平成10年度(第20回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成10年8月3日～8月7日開催)

数学入門公開講座

平成１０年８月３日（月)から８月７日(金)まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．無理数、超越数（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助手　永田　誠

$\sqrt{2}$ は無理数、円周率 π は超越数、というのは良く知られています。$\sqrt{2}$ が無理数であるということはギリシャ時代には既に知られていました。一方 π が超越数であるということが証明されたのは約百年前のことです。現在でもある数が超越数（または無理数）であるかどうかを判定することは大変難しい問題です。

本講座では現在この分野でどのようなことが知られているのかということの紹介等を話題に進めていく予定です。

2．微分方程式と発散級数（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　竹井　義次

「収束」の概念が確立された現代の解析学においては、収束しない発散級数は、取り扱いの難しい厄介な代物と考えられがちです。しかしその一方で、微分方程式を解く過程でしばしば発散級数が現れます。では、こうした発散級数で表される解には何の意味もないのでしょうか。面白いことに事実は全く逆で、収束する解と比べても遜色ないほど多くの情報を発散級数解は含んでいるのです。この講義では、発散級数を論じる際の基本的な道具である「漸近展開」や「Borel総和法」の解説を行いながら、モノドロミー群といった微分方程式の解の大域的な性質と発散級数解との関わりについて考えてみたいと思います。

3．再帰的構造とアルゴリズム（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助手　西村　進

自然数の階乗を求める関数 f は

$$f(n)=\begin{cases}1 & (n=0\text{ のとき})\\ n\times f(n-1) & (n>0\text{ のとき})\end{cases}$$

のように定義できるが、このような定義を、自分自身の定義を使った定義という意味で、再帰的定義という。このような再帰的関数定義は、自然数に限らず、リストや木などの再帰的構造を持つようなデータの処理を、簡潔にかつわかりやすく記述するのに非常に有効である。

本講座では、再帰的プログラミングの入門から始めて、いくつかのアルゴリズム（問題を解く手順）を、再帰的プログラミングの観点から紹介する。

時　間　割

時間＼日	8月3日(月)	4日(火)	5日(水)	6日(木)	7日(金)
10：30〜11：45	永田	永田	永田	永田	永田
11：45〜13：00	休　憩				
13：00〜14：15	竹井	竹井	竹井	竹井	竹井
14：15〜14：45	休　憩				
14：45〜16：00	西村	西村	西村	西村	西村

平成10年度(第20回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成10年8月3日～8月7日開催)

無理数、超越数

京都大学数理解析研究所・助　手　　永　田　　誠

1998, AUGUST 3,4,5,6,7, 10:30 ~ 11:45

無理数、超越数

永田 誠

無理数

無理数とは有理数でない実数のことをいいます。まず有理数とは何かの復習をしましょう。

$1,2,3,\ldots$ と石コロを数えるときに使う数を、自然数といいます。

この自然数に、0 と 自然数にマイナスの符号をつけた $-1,-2,-3,\ldots$ を仲間にいれた数たちを、整数といいます。この整数全体を通常 $\mathbb{Z}$ と書きます。

2つの整数の比、つまり、分母、分子が整数である分数のことを、有理数といいます。有理数全体を $\mathbb{Q}$ で表すことが多いようです。

有理数を英語でいうと rational numbers、直訳すると 合理的な数 ですが、比を英語でいうと ratio ですから英語の方が覚えやすい感じがします。

$$\text{整数の集合：}\quad \mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\},$$
$$\text{有理数の集合：}\quad \mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}.$$

さて、無理数ですが、これは、有理数でない実数、のことをいいます。さて実数って何？となりますが私が高校生のとき、

無理数とは有理数でない実数、実数とは有理数と無理数

というとても論理的とは思えない？定義？で教わりました。理解しようとすることをあきらめた記憶があります。ここでも実数を理解することはあきらめることにしましょう。

さて、無理数の話しですが、例えば $\sqrt{2}$ が無理数である、ということの証明は、背理法の例として知られていることと思います。個人的には、この無理数であるということの証明は面白い、という印象があります。そもそも無理数ということ自体、有理数「でない」数、という少々ヒネクレタ？数です。それの証明に使う背理法というのもなんだかすこしヒネクレタ感じがします。ヒネクレタ、なぞなぞチック？な感じが面白いのかもしれません。

脇道にそれますが、私の好きな背理法の例を一つあげます。

定理０.

