅰ．4　振子が引っ掛かって動かなくなった話

長さℓの重さのない糸に、質点とみなしてよい重りをぶら下げ、抵抗のない一様な重力場の中で、自由に振動させる。　最初鉛直線から角 θ_0 だけ持上げて静止させ、静かに振動させるとすれば、振子は一平面内を振動する。　時刻xのとき鉛直線からの角度をy、重力加速度をgとすると、2階微分方程式



$$\ell y''=-g\sin y\qquad (y\text{はラジアン})$$

をうる。　普通には振幅が小さいとして、sin yをy,(cos yを1)で近似して、単振動の方程式にするが、ここでは振幅が大きい一般的な場合を考える。

これは y' を含まない2階微分方程式だから、定石通りy'を掛けて積分することにより、中間積分

$$y'^2=(2g/\ell)(\cos y-\cos\theta_0)$$

を求めることができる。　ここで初期条件：x=0のとき　$y=\theta_0$, $y'=0$　を利用した。

これは1階変数分離型だから、もう一度積分できるが、結果は初等関数では書けない。一楕円関数で表される。

ところがこの中間積分を、下手に数値的に解こうとすると、恒等的に $y=\theta_0$ という、物理的にはありえない解がでることが多い。　その理由と対策は、後に述べる。一こういう例を挙げたのは、「計算機があれば数学は不要」といった早合点に対する「反面教師」の例を意図した次第である。

Ⅰ．5　敵は分断せよ

二つの軍団が戦闘するとき、味方の兵力の減少が、敵の数に比例するとすれば、時刻xにおける両軍の数y，zは（連続量で近似して）、連立微分方程式

$$y' = -az,\ z' = -by \quad (a,bは正の定数)$$

で表される。　これは定数係数の線型方程式なので直に解けるが、解かなくても次のことがわかる。　両者の比をとると、

$$z'z - k\,y'y = 0,\quad k = b/a$$

をうる。　これを積分すれば

$$z^2 - k\,y^2 = c\ (定数)$$

となる。　両軍の初期値が y_0, z_0 であり、対等に戦って最後にともに0になったとすると、

$$c = 0,\ ゆえに\ z_0 = \sqrt{k}\,y_0$$

でなければならない。　もしもbが大でaが小、すなわちyの軍団の損害率が少なく、敵に与える損害率が大きければ、yがzより小さくても、対等に戦える。

但しこのとき人数は能力比の平方根に比例するから、人数の多い方が有利である。

いささか軍国主義といわれそうな例だったが、これは「ランチェスタの二乗法則」と呼ばれる有名な結果である。　ランチェスタは、兵力が少なかったイギリス海軍が、優勢なフランス・スペイン連合艦隊に大勝したトラファルガー海戦の勝因を深く研究し、この法則を発見した。　ネルソンは経験によって実質的にこの法則に気付いていたらしく、敵艦隊分断作戦をとって大成功した。　ランチェスタによれば、これこそ瀬戸際に立たされたイギリス海軍にとって、ほとんど唯一の必勝作戦だったという。

ランチェスタの法則は、大雑破に次のように考えても理解できる。　敵が多ければ、味方の損害率が増えるばかりか、やっつけなければならないノルマも多くなるから、二重に苦労する。　従って敵はできるだけ分断し、少人数ごとに各個撃破できれば有利である。

Ⅰ．6　食う者と食われる者と

第１次大戦では、イタリヤが連合国側に寝返り、アドリア海でオーストリヤと戦った。　そのためにかなりの期間漁業ができなかったので、戦後アドリア海で魚が沢山取れるかと思いきや、意外にも魚が激減していた。　動物学者のダンコナが調査したところ、小魚を食べる一種の鮫が増えていた。　この結果に興味をもった同僚の数学者ボルテラは、このモデルとして次に述べる「生存競争の方程式」を求めた。

その方程式は、小魚ｙの繁殖率がそれを食べる鮫の数ｚの１次式の形で減少し、他方鮫の数の増加率が餌になる小魚の数の１次式になるというモデルであり、時刻ｘでの数ｙ，ｚが次の関係式で表される。

$$y'=y(a-z),\ z'=-z(b-y)\quad a,b \text{ は正の定数}$$

この連立方程式は、求積法では解けないが、解かなくても次のような結果をうる。　それぞれの式を ay,bzで割って足すと

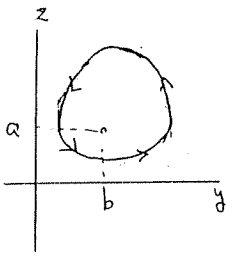
$$y'/ay+z'/bz=y/b-z/a=(ay-bz)/ab=(y'+z')/ab$$

となる。　abを掛けて整理すれば

$$by'/y-y'+az'/z-z'=0$$

となり、これは積分できる。　積分して指数関数に代入すると

$$y^b e^{-y} z^a e^{-z}=c\ (\text{定数})$$



をうる。　これは ｙ,ｚ平面で閉曲線を表し、一周にわたる ｙ.ｚの平均値はそれぞれ ｙ=b,z=aである。

ここでもし漁業が減少すれば、ａが増えたことに相当し、鮫の数の平均ａが増えるために、かえってｙが減ることが証明できる。

この方程式については、その後大勢の数学者が色々な変形修正を加えた。　それらは今日「数理生物学」において「食う者と食われる者の方程式」とよばれている。

ボルテラの方程式を数値的に解いてみるのも面白い。　下手に計算すると、誤差のために結果が閉曲線にならないことが多い。

Ⅰ．7　軍備縮小は軍備拡張に転ずる

イギリスのリチャードソン(1881-1953) は、初めて数値天気予報の可能性を追及した有名な学者だが、徹底的な平和主義者であり、第1次世界大戦直前のヨーロッパ各国における、軍備拡張競争を解析している。

いつ何処の国でも、国防担当者の演説は似たりよったりであり、大体次のような主旨になる。

「我が国は、何処の国とも平和共存を目標としている。　しかし幾つかの国では、年々防衛予算が増え、我が国としても脅威を感じる。　最愛の祖国を防衛するために、必要最小限度の防衛体制を整えることは、政治家として当然の義務である。．．．」

極端に簡単化して、2個国だけがあり、互いに戦力 y，z の増加が、相手国の現在の戦力に比例するとすれば、連立微分方程式

$$y'=az,\quad z'=by$$

をうる。　これはランチェスターの法則のときと、本質的に同じ方程式であり、このままでは y も z も $+\infty$ に発散する。

現実には、経済的な制約や、国民の世論の反対などによって、y，z はむやみに大きくなれない。　そこで軍備それ自体が、それに比例する抑止力になると考えて、上の右辺にそれぞれ $-\alpha y$，$-\beta z$ を付け加える。　あるいはさらに「不平因子」とよばれる定数を加えて、

$$y'=az-\alpha y+g,\quad z'=by-\beta z+h$$

とする。　不平因子の解釈は色々論じられているが、数学的には単なる付加定数と考えてよい。

これは定数係数線型方程式だから、容易に一般的に解けるが、色々特別な場合の解析や、その平衡点などを調べると、面白い事例が多い。　社会学者の立場では、ここで仮定した係数を、現実のデータからどのようにして推定し、それを世界情勢に当てはめるかが、中心課題である。

