数学入門公開講座

平成元年7月25日(火)から8月3日(木)まで

京都大学数理解析研究所

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 定角曲線について

京都大学数理解析研究所・教授　松　浦　重　武

定角曲線についてその存在と、関連する変分問題について述べる。

2. 微分方程式と数値解法

東京電機大学理工学部・教授　一　松　信

微分方程式は自然現象・社会現象を通じて、有用な数学モデルを提供しているが、それが解析的に解けるのは極めて限られた場合だけである。近年計算機の発展に伴い、数値解法が強力な道具となって、多くの興味ある事実が発見された。しかし数値解法では、大域的な性質を知るのに困難が多く、「Symbolic Graphic Numeric の三位一体」が望まれている。ここではその背景を念頭におき、数値解法を主体とした微分方程式の入門コースを試みる。

3. 確率・意思決定

京都大学数理解析研究所・助教授　楠　岡　成　雄

今日、確率・情報といった言葉がよく用いられるが、きわめてあいまいな意味で使われることが多い。この講義では確率という概念が諸科学でどのように用いられているのかを見ていきたい。前半では、確率とは何かという問題を確率の歴史、自然科学；社会科学に現われる確率概念等を通じて考えていく。前半の最後ではコルモゴロフ以後の確率論の考え方を考察する。

後半では、統計学における決定問題ゲームの理論等々を題材に意思決定の問題を考えていく。

4. 空間との長いつきあい

京都大学数理解析研究所・助教授　成　木　勇　夫

自然の中での生存と言う人間の基本的様態によって形成された空間の概念を、古代ギリシヤのユークリッド幾何から始め、代数的演算とともに発達した近代解析幾何、微積分学の影響下に成立した微分幾何、多様体の大域的性質を対象とする位相幾何等の概説を通して一貫した流れを追求し、現代的展望に至る。

時　間　割

<table>
<tr><th>日
時間</th><th>7月
25日
(火)</th><th>26日
(水)</th><th>27日
(木)</th><th>28日
(金)</th><th>29日
(土)</th><th>30日
(日)</th><th>31日
(月)</th><th>8月
1日
(火)</th><th>2日
(水)</th><th>3日
(木)</th></tr>
<tr><td>13:15～15:00</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td colspan="2" rowspan="3">休講</td><td>楠岡</td><td>楠岡</td><td>楠岡</td><td>楠岡</td></tr>
<tr><td>15:00～15:15</td><td colspan="4">休憩</td><td colspan="4">休憩</td></tr>
<tr><td>15:15～17:00</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>成木</td><td>成木</td><td>成木</td><td>成木</td></tr>
</table>

1. 定角曲線について

京都大学数理解析研究所・教授　　松　浦　重　武

1989, JULY 25,26,27,28,　　　　13:15-15:00

定角曲線について

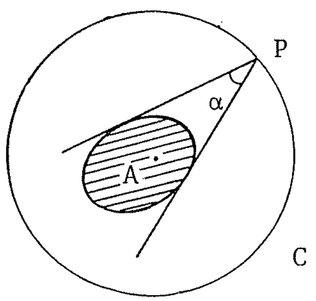
京都大学数理解析研究所　松浦重武

平面に座標を入れて R^2 と表わす。それは、集合 $\{(x,y);\ x,y$ は実数$\}$ の事である。平面の原点 (0,0) を中心として、半径 R の円を考え、それを C と書いて、準円をよぶ。準円は、基準となる円ということで、英語では director circle とかく。

良く知られている「定巾曲線」は R= 無限大の場合で、これから考察する「定角曲線」の場合には、R は有限にとるので、一般性を失うことなく、R=1 としてよい。すなわち、C は単位円とする。

さて、C の中に含まれる図形を一つ考え、それを A と書く。A にたいして、次のような条件を考える。

いま、一つの角 α が与えられたとする。角度は弧度法で測るとして、α は 0 と π の間にあるとする。



さて、円 C 上の点 P から図形 A を見た時「A が視点 P に対して張る角が（任意の P について）常に α に等しい」とする。ここで、P は円 C 上の動点と考えている。
（左図を見よ。）

この様に、準円 C 上の任意の点 P に対して、一定の角度を張る図形を、「定角図形」と呼ぶことにする。（詳しくは、角度 α の定角図形と呼ぶべきである； $\alpha=0$ として、その代りに R= 無限大として、その極限をとる過程において巾が一定になる様にしたものが「定巾曲線」であると思えるのである）。