世の中に髪の毛の本数が全く同じ人が存在する。

ふざけた話しで叱られてしまいそうですが？マジメに考えてみましょう。この定理０の主張を明確に言い換えると、

世の中に次をみたす a さん、b さんが存在する：

$$a \text{ さんの髪の毛の本数} = b \text{ さんの髪の毛の本数。}$$

証明. 定理0が成立しないと仮定する。しからば世の中の人は全員髪の毛の数が違うことになる。世の中には髪の毛が生えている人が 30 億人位[1]はいる。全員の髪の毛の数が違うのであるから髪の毛の少ない順に世の中の人に番号をふっていくと 20 億番目の人から最後の 30 億番目の人まで少なくとも髪の毛が 20 億本以上生えている。すなわち 20 億本以上生えている人がすくなくとも 10 億人以上いることになる。髪の毛の長さもいろいろであろうが、髪の毛 1 本 0.1 ｍｇ＝ 0.0001 ｇ 以上[2]あるとする。20 億本の髪の毛の重さは 200 ｋｇ以上。したがって髪の毛だけの重さが 200 ｋｇ以上の人が 10 億人以上存在することになり、これは常識に反する。 □

さて、さきほど面白いと述べた無理数の証明には背理法の他、次の 2 つの事実が使われることが多いようです。

一つめは、

(事実１)　　　0 でない整数の大きさ（絶対値）は 1 以上である。

当たり前です。が、これはとても有効に用いられます[3]。これを使って、自然対数の底、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

が無理数であることを証明してみましょう。

まず、(事実１) を用いて次の補題を示します。

補題１.

ある実数 α にたいして、次をみたす無限個の整数の組 (p_n, q_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ が存在すれば、α は無理数である：

$$0 < \mid q_n\alpha - p_n \mid \to 0 \quad (n \to \infty).$$

証明. α を有理数と仮定とする。すなわち $\alpha = p/q$. したがって

$$\mid q_n \frac{p}{q} - p_n \mid = \frac{1}{\mid q \mid} \mid q_n p - p_n q \mid . \tag{1.1}$$

左辺は 0 でないとすると $q_n p - p_n q$ は 0 でない整数。よって (事実１) より

$$(1.1) \geq \frac{1}{\mid q \mid}.$$

したがって $\mid q_n\alpha - p_n \mid$ は 0 に収束しない。 □

[1] 世界人口平成 10 年 5 月現在 59 億 8 千万人。
[2] もっと軽いかもしれませんが、そういうことにしておきましょう。
[3] π が超越数であることを証明するときも使われています。

定理２.
　e は無理数である。

証明. $p_n = \sum_{i=0}^{n} n!/i! \in \mathbb{Z}$、 $q_n = n! \in \mathbb{Z}$ とおく。このとき

$$
\begin{aligned}
0 < \ q_n e - p_n &= n! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\
&< \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{1}{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

したがって補題１より e は無理数である。　□

　この証明で大事な点は、補題１(事実１) と、

p_n, q_n (証明に使う補助的なもの) を見つけること

です。この補助的なもの、が無理数性を示すのにとても大切です。もし、有効な補助的なものが見つかりさえすれば、オイラー定数 γ、$\zeta(5)$ など[4]の無理数性が証明出来る可能性が大きいのです。

　さて、無理数の証明 (等) に使われる面白い方法の二つめは、ディレクレの原理、別名、ヒキダシ論法、鳩の巣の原理、英語では box principle とか pigeonhole principle と呼ばれるものです。
　この原理の説明をしましょう。鳩の巣と卵で説明してもよいのですが、なんだかいじっているうちに卵を割ってしまいそうです。箱と石コロにして説明します。