リチャードソンによると、1909-1914 年に於ける仏・露　対　独・墺の同盟については、平衡点が不安定であり、早晩発散（大戦争）が避けられなかったという。

第２次世界大戦の後、リチャードソンの研究は、社会科学者の間で再評価され、数多くの拡張修正が行われた。　米ソ核兵器の開発競争に適用した研究もあるが、当初の期待ほどうまく合わないのが実状である。

それよりも、このモデルでは、ｙ，ｚの値に、少なくとも数学的には負の量が許される。　「負の軍備」とは、現実に何を意味するのか？　リチャードソン自身の考えは、夢のようであるが、その意味を真剣に追及してみる価値がありそうである。（［参 8］佐藤総夫氏）

Ｉ．８　流行病のモデル

便宜上独立変数である時間をｔと書替る。　人口ｎ人の閉鎖社会で、すべての人相互の交流が一様に行われるとする。　そこに伝染病が入ったとし、時点ｔでの感受者数をｘ，感染者数をｙとすると、時間のスケールを標準化して

$$dx/dt=-x(n-x)$$

をうる。　これは本質的にＩ．２と同じである。

これを修正して、死亡者や免疫をえたもの、あるいは一時隔離されたものなどをまとめて、除去者数ｚを加え、その変化率が感染者数に比例するとすれば、次の連立方程式をうる。

$$dx/dt=-axy,\ dy/dt=axy-by,\ dz/dt=by,\ x+y+z=n$$

ａは感染率、　ｂは除去率とよばれる定数である。　これをカーマックーマッケンドリックの流行病の方程式という。　ここで c=b/aと置けば、初めの２式は

$$dx/dt=-axy,\ dy/dt=ay(x-c)$$

という、ボルテラの生存競争の方程式と似た形になる。　但しこのときには「平均値」が x=a,y=0であり、値が負になれないので、有限時間後にy=0,x<c で終りになる。　初期値がx_0<cだと、ｘ,ｙ とも単調減少して、大流行にならない。　しかしx_0>cだと最初 ｙは増加し、x=c で最大となり、結果として大流行になる。

これはｃの大小できまる。　大流行になるのは、ｃが小さいときで、それは感染率ａが大きく除去率ｂが小さいときだから、自然な感じである。

この例もまた、人間とバクテリアとの「生存競争」なのであろう。

II . 数値解法

II . 1 数値解法の分類

微分方程式の解は関数である。 従ってそれを解くためには、関数をどのように表すかが、本質的な課題である。

17/18 世紀には、このような課題は問題にならなかった。 関数とは式で表された数学の対象だったからである。 この線に添って、19世紀には微分方程式の解として、色々な特殊関数が導入された。 しかしそのような努力は限界に達した。

そのために一方では、解の定性的性質の研究が進められた。 それはある意味で抽象化されて、今日の「力学系の理論」に発展した。

他方では、各種の近似解法が研究された。 級数による解の表現などである。これは無限次元の解の関数空間を、有限次元の定まった関数空間で近似しようという考えである。 この方向は「近似解法」とよばれている。

数値解法というときには、「関数」を抽象的な対応関係とは考えず、跳び跳びの値に対する数表の形で表現する「離散近似法」を指すのが普通である。 この場合には微分を、極限を取る前の差分で近似するので、「差分法」とよぶことが多い。

通例等間隔の分点 x_k での近似値 y_k を順次求めるのだが、y_{k+1} を求めるときに y_k だけしか使わないのを1段階法といい、以前の値 $y_{k-1}, \ldots, y_{k-m+1}$ をも利用する方法を多段階法という。

また計算を順次進めてゆくことができる方法を、陽的公式といい、途中で方程式を解く必要がある方法を、陰的公式という。 それらの実例や優劣比較は、後に述べる。

ここでは現在の利用状況からみて、専ら1段階法の公式、それも代表的なルンゲークッタ型公式のみを述べる。

II . 2 方法の比較

公式自体の説明を十分しないで、名前だけを挙げるのは片手落だが、まず簡単に優劣比較を述べる。 それは1950年代に論ぜられていた諸点が、計算機環境の変化によって、既に大きく変っているからである。

(a) 多段階法では、初期値x_0の他に出発値 $x_1, \ldots, x_{m-1}$が必要。

これは多段階法の宿命的な欠点である。 しかし1950年代に論ぜられた下記の諸点は、今では余り問題にならない。

(b) 多段階法のある種の公式には、不安定性がある。

これは事実だが、たまたま初期の代表だったミルンの公式に生じたため、強調されすぎた感がある。 今日では、その原因も対策も確立している。 これは個々の公式の性質であり、多段階法の公式全体にわたる欠点ではない。 また不安定性は、数値解法の立場では困る現象だが、数学全体からみれば一種のカオスであって、興味深い実例なのである。

(c) 多段階法では、計算途中の結果から、誤差の自動評価ができる。

これも嘘ではないが、初期のヘンリチの理論は、若干の修正を要する。 また現在では、1段階法でも、関数の計算回数を増やせば、誤差の自動評価が可能なことがわかり、その種の適応型の公式が広く使われている。

(d) 多段階法では、公式の自動生成が可能である。

これは1970年代になってから、強調され出した論点である。 しかし多数の公式を入れたデータベースがあれば、精度を適応型にするのに、事実上問題はない。

1段階法でも、例えばガウス型の完全陰的公式は自動生成可能だし、また公式を自動生成するのは、必ずしも効率的ではない。

(e) 多段階法は刻み幅の変更が困難。

これは(a)と同じ欠点である。 ある程度刻み幅変更可能な多段階公式も開発されてはいるが、ほとんど使われていない。

(f) 多段階法は、プログラムが複雑で、記憶も多く必要とする。

これは1950年代に、記憶容量が極めて小さい計算機を、「機械語」で書いたプログラムを使った「古代伝説」の名残であって、現在では全く問題にならない。

現在では多段階法は、特別な問題以外には使われなくなった。 ただその理由は、必ずしも上記のような優劣比較の結果とは限らず、計算機の高速性に頼って、機械的に計算する方向にあるように見えるのが気にかかる。

次に陰的公式について述べる。

1950年頃まで、陰的公式は存在しなかったといってよい。　それが使われるようになったのは、1962年頃に、今日「デバイスの方程式」と呼ばれる微分方程式の数値解が、それまで人によってまちまちであったのが、陰的公式によって漸く正しい答が求められてからである。