実際は、このような図形は、つねに、凸図形であって、内点を持つ一つの図形 D と同値であることがわがる。同値とは、準円 C 上の任意の点から見て同じに見えること、すなわち P から A を見るときの視線の全体がつくる視錐 C(P,A) が、P から D を見るときの視錐 C(P,D) と一致することである。

実際、図形 D としては、P が準円 C の上を動くときの全ての C(P,A) の共通部分をとればよい。 C(P,A) は凸閉集合だから、それらの共通部分である D も凸閉集合である。$0<\alpha<\pi$ だから、D は、内点をもつ凸閉集合で、もちろん有界（C の中に在るから）である。従って、D の

境界 ∂D は閉凸曲線となる。このとき、次の包含関係が成立する。

$$\partial D \subseteq A \subseteq D$$

これが、AとDが同じに（もちろん ∂D とも）見えるという事の正確な表現である。

図形 Aは、その外見だけが問題になっているから、 $A - \partial D$ の点はどうでもよいことになる。

そこで今後は、凸閉集合 Dまたは凸閉曲線 ∂D を考察することにする。上の包含関係からわかるように、視錐について

$$C(P,A) = C(P,\partial D)$$

が、C上のすべてのPについて成立しているから、 ∂D も亦、角度 α の定角図形となる。これが、角度 α の「定角曲線」である。

さて、任意の α, $0<\alpha<\pi$, に対して、定角曲線の存在することは、明らかである。それは、円Cと同心円で半径が $r = \sin(\alpha/2)$ の円を考えればよい。

従って、興味のあるのは、円Cと同心円ではない定角曲線の存在の問題である。これに対する解答は、角度 α の数論的な性質によって決る。

定理 1． 準円Cと同心円でない定角曲線が存在するための必要十分な条件は、α/π が有理数であって、それを既約分数 m/n の形に書いたとき、mとnのうち、どちらか一方が偶数となる事である。

上の定理に当て嵌る一番簡単な場合は角度が９０度のときである。この場合には、古典的な例として楕円がある。この事は、ガリレオ・ガリレイの「新科学対話」に、楕円の持っている注目すべき性質として述べられている。実際、座標をもちいて、楕円を方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表わして、これに二つの接線を引き、それらが直交するように取ると、これらの二接線の交点は常に一つの定円の上にある。この定円は、方程式でかくと

$$x^2 + y^2 = R^2$$

と表わされる。但し、 $R^2 = a^2+b^2$ である。従って、 R=1 となるように a と bをえらんでおけば、C を準円とする定角曲線として楕円を採用することが出来る。「準円」という述語の由来も、この楕円の場合の命名による。

ここで注意するべき事は、楕円から楕円を求める仕方は一意的であるが、逆の方向、即ち円Cから始めて、C を準円とする楕円を求めようとすると、無限に多くの楕円があることである。長径と短径の比は自由だし、主軸の方向も自由だからである。さらに、後で述べるが、角度が９０°の定角曲線で楕円と本質的に全く異なるものが、無限に存在する（自由度が無限）。これが、定角曲線を求めるときの困難さの一つの理由である。

古典的に知られている例は、楕円だけである。角度が９０°の場合に限れば、ドイツの数学者 Blaschke が、１９３０年頃の論文で、楕円でない例を構成している。それ以外の文献は無い。 Blaschke は、９０°の場合にこだわった考察の方法を取っているが（ Blaschkeは定巾曲線の理論では決定的な仕事をしているが、この論文では簡単な考察だけである）、筆者は偶然の機会から、問題を一般の角度の場合に、取り上げることになった。その第一歩が定理１である。

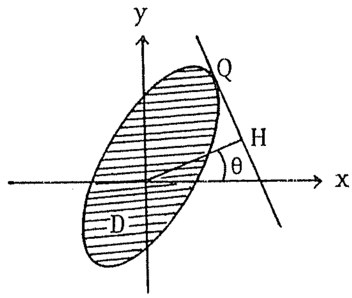
ところで、定理１の証明であるが、必要性の方は比較的やさしい。十分性の方は、定角曲線を実際に構成しなければならないので、相当に手間がかかる。