(事実２)　　n 個の箱に n+1 の石コロを分配すると少なくとも
　　　　　　1 つの箱には 1 つ以上石コロがはいっている。

当たり前の感じがしますが、証明してみましょう。

証明. もし各々の箱に石コロが高々１つしか入っていないのであれば、n 個の箱に入っている石コロの総和は n 個以下。石コロの個数は n+1 なのでこれは矛盾する。よって少なくとも１つの箱には２つ以上石コロがはいっている。　□

　さて、この (事実２)、大変ありがたい原理なのですが、もっと欲をだして、２つ以上石コロがはいっている箱がどの箱なのか知りたい、けど分からない、という残念な点もあります。裏をかえせば (規則性がないような) どんな場合にも使えて便利、でもやっぱりどんな場合にも、ということは、なにか特徴ある結果が期待できない、ということになります。このヒキダシ論法、最低限のことを述べるときによく使われるようです。またさきほどの p_n, q_n のような補助的なものをみつけるときに用いられることもあります。
　ここではこの (事実２) を使って次の補題１の逆：
　無理数 α にたいして、次をみたす無限個の整数の組 (p_n, q_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ が存在する：

$$0 < \mid q_n \alpha - p_n \mid \to 0 \quad (n \to \infty).$$

を考えてみましょう。
　次がいえれば十分です。

[4] 現在無理数かどうかわかっていないが無理数ではないかと期待されている数。

命題 3．無理数 α に対して

$$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^2} \text{ をみたす整数の組 } (p,q),\ q>0 \text{ は無限に存在する。}$$

証明. α は正の実数として証明する。負でも同様である。

N を 2 以上の自然数とし、数直線の 0 以上 1 以下の区間を N 等分する。このとき各々の区間の長さは $1/N$.（これが (事実 2) の箱にあたります）

非負の実数 t に対して、$[t]$ を t の整数部分、$\{t\}$ を t の小数部分、とする。すなわち $t=[t]+\{t\}$.

次の $N+1$ 点の集合を考える。（これが (事実 2) の石コロにあたります）

$$0,\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},\ldots,\{(N-1)\alpha\},1.$$

これらの点はすべて 0 以上 1 以下であるので (事実 2) より少なくとも 2 点はあるひとつの長さ $1/N$ の区間にある。それを $\{i\alpha\}$, $\{j\alpha\}$, $0\le i<j\le N-1$ （または 1 と $\{j\alpha\}$）とすると、

$$|\{j\alpha\}-\{i\alpha\}|\le\frac{1}{N},$$

（または $|\{j\alpha\}-1|\le 1/N$）すなわち、$|(j-i)\alpha-([j\alpha]-[i\alpha])|\le 1/N$ （または $|j\alpha-([j\alpha]+1)|\le 1/N$）．ここで $p=[j\alpha]-[i\alpha]$, $q=j-i\ (<N)$ （または $p=[j\alpha]+1, q=j$ ）とおけば、$q<N$ より $|q\alpha-p|\le 1/N<1/q$. すなわち、

$$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^2}. \tag{3.1}$$

もし (3.1) をみたす (p,q) が有限個しかないとする。r を $|q\alpha-p|$ の最小値、ただし (p,q) は (3.1) をみたすもの、とする。(3.1) をみたす (p,q) が有限個しかないのであるから、$r>0$. ここで、N を $1/r$ より大きい数として上の議論をもう一度行なえば、$|q\alpha-p|\le 1/N<r$ をみたす (p,q) を求めることが出来る。これは r の最小性に反する。したがって、(3.1) をみたす (p,q) は無限に存在する。 □

さて、命題 3 をジッとにらんで思いきって次の問題を考えてみましょう。

問題 4．

k を 2 よりすこし大きい数とする。このとき

$$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^k} \text{ をみたす整数の組 } (p,q),\ q>0 \text{ は無限に存在するか？}$$