これは次回に述べる「硬い」(stiff) 方程式に関する不安定性の典型例だった。

実は同種の現象が、放物型偏微分方程式について、既に1928年に理論的に予言されていた。　それが実際に計算機による数値計算で確認されたのは、その20年後であった！

硬い方程式に対しては、手間がかかっても陰的公式によるのがよいことも、以前から知られており、陰的1段階法も最初の研究が1964年に現れているが、それが注目され始めたのは、1980年代のようである。　それは計算機が高速になり、代数方程式を解くことが容易になったためである。　ところが皮肉なことに、計算機が高速になったために、かえって陽的公式により、刻み幅を極度に小さくして解く素朴な解法のほうが早いといわれるようになった。

微分方程式の数値解法には、その他両者の混合型のような、擬似ルンゲークッタ法や、高階導関数を補助に使う公式など、各種の変形がある。

また以上は、専ら初期値問題を念頭においたが、境界値問題についても、差分による数値解法が可能である。　後に例を挙げたい。

II．3　ルンゲークッタ型公式

以下微分方程式の初期値問題の標準形として、

$$y' = f(y),\ y(x_0) = y_0$$

を採る。　これは決して1階変数分離形、あるいは自励系に限定したのではない。

y はベクトル（多次元量）であり、独立変数 x もまた、変数を1個増やして

$$y'_{n+1} = 1,\ y_{n+1}(x_0) = x_0$$

を追加すれば、y の成分に含まれるのである。　なお高階微分方程式が、逐次導関数をすべて未知量にすることによって、連立方程式の形すなわちベクトルの形に書き直せることは、よく知られている。

1段階法の典型であるルンゲークッタ型公式では、適当なyの値に対して、右辺の関数を何度か計算し、それらの重み付き平均から、次の値に関する修正量を求める。　その折に必要な関数の計算回数pを、その公式の段数(stage)という。

公式自体は、もしも計算誤差なしに正しく計算できたとしたとき、えられた値が、初めの点に於ける真の解のテイラー展開と、q次の項まで合うように作る。

このqを位数(order)という。

ルンゲークッタ型公式を表すときには、例えば6段5位公式というように、段数と位数とを記述するのが習慣である。　段数を決めたとき、えられる位数には限界があるが、その最大を達成可能位数という。　普通には、最大位数の公式を使うが、問題によっては、誤差評価・安定性その他の理由を考慮して、わざとそれよりも低い位数の公式を使うこともある。

全く一般のp段ルンゲークッタ型公式は、ステッターによる行列表現

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ w_j \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \alpha\text{はp次正方行列} \\ w\text{は長さpの横ベクトル} \end{array}$$

で記述される。　しかし普通には、さらに行の和に当る縦ベクトルβ_i ; $\beta_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}$ を追加する。

この意味は以下の通りである。

現在のx_nでの値 $y=y_n$ が既知として、$x_{n+1}=x_n+h$ での値 $\tilde{y}=y_{n+1}$ を計算するために、補助のp個の変数 $k_1,\ldots,k_p$を用意し、連立方程式

$$k_i = h\ f\left(y + \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} k_j\right),\quad i=1,\ldots,p$$

によってそれらを求める。　k_iが決れば

$$\tilde{y} = y + \sum_{i=1}^{p} w_i k_i$$

として、次の値が決まる。

これは全く一般の陰的公式だが、もしも行列 $[\alpha_{ij}]$ の対角線とその上がすべて0ならば、k_iは $k_1,\ldots,k_p$の順に、順次計算できる。　これが普通の陽的公式である。　それが上三角であるときには、各 k_i は1変数の方程式になるので、まだしも解きやすい。　これを半陰的公式ということがある。

私のささやかな経験によると、結果的に半陰的公式になるのはまだしも、当初から半陰的公式を意図して作るのは、陽的公式と比べて、計算の手間が増加する割に、精度や安定性の改善が今一つであり、実用的に有利ではないらしい。　硬い方程式に対処するには、面倒でも完全陰的公式を使うしかないらしい。

II．4　ルンゲークッタ公式の実例

段数に関係なく、1位（以上）の条件は重み係数の和が1：

$$\sum_{i=1}^{p} w_i = 1$$

である。　2位（以上）の条件は、上に併せて

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \beta_i = \frac{1}{2}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}$$

である。　従って特に1段1位の陽的公式は

$$\tilde{y} = y + hf(y)$$

しかない。　これをオイラー法というが、解の存在証明の一つの方法である、コーシーの多角形法も、全く同じ式である。

特に1変数の $y'=y, y(0)=1$ に、$h=1/n$ として $x=1$ までオイラー法を適用すると、$x=1$ での値 $\tilde{y}$ は、計算誤差がなければ

$$\tilde{y} = (1+1/n)^n$$

となる。　ここで $n\to\infty$ とすると、これは真の値 e に近づくが、その収束は遅い（誤差が $1/n$ のオーダー）。

オイラー法は、誤差が大きいために、数値解析の面からみて、誤差解析の対象としては面白いが、実用的な解法としては、余りにも誤差が大きすぎるので、普通には使われない。

1段公式でも、陰的公式にして　$\alpha_{11}=\frac{1}{2}$, $w_{11}=1$（中点公式）ととると、2位になる。

2段2位陽的公式は、パラメタが1個残り

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0, \quad w_2 \alpha_{21} = \frac{1}{2}, \quad w_1 = 1 - w_2$$

という条件で決まる。　$\alpha = \alpha_{21}$ をパラメタとするとき、すべての係数が非負であるためには、$\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$ が必要である。　$\alpha = \frac{1}{2}$ としたとき、改良オイラー法（中点公式）、$\alpha = 1$ としたとき、修正オイラー法（台形公式）という。

それぞれ次のように表される。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3位の条件は、さらに次の2個が加わる。

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \beta_i^2 = \frac{1}{3}$$

(*) $$\sum_j \sum_i w_i \alpha_{ij} \beta_j = 1/6$$

3段3位の陽的公式は、2個のパラメタを含む。 その一般解は、次の2つの型のいずれかになる。 後者は前者において、a → b となった極限である。

いずれも $\alpha_{1j} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$, $a = \beta_2 = \alpha_{21}$, $b = \beta_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32}$.

型 I $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ の下で $w_2 = (3b-2)/6a(b-a)$,

$w_3 = (2-3a)/6b(b-a)$, $w_1 = 1 - w_2 - w_3$, $\alpha_{32} = 1/6aw$, $\alpha_{31} = b - \alpha_{32}$.

型 II $a = b = \frac{2}{3}$, $c = \alpha_{32}$, $w_1 = \frac{1}{4}$, $w_2 = 1/4c$, $w_3 = \frac{3}{4} - w_2$.