問題を解くための道具建てとしては、まづ「支持関数」（supporting function）を、導入しなければならない。

Dを有界閉凸集合とする。（いまは、平面 R^2 で、一般的に考えている；定角性は、一旦は無視して、後で考察することにする。）さて、x 軸の正の方向を基準にして、平面の原点 $O = (0,0)$ から出る任意の有向半直線とのなす角を θ とする。角の測り方は、通例のように、反時計回りとする。この時、支持関数 $p(\theta)$ を

$$p(\theta) = \sup\{x\cos\theta + y\sin\theta \ ;\ (x,y) \in D\}$$

によって定義する。（次図をみよ。）



関数 $p(\theta)$ が連続関数になることは、容易にわかる。さらに、D が厳凸 (strictly convex ; 即ち D の境界 ∂D が、直線的部分をふくまない) ならば、$p(\theta)$ は連続的微分可能になることが示される。このとき、∂D は、θ をパラメータとして、次のように表示できる。

$$x = p(\theta)\cos\theta - \dot{p}(\theta)\sin\theta$$

$$y = p(\theta)\sin\theta - \dot{p}(\theta)\cos\theta$$

(ただし、$0 < \theta < 2\pi$)。$\dot{p}$ は p の導関数である。

この表示式によって、$p(\theta)$ が具体的に与えられるならば、コンピューターを使用することにより、凸曲線 ∂D を描くことができる。

さて、定角曲線にもどろう。まず定角曲線は厳凸であることがわかる。従って、上の表示式が使えるから、こんどは、支持関数 p の (定角曲線の支持関数となるための) 特徴付けが必要となる。結果を言えば、それは次の定理の四条件で与えられる。

定理 2. 関数 p が角度 α の定角曲線の支持関数であるための必要十分な条件は、つぎの四条件を満たすことである。

1°) 関数 p は、<u>周期 2π</u> の連続的微分可能な関数である。

2°) 関数 p は、<u>不等式</u> $0 < p(\theta) < 1$ を満たす。

3°) 関数 p は、<u>関数等式</u>

$$p(\pi - \alpha + \theta) = \chi_\alpha(p(\theta))$$

但し、$\chi_\alpha(s) = \sqrt{1 - s^2}\,\sin\alpha - s\cos\alpha$

4°） 関数pは、<u>微分不等式</u> $p+\ddot{p}\geqq 0$ を満たす。但し、$\ddot{p}$ は、Schwartz の超関数の意味での二階導関数を表わす。（この微分不等式の意味は、$p+\ddot{p}$ が正（非負）の Radon 測度となることである。

上の定理の四条件が、定角曲線の支持関数を完全に特徴付ける事を示すには少々準備が必要である。とくに、最後の微分不等式には、現代関数解析学の知識が必要である。これが、同じ凸曲線を扱うのでも Blaschke の時代と現代の相違である。

関数等式に出てくるχ_αは<u>特性関数</u>とよぶ。

解析的な定角曲線を構成するには、Chebyshev の多項式の逆関数としての Chebyshev 関数を利用するのが最も便利である。もちろん、これは多価関数になるから、その分枝を使うのであるが、その際 Chebyshev 多項式のグラフの変曲点が重要な役割を果たす。これらの分枝を用いて議論するだけで、定理１の証明ができる。

しかし、種々の変分問題の解は、全く別の曲線になる。それらの解の存在を一般的に保障するには、 Ascoli-Arzela 型の定理が必要になり、そのためには、関数空間の準備が要る。

それでも、具体的な変分問題の解を具体的に求めるには、個々の問題について、それに応じた工夫が必要になる。解けた問題も幾つかあるが、未解決のものも多い。

<u>関数空間 $B_{2,s}$の定義</u>

$B_{2,s}$ <u>の位相の定義</u>、そのコンパクト集合

Schwartz の超関数、Radon 測度、Lebesgue 積分、等々。

予備知識なしで済ませるには難しいところは、“rapid course”をする。

次の補題は、微積分の命題を補充するものである。

補題 直線 $\mathbb{R}$ 上の閉区間 [a,b]で定義された連続関数 f が、この区間で単調増大（非減少）であるための必要十分な条件は、開区間 (a,b) において、その導関数 f'(超関数の意味の) が正（非負）なことである。

f が微分可能であれば、これは微分学の普通の命題であるが、この補題のよい所は、それを仮定しない所にある。超関数の意味でのf'は常に存在するから、使いやすい補題である。証明も簡単である。

角度 α の定角曲線の支持関数の全体のなす集合を $p(\alpha)$ で表わす。

定理３. 角度 α が $\frac{n-1}{n}\pi$ でないならば、$P(\alpha)$ は $B_{2,s}$ において、コンパクト集合である。また、k を $0<k<1$ となる任意の数とするとき、

$$P(k,\alpha) = \{p\ ;\ p \leqslant k,\ p \in P(\alpha)\}$$

とおくならば、任意の α に対して $P(k,\alpha)$ は $B_{2,s}$ においてコンパクトになる。

この定理は、種々の変分問題の解の存在を一挙に保障するものである。