この問題 4 に対する答えが次の定理です。ロスの定理といわれています。

定理 5 (**Roth の定理**)．

$k>2$ とする。このとき（有理数でない）代数的数 α に対して、

$$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^k} \text{ をみたす整数の組 } (p,q),\ q>0 \text{ は有限個。}$$

代数的数、という言葉が出てきてますが、これはあとで超越数を説明するときに説明します。少々条件がついてますがとにかくこの定理5は命題3の $1/q^2$ の2がギリギリの小さい数であることを主張していることになります。

一般に、あることがギリギリであること を示すのは大変難しく、このロスの定理の証明も例外ではありません。代わりといってはなんですが、このロスの定理になんだか似ているリウビルの定理を後ほど説明します。

さて、定理5は、代数的数、という条件がついていました。では代数的数ではないものについてはどうでしょうか？答えは一般にはダメです。ダメな例（反例）があります。それは後ほど説明するリウビルの定理から得られます。超越数[5]です。

超越数

さきほど、有理数でない数が無理数である、と定義しました。超越数もなんとなく似ている感じで定義されます。最初に代数的数を定義しましょう。

有理数をジッとにらんでみます。a/b、$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ です。すると、これが1次方程式 $bx - a = 0$ の解であるということが分かります。代数的数とはこの拡張と考えられます。上の1次方程式を2次、3次、4次、$\cdots$ としたとき、その解を代数的数と呼びます。明確に述べてみましょう。

d を自然数とする。整数 $a_0, a_1, \ldots, a_d$、$a_d \neq 0$、を係数とする多項式の方程式

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の複素数解を代数的数という。

代数的数 α はそれを解にもつ整数係数多項式の方程式があるわけですが、そのうち次数が最小な多項式の次数を α の次数とよびます。次数 d の代数的数を d 次の代数的数といいます。

代数的数全体を $\overline{\mathbb{Q}}$ で表すことが多いようです：

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \mid \alpha \text{は } d \text{ 次の代数的数、} d = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

上の定義より、有理数は1次の代数的数です。

2次以上の（実数の）代数的数は無理数です、が、その逆？はいえるでしょうか？つまり有理数でない複素数はすべて2次以上の代数的数でしょうか？答えはノーです。そうでない数があるのです。そしてその代数的数でない複素数を超越数とよぶのです。

$$\text{有理数全体} \subset \text{代数的数全体} \subset \text{複素数全体},$$
$$\text{超越数全体} = \{\alpha \mid \alpha \text{ は代数的数でない複素数}\}.$$

さて、さきほどロスの定理のところででてきたリウビルの定理について説明しましょう。

[5] 定理5の主張が成立する超越数もあります。e もそのひとつです。

定理 6．
$d \geq 2$ とする。このとき d 次の代数的数 α に対して、つぎをみたす（α に依存する）定数 $c_0 > 0$ が存在する：

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid < \frac{c_0}{q^d} \text{ をみたす整数の組 } (p,q),\ q>0 \text{ は存在しない。}$$

この定理 6 は次のリウビルの定理からただちに導かれます。

定理 7 **(Liouville の定理)**．
$d \geq 2$ とする。このとき d 次の代数的数 α に対して、つぎをみたす（α に依存する）定数 $c_1 > 0$ が存在する：

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid > \frac{c_1}{q^d} \text{ がすべての整数の組 } (p,q),\ q>0 \text{ で成立する。}$$

定理 6 の証明. c_0 を定理 7 の定数 c_1 とすれば、定理 7 よりすべての整数の組 (p,q) に対して、$\mid \alpha - p/q \mid > c_1/q^d$。したがって $\mid \alpha - p/q \mid < c_1/q^d$ をみたす整数の組 (p,q) は存在しない。 □

定理 7 の証明. $P(x)$ を $P(\alpha)=0$ となる最小の次数の多項式とする。ここで $P(x)$ の次数は d である。もしある有理数 p/q で $P(p/q)=0$ であれば、$P(x)=(x-p/q)Q(x)$, $Q(\alpha)=0$ なる有理数係数多項式 $Q(x)$ が存在する。この $Q(x)$ の係数の共通分母を $Q(x)$ に掛けると α を解にもつ整数係数多項式で次数が $P(x)$ より小さいものが得られる。これは $P(x)$ の次数の最小性に反する。よって有理数 p/q に対して $P(p/q) \neq 0$.