3段3位陽的公式の代表例は、次の通りである。 (最後のは半陰的)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & 2/9 & 4/9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1/6 & \frac{2}{3} & 1/6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1/6 & \frac{2}{3} & 1/6 \end{bmatrix}$$

いずれも型Iである。 第1のはシンプソン 3/8公式の半分に当り、最も0が多くてプログラムしやすいが、精度は余りよくない。 第2のは、この型の公式の中、ある評価について打切り誤差最小の公式である。

第3のはクッタの公式とよばれ、右辺が独立変数のみの関数であって、数値積分になるときには、有名なシンプソン公式になる。 但し微分方程式の数値解法公式としては、4位でなく3位に留まる。 シンプソン公式を真似して4位にするには、4段（後述）にするか、または陰的公式にする必要がある。 第4のがその例である。 この公式は、いくつかの名でよばれている。 じっさい何人かによって何度も再発見された。 半陰的であり、方程式を解くのは k_2 のみで済む。

3段3位の公式は、余り使われていないようだが、それ程精度を必要としないときや、2位または4位公式と組合せて比較するとき、有用である。

4位の条件は、さらに次の4条件が加わる。 これらは4段4位の陽的公式については独立であるが、4段未満の陰的公式については、同一になったり、自明な式に退化したりすることがある。

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \beta_i^3 = 1/4$$

$$\sum_j \sum_i w_i \alpha_{ij} \beta_j^2 = 1/12$$

$$\sum_j \sum_i w_i \alpha_{ij} \beta_i \beta_j = 1/8$$

$$\sum_k \sum_j \sum_i w_i \alpha_{ij} \alpha_{jk} \beta_k = 1/24$$

4段4位の陽的公式は、2個のパラメタを含む。 その一般解は、1901年にクッタが6種の型に分類して、完全に求めた。 そのうち次の公式は、1896年にルンゲがシンプソン公式に当るものとして求めた「本来のルンゲ－クッタ公式」であり、4段4位陽的公式中唯一の単調公式（$0 = \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4 \leq 1$; すべてのパラメタが非負）である。

0	0	0	0
1/2	0	0	0
0	1/2	0	0
0	0	1	0
1/6	1/3	1/3	1/6

5位以上の公式も、近年多数作られている。

II．5 条件式の整理と陰的公式

ルンゲ－クッタ型の公式がq位になるための条件式は、次々に求めることができるが、次第に複雑になり、ある程度以上になると、計算機を使って計算せざるをえなくなる。 しかしこれらの条件式は、実質的にw_iとα_{ij}とについて1次の下記の式に整理できることが知られている。

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \beta_i^{k-1} = 1/k \qquad (\alpha_{ij} \text{を含まない式})$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \beta_j^{k-1} = \beta_i^k / k \qquad (k=1 \text{は} \beta_i \text{の定義式})$$

(つづく)

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \beta_i^{k-1} \alpha_{ij} = w_j (1-\beta_j^k)/k$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} w_i \beta_i^{k-1} \alpha_{ij} \beta_j^{\ell-1} = 1/\ell \quad (k+\ell)$$

（これらの内適当な範囲のk,ℓについて）

これらの式の相互関係も研究されており、必ずしも互いに独立とは限らず、一部のみで十分である。　但し具体的な公式の計算には、条件式のうまい選択が必要であり、残りの式も検算や誤差の推定に利用するのがよい。

陽的p段公式の達成可能位数は、

$p \leq 4$ のときは$q=p$; $p=5$～10のときはそれぞれ 4,5,6,6,7,7

であることが知られているが、一般式はわかっていない。　これは条件式が複雑であり、ある位数までの連立代数方程式に解がないことを、厳密に証明するのは、一般的な算法が知られているものの、具体的に調べるのはものすごく手間の掛かる作業だからである。

ところが完全陰的公式まで考えると、p段の達成可能位数は2pであり、最高位数の公式は唯一つであって、理論的に計算できる。　実は分点に相当する$\beta_1, \ldots, \beta_p$をすべて相異るように与えると、以下のようにして少なくともp位の陰的公式が計算できる（選点法）。

まずw_iとβ_iのみの最初の条件式によってw_iを定める。　この関係式が$k=q$まで成立すれば、公式はq位になる。　次に2番目の条件式の$0 \leq k < p$の場合を利用して、α_{ij}を定める。　残りの式は検算用に使う。

この形の公式、特にβ_iが等差数列をなす場合などは、まったく別の考えから、結果的にこれと同じ公式を導いた例が少なくない。

特に最高位数2pの公式は、以下のようにして求められる。　これはガウスの積分公式に相当するものである。

まず区間[0,1]でのp次直交多項式（修正ルジャンドル多項式）の零点を求めて、順次$\beta_1, \ldots, \beta_p$とする。　それから上記のようにw_i, α_{ij}を求める。

区間[-1,1]での通常のp次ルジャンドル多項式の零点を$\gamma_1, \ldots, \gamma_p$とすれば、$\beta_i = (1+\gamma_i)/2$であり、重み$w_i$は通常のガウスの積分公式のときの半分になる（区間の長さが半分であるため）。

その他の係数については、つぎの関係が知られている。

$$\alpha_{ij} = w_i/2 + a_{ij}, \quad a_{ii} = 0, \quad a_{ij} + a_{n+1-i,\,n+1-j} = 0$$

この最後の式は、行列 $[a_{ij}]$ の中心に対して点対称な位置にある値が、互いに符号が逆であることを意味する。　また行列 $[\alpha_{ij}]$ の固有多項式は、e^x の (p,p)-パデ展開式の分母の多項式を逆順に並べた(xを$1/x$ に変えて整理した) 多項式になる。

しかしこれらの関係式を下手に使うと、誤った公式をえたり、係数に大きな誤差が入ったりしがちなので、検算用に活用するのが安全である。

この「ガウス型」の公式について、p=5 までは理論的（代数的）に計算できる。p=1のときは前に述べた陰的中点公式であるが、 p=2,3は比較的簡単で実用価値もあるので、具体式を挙げておく。

$(p=2)$

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 - \sqrt{1/12} \\ 1/4 + \sqrt{1/12} & 1/4 \\ \hline 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$(p=3)$

$$\begin{bmatrix} 5/36 & 2/9 - \sqrt{1/15} & 5/36 - \sqrt{1/60} \\ 5/36 + \sqrt{5/192} & 2/9 & 5/36 - \sqrt{5/192} \\ 5/36 + \sqrt{1/60} & 2/9 + \sqrt{1/15} & 5/36 \\ \hline 5/18 & 4/9 & 5/18 \end{bmatrix}$$

ガウス型を修正して、$\beta_1 = 0, \beta_p = 1$ と決めると、達成可能位数が2p-2になる。

数値積分の場合にならって、ラダウ型とよぼう。　このとき分点 β_i $(2 \leq i < p)$ は、区間[0,1] で重み $x(1-x)$ に関するp-2 次直交多項式の零点として計算できる。p=7までは理論的に計算できるが、p=2 は陽的な台形公式になり、p=3 は前に挙げた@シンプソン公式に当る半陰的公式である。(3段の)

p段ガウス型の公式と、p+1 段ラダウ型の公式は、ともに2p位であり、しかも誤差の主要項が同じ形で互いに符号が逆なので、両者を併用する方法もある。しかし実際には刻み幅 h が余程小さく、方程式をかなり精密に解かないと、理論通りにはならない。

なお陰的公式を使って方程式を解くには、逐次代入も使われるが、それでは反復回数が多い上に、安定性に問題があるので、面倒でもニュートン法などを使う必要がある。

Ⅱ．6　2階方程式の直接解法

通例2階方程式は、$y_1=y, y_2=y'$と置換えて、連立方程式に直して扱うが、2階導関数 y'' は中心差分 $[y(x+h)-2y(x)+y(x-h)]/h^2$ によって、直接に近似できる。

ここで$h\to 0$とすれば、中心差分は y'' に近づく。　理論上では、2階導関数をこの極限値として、直接に定義して扱うことができる(1階を通らずに直接 2階に入る!)。

この方法は、特にy'を含まない2階微分方程式（力が位置のみで決る型の問題）については有効である。　1階導関数 y' を含む場合には、それを中心差分

$$[y(x+h)-y(x-h)]/2h$$

で近似するのが、位数の関係で通例である。　しかしこの算法は、問題によっては不安定性を生じることがある。

y''を中心差分で近似するのは2位の近似だが、対称性がある問題では、実質的に3位になる。　この算法の難点は、そのままなら簡単だが、精度を上げるのが困難な点である。　精度をさらに上げたい場合には、ステルマーーコウェルの予測子・修正子法を、文献[6]が推奨しているが、余り使われていないようである。

III　数値解の例と問題点

数値解法は既に広く活用され、多くの成果を挙げている。　以下に述べるのは、いささか「反面教師」的な面を強調しすぎた嫌いがあるが、計算機を信用しすぎないように注意する次第である。

Ⅲ．1　誤差に注意

数値解法では、誤差が避けられない。　打切り誤差は理論的に評価できるし、また刻み幅を変えた結果から推定できることが多い。　しかし問題によっては、それだけでは済まないこともある。

誤差を見るために、わざとオイラー法を使ってみる。

例１．単振動の方程式 $\ddot{x}+x=0$　（独立変数をt,関数をx とする。）　$\dot{} = d/dt$

初期値 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$とすると、厳密解は $x=\cos(t)$．　次ページの fig.1は、これをオイラー法で解いた値を$(x,\dot{x})$ の相平面上に書いた図で、文献[11]から引用した。　普通にオイラー法で解けば、必ずこのように外に広がる螺線状になる。

物理的には、振子の振幅が次第に増えるのだから、どこからかエネルギーを密輸入しているわけで、とうてい許せない誤りである。

他方正しくは減衰振動になるはずの $\ddot{x}+0.2\dot{x}+x=0$ を下手にオイラー法で解くと、下の図のような閉曲線（完全な周期解）をうる。　一見正しいように見えるが、これは数値解で時折生じる「幻の解」である。

この現象は、簡単に解析できる。 $\dot{x}=y$とおいて、連立方程式に直すと、単振動の方程式に対するオイラー法の反復は

$$x_{n+1}=x_n+hy_n,\ y_{n+1}=y_n-hx_n$$

となる。　複素数を使って $z_n=x_n+iy_n$と置くと、これは

$$z_{n+1}=z_n-ihz_n,\ \text{すなわち}\ z_n=(1-ih)^n$$

となる。　ゆえに $|z_n|=(1+h^2)^{n/2}$ となる。　hがいくら小さくても、これでは次第に絶対値が増加する。

半周した所では、$n=\pi/h$　なので $|z_n|=(1+h^2)^{\pi/2h}$ となる。　hが十分に小さければ、テイラー展開により

$$|z_n|\fallingdotseq \exp(h\pi/2)$$

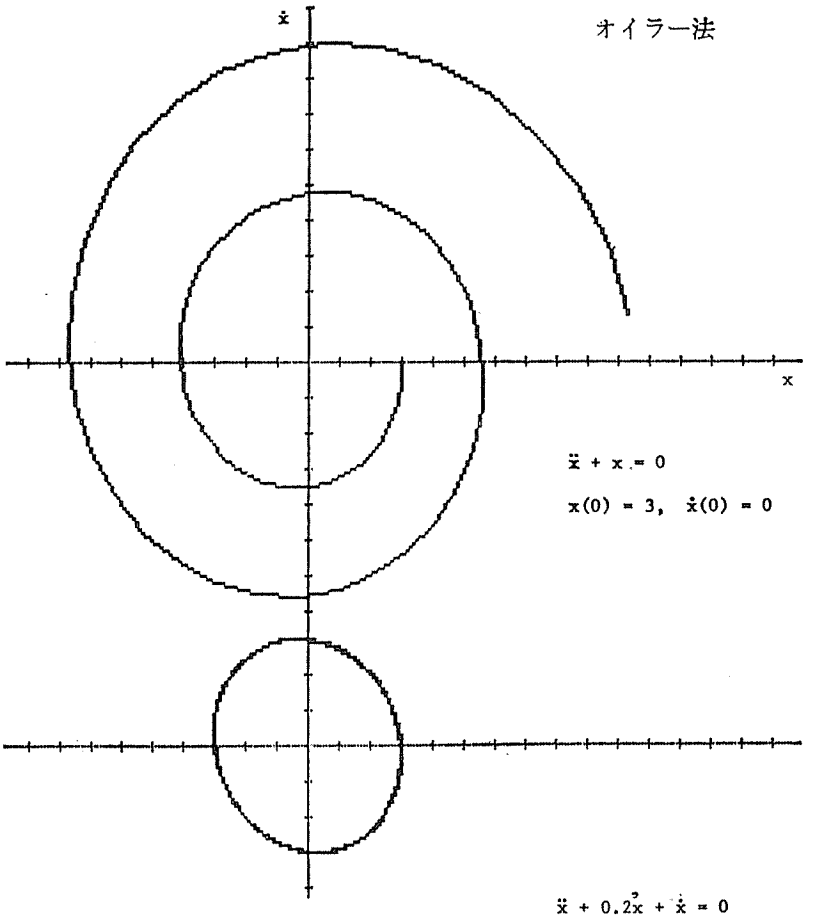


fig. 1

と近似できる。 h=0.2 とすると、これはほぼ 1.3である。 実際図で x(0)=3 から始めて、半周したとき-4になっている。

他方減衰振動では、オイラー法の反復は

$$x_{n+1} = x_n + h y_n \,,\; y_{n+1} = y_n - 0.2 h y_n - x_n h$$

となる。 これは少し複雑だが、2次方程式 $u^2+0.2u+1=0$ の解を α, $\bar{\alpha} = -0.1 \mp \sqrt{0.99}\, i$ と置くと、

$$z_n = x_n + \alpha y_n = (1 \mp \alpha h)^n \;;\; |z_n| = |1 - \alpha h|^n$$

となる。 $|1-\alpha h|^2 = 1-0.2h+h^2$ だから、h=0.2 と選ぶとちょうど1になり、完全な閉曲線になる。 但し $z_n = x_n + \alpha y_n$ なので、(x,y) 平面では円とならず、少し傾いた楕円になる（図参照）。