さて、$\mid \alpha - p/q \mid < 1$ であるとき、平均値の定理より、

$$-P(\frac{p}{q}) = P(\alpha) - P(\frac{p}{q}) = (\alpha - \frac{p}{q})P'(\theta). \tag{7.1}$$

ここで $\mid 1/(2P'(\theta)) \mid$ $(0 < \mid \alpha - \theta \mid < 1)$ の最小値 と $1/2$ の小さい方、を c_1 とすると、(7.1) より

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid > c_1 \mid P(\frac{p}{q}) \mid = c_1 \frac{\mid q^d P(\frac{p}{q}) \mid}{q^d}. \tag{7.2}$$

$q^d P(p/q)$ は 0 でない整数であるから (事実 1) と (7.2) より

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid > \frac{c_1}{q^d}. \tag{7.3}$$

$\mid \alpha - p/q \mid \geq 1$ であるとき、上の c_1 で $c_1/q^d < 1$. したがって (7.3) は成立する。 □

定理 5 と定理 6 をくらべてみましょう。定理 5 は右辺の分子は 1 、定理 6 の右辺の分子は c_0 ですが、気にしないことにします。さらに、思いきって、定理 5 の、有限個しか存在しない、も、定理 6 の、全く存在しない、もたいして変わらないとします。すると $d=2$ のときは定理 6 の方が主張が強いのですが、定理 5 の k を 2 より「ほんの少し大きい数」とすると $d \geq 3$ の場合、$1/q^d < 1/q^k$ ですから定理 5 の方が強い主張をしているわけです。α に依存しないで k を選んでよいというのが定理 5 の素晴らしい点なのです。

超越数の定義はさきほどしました。が、本当にそのような数があるのかどうかまだ示していません。定理 7 を使って、超越数が実際に存在することを示してみましょう。超越数となる例をあげれば十分です。

命題 8 .

超越数は存在する。

証明. a を 2 以上の自然数とする。次の値[6]

$$\alpha(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^{i!}}$$

が代数的数でないことを示す：

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^{n!}}{a^{i!}}, \quad q_n = a^{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおくと

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(a) - \frac{p_n}{q_n} &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{i!}} = \frac{1}{a^{(n+1)!}}\left(1 + \frac{1}{a^{(n+2)!-(n+1)!}} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{a^{(n+1)!}}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots\right) = \left(\frac{1}{a^{n!}}\right)^{n+1} \frac{a}{a-1} \\ &= \frac{a}{a-1} \frac{1}{{q_n}^{n+1}} \leq \frac{1}{{q_n}^{n}}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

したがって、この (p_n, q_n) に対して $0 < | q_n \alpha(a) - p_n | \to 0$ であるから補題 1 より $\alpha(a)$ は無理数である。すなわち 1 次の代数的数（=有理数）ではない。もし $\alpha(a)$ が次数 $d \geq 2$ の代数的数とする。上の (p_n, q_n) に対して、定理 7 より $| \alpha(a) - p_n/q_n | > c_2/{q_n}^d$ であるが、(8.1) より $| \alpha(a) - p_n/q_n | < 1/{q_n}^n$ であるから

$$\frac{c_2}{{q_n}^d} < \frac{1}{{q_n}^n}.$$

これは n が十分大きいとき矛盾する。よって、$\alpha(a)$ は代数的数ではない。すなわち超越数。 □

超越数は上の形以外でも実はとてもたくさんあることが知られています。

さて、いままではすべて $| \alpha - p/q |$ という α を有理数で近似する方法で考えてきました。しかしこれらを上手に使ってその無理数性、超越数性が示せるものばかりだとは限りません。具体的な数について考えてみましょう。