一般に単振動の方程式を、陽的ルンゲークッタ型公式で解くと、位数が高く刻みが十分小さければ、一応閉曲線をうるが、理論上では(特別なhの値以外では)、螺線状になるはずである。 「ガウス型」陰的公式を使うと、対称性から閉曲線をうるはずだが、これは問題の特殊性がききすぎている。 どうしても周期関数である解を出す必要がある問題では、数値解法によらず、三角級数展開などの近似解法を利用する方が適切である。 (Ⅲ.4 参照)

Ⅲ．2 解の一意性が成立しない方程式

純粋数学者は微分方程式に対して、解の存在や一意性ばかりを論じているという批判がある。 確かにそれらがわかれば解けたような気になるのは、「構成的数学」の立場から見ても不十分である。 しかし「現象が起る以上、解があるのは当然であり、存在証明など重箱の隅をつつく話だ」という意見には、賛成できない。 方程式を立てる段階で、数多くの理想化・抽象化がされているからである。 特に社会科学関係の問題では、そもそもその現象自体に解があることすら、決して自明ではない場合が多いように思う。

しかし実際に問題を引き起こすのは、解の存在よりもむしろ一意性（が成立しない場合）である。

単独1階の微分方程式 $y'=f(x,y)$ については、右辺の関数が連続な限り（リプシツ条件などなしに）初期値問題の解が存在することを、ペロンが示しているが、一意性は必ずしも成立しない。

例2．$y'=y/x$, $y(0)=0$ この解は cを定数として、直線 $y=cx$ 全部である。解釈によっては、 cを∞とした極限に相当する $x=0$ も解である。

この例では、右辺の関数が、(0,0) に於いて不定になるので、数値解法を機械的に適用すれば誤りとなる。だから解が無限にあっても不思議ではない。 しかし次の例は、ひっかかり易い。

例３．　$y' = 2\sqrt{y}$, $y(0)=0$　(I.3, I.4参照)

期待される解は、$y=x^2$ である。　しかし陽的公式を普通に使って解けば、必ず自明な解 $y=0$ がでる。　これは誤差ではない。 $y=0$ も正しい解なのである！

この場合には、リプシツ条件が成立せず、解の一意性が成り立たない。　上記の２つの解は、それぞれ最大解と最小解であり、両者の中間に次のような解が無限にある。

ある正の定数 cに対して、$0 \leqq x \leqq c$ では0; $x>c$では $(x-c)^2$

これは解析関数ではないが、現在の数学でいう「関数」に属する。　両極端は、$c=0$ のときと、c が無限大になった極限の場合である。

しかしこの「一般解」の定数 c は、何か他の条件が明示されない限り、決めようがない。　通例は、$c=0$ に相当する解 x^2 を求めるのであろう。　数値計算でこれを出すには、特別な工夫がいる。　例えばノイズを入れて、初期条件を小さい正の数 ϵ にするのが一つの方法だが、ϵ と刻み h を０に近付けたときの二重極限は、順序交換ができないので、両者の大きさをうまくバランスさせないと、期待した値が出ない。

文献[9] には、I.4 に挙げた例を鮮やかに解いている。　しかしよく解析してみると、これは誤差がちょうどうまいノイズを与えてくれた「怪我の功名」という印象がある。　$\theta_0=60$ とし、プログラムでは $\cos\theta_0 = 1/2$ と置いたが、計算中では cosの計算値を使ったために、その誤差が初期値にちょうどよいノイズを入れてくれた形であった。　実際他の計算機で計算すると、平方根の中が負になって誤りになったり、恒等的に０という解が出たりした。　そのことを原著者ヘンリチに知らせたら、そういうことを初めて知って驚いた旨の御返事を頂いた。

同様の現象は、y' を含まない２階方程式の中間積分で、初期条件が $y'=0$ のときに起りやすい。　この場合にはなまじ積分をせず、Ⅱ．６に述べた方法により、直接に元の２階方程式を解くほうがよい結果をうる。

実は偏微分方程式の研究者の間で、しばしば（解が一意的でない場合に）「解とは何か」という論争を耳にする。　それはどうも「哲学的」な議論ではなく、「この場合に期待される解はどれか」という、極めて実際的な議論のようである。

「解の一意性」は一見自明なようだが、それがないと混乱し、立往生するという意味で、やはり重要な論点と思う。

Ⅲ．3　数値的不安定性

例4　$y'=-y$, $y(0)=1$ をオイラー法で解く。　刻み幅を $h=0.1$ とすると、0.1での値は 0.9であり、真の値よりも 0.0048374だけ小さい。　これはオーダー $h^2/2$ であって、理論通りである。　これを反復して6まで計算すると、

0.0017970　(真値：0.0024888；　相対誤差約28%)

と意外によい値をうる。

ところがもしも $h=1$とすると、y が0になり、以下すべて0をうる。　もしも $h>2$ならば、y は-1より小さくなり、数値解は振動して絶対値が次第に大きくなるという、真の解とは似ても似つかぬものになる。

このような場合に、$h>2$ ととるのは非常識だ、といって済ませるわけには行かない。　$y'=-ay$ $(a>0)$で、$a=10000$ のときに $h=0.001$と取れば、全く同じことになる。

この例は刻み幅が大きすぎるために生じる不安定性だが、次の例はさらに興味深いと思う。

例5　$y'=y(1-y)$, $y(0)=\frac{1}{2}$；真の解は $y=1/(1+e^{-x})$であり、$x\to\infty$ のとき1に近づく。

これを中点公式：$y_{n+1}=y_{n-1}+2hy_n(1-y_n)$によって解く。　計算を始めるための出発値を $y_0=0.5$, $y_1=0.5+h/4$ ととる。　$h=0.1$ としたときの症状の要点を挙げる。

1．$x=12.0$ までは順調に増加して、1.00000 に達した。　ここで止めると、万事好調と錯覚して終る。

2．$x=12.2$ から交互に 1.00001と 0.99999 とが現れ、振動の兆候が見え始める。

3.振動は次第に激しくなり、$x=20$のあたりでは、大体 xが 1増すと振幅が 3倍弱に増える。　やがて振動は 1に対して対称でなくなり、小さい値の方が 1から離れる傾向を示す。