超越数といえば円周率 π が有名だと思います。その事実を使って次の問題を考えてみましょう。

[6] $\alpha(2) = 1.2656250596046447753906250000 \cdots$, $\alpha(3) = 0.7791495198938013371628438910 \cdots$, $\alpha(10) = 0.210001000000000000000001000 \cdots$

問題９（円積問題）．
　定規とコンパスを用いて、与えられた円と同じ面積をもつ正方形を作図せよ。

　半径 1 の円の面積は π です。したがってもし作図出来るのであれば、正方形の一辺の長さは $\sqrt{\pi}$ ですから、長さ $\sqrt{\pi}$ の直線が作図出来なければなりません。
　ここで定規とコンパスで直線を描く、ということはどのようなことか考えてみましょう。よくよく考えると、
（１）直線と直線、直線と円、円と円、のいずれかの交点を求め、
（２）これを繰り返し行ない、
（３）そして求めた 2 点を結んで直線を描く、
ということのようです。直線（$=$ 1 次式）や円（$=$ 2 次式）の交点の座標を求めるということは、それらの 1 次式、2 次式を連立させて解くということです。すなわち、（１）は、せいぜい 2 次方程式を解くということに対応します。代数的数全体は四則演算で閉じており、また代数的数を係数に持つ方程式の解は代数的数である、という事実を認めると、これら高々 2 次方程式の係数は、それ以前に得られた交点の座標を使って出来た数ですから、代数的数です。そしてその解も代数的数です。つまり（２）によってこの操作を繰り返して求めた交点の座標は代数的数ということになります。したがって（３）より、定規とコンパスではせいぜい代数的数の長さの直線しか作図出来ないのです。
　次に $\sqrt{\pi}$ が代数的数であると仮定しましょう。すると $\sqrt{\pi}$ を解にもつ整数係数多項式方程式があります。その方程式の奇数次を右辺に移項して両辺を 2 乗すると、これは $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$ を解にもつ方程式になります。すなわち、π も代数的数。これは π が超越数であるという事実に反します。つまり $\sqrt{\pi}$ も超越数。
　以上の議論より $\sqrt{\pi}$ は定規とコンパスでは作図出来ないことになります。

問題９は不可能である。

　問題９はギリシャ時代からあった問題ですが、π の超越性が 1882 年に証明されるまで長い間未解決だったのです。

　すこし長い証明ですが π が超越数であることを証明しましょう。

定理１０（**Lindemann**）．
　π は超越数である。

証明. π を代数的数とすると $\sqrt{-1}\pi$ も代数的数である[7]。この $\sqrt{-1}\pi$ を解にもつ最小次数整数係数多項式を $P(x)$ とする。その $P(x)=0$ の解を $\alpha_1 = \sqrt{-1}\pi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_d$ とおく。$e^{\sqrt{-1}\pi} = -1$ である[8]から、

$$0 = (1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_d}) \qquad (\text{展開して})$$

$$= \sum_{i=1}^{d}\sum_{\delta_i=0}^{1} e^{\delta_1\alpha_1+\cdots+\delta_d\alpha_d}. \tag{10.1}$$

上の $\delta_1\alpha_1+\cdots+\delta_d\alpha_d$ で 0 にならないものを $\theta_1,\dots,\theta_n, n \le 2^d$ とおく。$\delta_1\alpha_1+\cdots+\delta_d\alpha_d = 0$ になるものは（少なくとも 1 つは 0 になることに注意して）$2^d - n$ (≥ 1) 個。$e^0 = 1$ であるから (10.1) の左辺の和の項には $2^d - n$ 個の 1 がある。すなわち

$$(10.1) = e^{\theta_1} + \cdots + e^{\theta_n} + 2^d - n\ (=0). \tag{10.2}$$

[7] もし $\sqrt{\pi}$ が代数的数なら π も代数的数、という議論をヒントに考えてみましょう。
[8] オイラーの公式：$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$