4．$x=25.4$ でついに負の値が現れた。　このあたりでは、最大値は 1.5を越え

る。　ところがここを頂点として、急激に振動がおさまり始める。

5. やがて振動の最大値は1より小さくなる。 x=30 辺では振幅は0の上下 ± 0.022程に減り、なおも減少し続ける。

6. x=37.2 での値 -0.00002 を最後として、値はすべて正に戻る。　まもなく振動は消え、値は0の近くから単調に増加するようになる。

7. x=47.5 の付近で値が元の 0.5に戻り、以後最初と似た形になる。　x=60.0 のあたりで 1.00000になり、以後2.以降の症状を繰り替す。

この計算は、根気さえあればパソコンで（電卓でも）簡単にできるので、一度は試みるとよい。　私がやったのは十数年前で、まだグラフィックスが自由に使えなかった時代なので、数値を示したが、今では画面に図で示すほうが早い。

もちろん微分方程式の解としては、上記の2.以降はまったく無意味である。しかし差分方程式の解としては、これは全く正しい。　これは公式に誤差を拡大する性質があるためで、刻み幅 hがいくら小さくても、またどれ程高精度で計算しても、必ず生じる現象である。── もちろん h や y_1 の値や計算精度により、振動の始まる点・おさまる点などが変る。(h→0のとき, 差分解→真の解は一様収束とは限らない)

数値的不安定現象自体は、1950年頃から知られており、「このような不安定性を内蔵する公式は使うな」と教えられた。　その原因も解析され、振動を防ぐための平滑子（フィルター）の理論も研究されていた（結局余り使われなかったが)。── 線型方程式では、振動が一旦始まると無限に増大するが、例5のような非線型方程式では、自動的に振動を抑えることがあるというのも、1969年以前に知られていた。　しかしこれこそ現在流行のカオスの一例であることがはっきりしたのは、1970年代の後半のようである。

例5において、上のように交互に振動する時期と安定化する時期とが生じるのは、実は刻み h がごく小さい場合なのである。　h=0.4 位にとると、上記の5.以降振動はおさまるが、値は減少し続けて、$-\infty$ に発散してしまう。　このこともカオスの理論から、完全に説明できる。

ある分野で「困った現象」が、別の分野では興味深い現象であり、さらに有用な現象でさえありうるというのは、工学の諸分野でしばしば実際に起こる。　その意味で、諸分野間の交流が重要と思う。

Ⅲ．4　2階方程式；特に単振動の方程式

1階微分方程式は、方向を与える場として記述でき、それによって図が書きやすい（例えば文献[1],[4]）。　2階微分方程式になると、初期条件は値と方向とを指定しなければならないので、そのままでは図が書き難い。

もちろんそれに対して色々の方法がある。　独立変数xと関数 y及びその導関数y'とを、うまく3次元の図に書くのも一つの方法である。　それを射影した(y, y')平面（相平面）上の曲線で表すこともできる。　また下の図のように、一枚に同じ点を通り、方向が様々な曲線を重ね書きすることもできる。　どれがよいかは目的による。

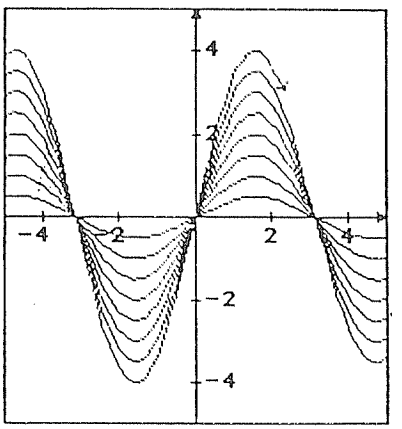
下の図は、前にも述べた単振動の方程式

例6.

$$y''+y=0$$

を、本来のルンゲークッタ公式で解いた例である。　原点から始まる色々な方向の解曲線が、すべて先で1点に会することがわかる。── それらはすべて正弦曲線の定数倍だから、理論上では当然である。　数値計算では、その会合の程度により、誤差を見積ることができる。

yとy'との連立型に直さず、直接にy''に対する中心差分で解くこともでき、その結果は意外によい。　この場合には、刻み幅を$h\geq 2$ と非常識的に大きく採らない限り、前節のときのような不安定性は生じない。



その理由を簡単に述べると、以下のようになる。

$y'=-y$ の場合には、中点公式による差分方程式は

$$y_{n+1}+2hy_n-y_{n-1}=0$$

の形である（例 5では中央のy_nが $y_n(1-y_n)$になるが、本質は同様である。）

この一般解は A,Bを定数として

$$A\alpha^n+B\beta^n;\quad \alpha,\ \beta \text{ は } t^2+2ht-1=0 \text{ の解}$$

である。 積$\alpha\beta=-1$ なので、$0<\alpha<1$, $\beta<-1$となる。$A\alpha^n$ が真の解であり、$B\beta^n$ は紛れこんだ無縁解なのだが、絶対値が大きいために、いつかは誤差の方が本物よりも大きくなる。 この「誤差の癌」が、激しい振動という不安定性として現れる。

ところが $y''+y=0$ の場合には、差分方程式が似ているけれども違う

$$y_{n+1}-(2-h^2)y_n+y_{n-1}=0,\ \text{特性2次方程式}\ t^2-(2-h^2)t+1=0$$

となる。 この解は $h<2$ならば、互いに共役な絶対値1の複素数であり、僅かの計算誤差を無視すれば、相平面上の数値解は正しく円の上に載って周期的になる。

Ⅲ.1の末尾に述べたガウス型の陰的公式による場合でも、えられる方程式を（連立1次方程式として）正しく解くことにすれば、理論的な解は次のようになり、相平面上の曲線は、完全な円になる。（このことは段数pによらず正しい）

p=1 のとき：$y_n+y_n'i=[1-(h^2/2+ih)/(1+h^2/4)]^n$

p=2 のとき：$y_n+y_n'i=[1-(h^2/2+ih(1-h^2/12))/(1+h^2/12+h^4/144)]^n$

但し数値解曲線が真の曲線と同じになるからといって、誤差が0と早合点しては困る。 誤差は解曲線上の位置（パラメタ）の狂いとして現れる。 実際関数の数値で比較すると、大きなxの値に対するyの数値は、そのxに対する真の値とは大きく離れる。 このような解は「全体的な性質を正しく反映している」という意味で、よい解というべきなのである。 しかしこのように「期待されるべきよい性質」が具体的に表現できるのが、このような極めて特殊な例に限られるというのが、問題点なのである。

ついでに2,3 の注意をしておく。 上で $h\geq 2$を非常識といったが、aが大きな正の数であって、$y''+a^2y=0$ を解くときには、$h<2/a$ という実際的な制限になる。

しかしこのときには真の解自体が A sin(ax)+B cos(ax) という激しく振動する関数になるのだから、その振動周期よりも小さく刻みを採らない限り、現象に忠実な解がえられないのは当然かもしれない。 これも（次節のとは少し違うが）一種の「硬い方程式」の例である。 （一種の別名現象ともいってよい）