さて a を $P(x)$ の最高次係数とする。p を十分大なる素数として、

$$f(x) = a^{np}x^{p-1}(x-\theta_1)^p \cdots (x-\theta_n)^p$$

とおく。$f(x)$ の次数は $p-1+np$ であり、これを m とおく。さらに

$$I(t) = -\int_0^t e^{t-u}f(u)du \qquad (\text{積分経路は } 0 \text{ と } t \text{ を結んだ直線}),$$

$$J = I(\theta_1) + \cdots + I(\theta_n)$$

とおく。$f^{(m+1)}(x) = 0$ であるから、部分積分より

$$\begin{aligned} I(t) &= \left[e^{t-u}f(u)\right]_0^t - \int_0^t e^{t-u}f'(u)du \\ &= \left[e^{t-u}f(u)\right]_0^t + \left[e^{t-u}f'(u)\right]_0^t - \int_0^t e^{t-u}f''(u)du \\ &= \cdots = \sum_{j=0}^m f^{(j)}(t) - e^t \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0). \end{aligned}$$

よって (10.2) より

$$J = \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n f^{(j)}(\theta_k) + (2^d - n)\sum_{j=0}^m f^{(j)}(0). \tag{10.3}$$

$f(x)$ を展開すると各係数は $a\theta_1, \ldots, a\theta_n$ の、すなわち $a\alpha_1, \ldots, a\alpha_d$ の整数係数対称式であるから、$f(x)$ は整数係数多項式である。したがって $f^{(j)}(0), (j \geq 0)$ は整数。$f(x+\theta_1) + \cdots + f(x+\theta_n)$ も同様にして整数係数多項式であるから、$f^{(j)}(\theta_1) + \cdots + f^{(j)}(\theta_n), (j \geq 0)$ も整数である。したがって J は整数。

また $f^{(j)}(\theta_k) = 0, (j < p, 1 \leq k \leq n)$, $f^{(j)}(0) = 0, (j < p-1)$ であり、さらに $j \geq p$ のとき $f^{(j)}(x)$ の係数は $p!$ で割り切れる。したがって $f^{(p-1)}(0)$ 以外の $f^{(j)}(0)$ と $f^{(j)}(\theta_1) + \cdots + f^{(j)}(\theta_n)$ $(j \geq 0)$ は $p!$ で割り切れる。

一方 $(2^d - n)f^{(p-1)}(0) = (2^d - n)(p-1)!(-a\theta_1 a\theta_2 \cdots a\theta_n)^p$ は p が十分大のとき p で割り切れない。すなわち $b = (2^d - n)(a\theta_1 a\theta_2 \cdots a\theta_n)^p \in \mathbb{Z}, \neq 0$ とおくと、b は p で割り切れない。(10.3) より $J = (p-1)!b + p!c$, c は整数、と表されるから、$J/(p-1)! = b + pc$ となる。これは p で割り切れないので 0 ではない。(事実1) より

$$|\, J/(p-1)! \,| \text{ は } 1 \text{ 以上。} \tag{10.4}$$

一方、$F(x)$ を $f(x)$ の負の係数をすべて正に置き換えた (非負の係数はそのままの) 多項式とすると

$$|\, I(t) \,| \leq \int_0^t |\, e^{t-u}f(u) \,| du \leq |\, t \,| e^{|t|}F(|\, t \,|).$$

したがって

$$|\, J \,| \leq |\, \theta_1 \,| e^{|\theta_1|}F(|\, \theta_1 \,|) + \cdots + |\, \theta_n \,| e^{|\theta_n|}F(|\, \theta_n \,|) \leq C^p$$

をみたす定数 C が存在することがわかる。よって、$|\, J/(p-1)! \,| \leq C^p/(p-1)!$. p が十分大きければ $C^p/(p-1)!$ は 1 より小となる[9]ので (10.4) に矛盾する。よって π は超越数。 □

[9] スターリングの公式： $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$