次の例は「一種の悪戯」である。 $y''+y=0, y(0)=0$ の解は、sin x の定数倍だから、すべて $x=\pi$ で0になる。 これを言い換えると、2点境界値問題

$$y''+y=0;\ y(0)=0,\ y(\pi)=1$$

には解がないはずである。 このような「解のない問題」を数値的に解いたらどうなるか？

その解法には色々ある。 このような線型の場合には、0での導関数値を仮定して解き、右端での値を合せる「盲打ち法」も悪くない。 しかし標準的な方法は、等間隔の分点について中心差分式を並べ、端点での値を与えられた値に指定して、全体を連立方程式として解く手法である。 この場合には連立1次方程式（しかもいわゆる3項方程式）だから、かなり多くの分点をとっても直に解ける。

本来ならば、その連立1次方程式には、「解がない」はずである。 しかし色々な誤差のおかげで、大抵の場合奇麗に解け、いかにももっともらしい数値が出てくる。

しかし素朴な「計算機教」の信仰者ならともかく、計算機から出てきた数値を無条件で信じることはない。 その数値は「不安定」である。 分点の個数を変えたり、πの近似値の桁数を変えたりすると、大きく変動するのが普通である。—むしろそうした比較検討から、この数値は「幻の解」と見抜く力が必要らしい。

大抵の場合「解のない方程式」を数値的に解くと、いかにももっともらしい数値をうる。 しかし少し条件を変えて何度も計算し直すと、数値が大きく変動して、馬脚を現すものである。 この種の実験も（高等学校の段階では無理かもしれないが）、どこかで一度経験しておくのがよいと思う。

（ただし：）
［私自身の経験をいうと、学生にこのような計算をさせることは比較的易しい。しかしその「本当の意味」を説明して納得してもらうのは、十分すぎる位時間を掛けても難しい。］

Ⅲ. 5 硬い方程式

前出の例4の方程式（の修正） $y'=-ay$, $a>0$ では、真の解は $x\to\infty$ のとき0に近づくが、オイラー法を初め陽的ルンゲ・クッタ公式で解くと、刻み幅 h がある限界以下でない限り、単調に減少して0に近づく解はえられない。── このことは $h\to 0$ のとき、数値解が真の解に近づくことと矛盾してはいない。 問題はどの位 h が0に近い必要があるかという、普通の数学では問題にしない「定量的」な話と関連するのである。

もし a が極めて大きいと、h を「実用にならない」位小さくしなければならないこともある。 もしもこの a が定数でなく、次第に限りなく増加する関数であれば、h を一定にすると、それがいくら小さくてもいつかは破綻をきたす。 h を次第に小さくすると、とてつもなく時間が掛って実行困難になる。

計算機が発展して、微分方程式の数値解が広く実用になった1950年代から、このような種類の解き難い微分方程式の例が、化学反応（公害を含む）や電子回路などの実際的な問題から多数生じた。 「手怖い問題」という気持で、硬い方程式(stiff equation)とよばれるようになった。 初めの内は「計算機が速くなればその内に解決する」と軽く考えられていた（近年では計算機が速くなったので、再びそういう人が少なくない）。

この種の問題の困難性は、上の例で $-a$ に当る固有値の内、さまざまの程度の絶対値が大きい負の実部をもつものがあることが、かなり本質的である。1956年にダールキスト(Dahlquist)は、数値解法について<u>A安定</u>(AはAbsoluteの頭字)という概念を導入した。 それは h を一定にして $x\to\infty$ に向って解いたとき、どのような実部が負の固有値に対しても、つねに0に近づく数値解を与える算法である。

彼の結果は甚だ「悲観的」だった。 陽的ルンゲ・クッタ公式はすべてA安定ではないし、「予測子・修正子法」も、台形公式より精度の高い公式は、すべてA安定でない。 陰的ルンゲークッタ公式の中には、ガウス型のようにA安定な「公式」もあるが、それを「<u>A安定な算法</u>」として実現するためには、工夫がいる。 例えば方程式を逐次代入法で解いたのでは、A安定にならない。 さらにA安定という条件自体が、モデルとしての線型方程式に関するものであるだけに、

硬い方程式を解く実用上では「気休め」にしかならない場合が多い。

「常微分方程式の数値解法」自体の研究はもはや終ったという意見が強い。それが正論なのかもしれないが、硬い方程式に対する数値解法は、30年間実質的な進歩がなかった感がある。　余り高い精度を要しない実用上では、ここには述べないが、ギヤの公式が有用である。　それを精密に解こうとするならば、結局は超高速のスーパーコンピュータを使って、莫大な計算料を払うしかないのかもしれない。　しかしもしかすると、我々はまだ「硬い方程式」の本質に十分迫っていない可能性もある。

1986年の国際数学者会議（バークレイ）の折、数値解析の部会で、最初に講演したのが他ならぬダールキストだった。　彼の講演での主張を要約すると、次のようになる。　硬い方程式は研究すればする程、その難しさが身にしみる；　人工的な例題はどの方法でも簡単に解けるが、現実の問題は容易に解けない；　色々の方法で解いてみたとき、どれが本当の解なのかさえよくわからないことが多い。――

偏微分方程式についてもそうだが、硬い方程式の数値解法についても、もしかすると古典的な数値で近似する考え方自体に限界があり、大域的な関数の傾向を「計算機で扱える形に」表現するアイディアが必要なのかもしれない。　そのような意味での研究は、終ったどころかこれから始まるのだろう。

結び：　終りの方はお説教が多くなった。　その部分は、何か「大きな発想の転換」が必要と思いつつ、具体的にどうすべきか暗中模索中、という状況の現れと思って、読みとばしてほしい。

参考文献

全般的

[1] 笠原皓司： 微分方程式の基礎，朝倉，1982

[2] 長島隆広： 常微分方程式 134例とその解，丸善（自費出版），1982

[3] 一松信： 微分方程式と解法，教育出版，1976

[4] 森本光生： パソコンによる微分方程式，朝倉，1987

[5] M.Artigue & V.Gautheron, Système différentiels, Cedic/Fernand,Paris,1983

数値解法

[6] P.Henrici/清水留三郎・小林光夫 訳： 計算機による常微分方程式の解法， I，II サイエンス社 1973（原著1961）

[7] C.Butcher, Numerical solution of ordinary differential equations, Wiley,1987

実例

[8] 佐藤総夫： 微分方程式で解析する，I II（III未刊），日本評論社 1980,1986

その他次の書物にも面白い例がある。

[9] P.Henrici/一松訳： ポケット電卓による計算解析，現代数学社 1982

[10] 戸田盛和： 非線形波動とソリトン，日本評論社 1983

[11] ICMI Study Series, A.G.Hawson & J.-P.Kahane 編／植竹恒男監訳：（日本数学教育学会編訳）数学教育とコンピュータ，聖文社 1989